

11

Funções de Bessel

11.1 Funções de Bessel da Primeira Espécie, $J_\nu(x)$

Funções de Bessel aparecem em uma ampla variedade de problemas físicos. Na Seção 9.3, a separação da equação de Helmholtz, ou de onda, em coordenadas cilíndricas circulares levou à equação de Bessel. Na Seção 11.7 veremos que a equação de Helmholtz em coordenadas polares esféricas também leva a uma forma de equação de Bessel. Funções de Bessel também podem aparecer em forma integral — representações integrais. Isso pode resultar de transformadas integrais (Capítulo 15) ou da elegância matemática de iniciar o estudo de funções de Bessel com funções de Hankel, Seção 11.4.

Funções de Bessel e funções estreitamente relacionadas a ela formam uma rica área da Análise Matemática com muitas representações, muitas propriedades interessantes e úteis e muitas inter-relações. Algumas das mais importantes inter-relações são desenvolvidas na Seção 11.1 e seções subsequentes. Note que as funções de Bessel não estão restritas ao Capítulo 11. As formas assintóticas são desenvolvidas na Seção 7.3, bem como na Seção 11.6. As representações hipergeométricas confluentes aparecem na Seção 13.5.

Função Geradora para Ordem Inteira

Embora o interesse primário das funções de Bessel seja como soluções de equações diferenciais, é instrutivo e conveniente desenvolvê-las a partir de uma abordagem completamente diferente,¹ a de função geradora. Essa abordagem também tem a vantagem de focalizar as funções em si, em vez das equações diferenciais que elas satisfazem. Vamos introduzir uma função de duas variáveis,

$$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}. \quad (11.1)$$

Expandindo essa função em uma série de Laurent (Seção 6.5), obtemos

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \quad (11.2)$$

É instrutivo comparar a Equação (11.2) com as equivalentes Equações (11.23) e (11.25).

O coeficiente de t^n , $J_n(x)$, é definido para ser uma função de Bessel da primeira espécie de ordem inteira n . Expandindo as exponenciais, temos um produto de série de Maclaurin em $xt/2$ e $-x/2t$, respectivamente,

$$e^{xt/2} \cdot e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \quad (11.3)$$

Aqui, o índice r do somatório é trocado para n , sendo $n = r - s$ e os limites do somatório $n = -s$, para ∞ ; a ordem dos somatórios é permutada, o que é justificado por convergência absoluta. A faixa do somatório sobre n se torna $-\infty$ a ∞ , enquanto o somatório sobre s se estende de $\text{máx}(-n, 0)$ a ∞ . Para um dado s obtemos t^n ($n \geq 0$) por $r = n + s$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \quad (11.4)$$

¹Funções geradoras já foram usadas no Capítulo 5. Na Seção 5.6 a função geradora $(1+x)^n$ foi usada para derivar os coeficientes binomiais. Na Seção 5.9 a função geradora $x(e^x - 1)^{-1}$ foi usada para derivar os números de Bernoulli.

Então, o coeficiente de t^n é²

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} + \dots \quad (11.5)$$

Essa forma de série exhibe comportamento da função de Bessel $J_n(x)$ para x pequeno e permite avaliação numérica de $J_n(x)$. Os resultados para J_0 , J_1 e J_2 são mostrados na Figura 11.1. Pela Seção 5.3, o erro resultante da utilização de apenas um número finito de termos dessa série alternante na avaliação numérica é menor do que o primeiro termo omitido. Por exemplo, se quisermos $J_n(x)$ com precisão de ± 1 , só o primeiro termo da Equação (11.5) já será suficiente, contanto que a razão entre o segundo termo e o primeiro seja menor do que 1 (em grandeza) ou $x < 0, 2(n+1)^{1/2}$. As funções de Bessel oscilam, mas **não** são periódicas — exceto no limite, quando $x \rightarrow \infty$ (Seção 11.6). A amplitude de $J_n(x)$ não é constante, mas decresce assintoticamente como $x^{-1/2}$. (Veja a Equação (11.137)).

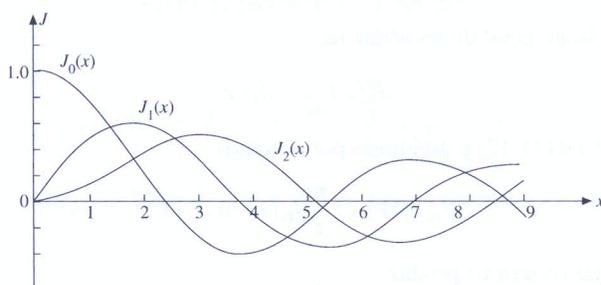


Figura 11.1: Funções de Bessel, $J_0(x)$, $J_1(x)$ e $J_2(x)$.

Para $n < 0$, a equação (11.5) resulta em

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \quad (11.6)$$

Uma vez que n é um inteiro (aqui), $(s-n)! \rightarrow \infty$, para $s = 0, \dots, (n-1)$. Por conseguinte, pode-se considerar que a série começa com $s = n$. Substituindo s por $s+n$, obtemos

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (11.7)$$

que mostra imediatamente que $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ não são independentes, mas estão relacionadas por

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{integral } n). \quad (11.8)$$

Essas expressões de séries (Equações (11.5) e (11.6)) podem ser usadas por n substituído por ν para **definir** $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ não-inteiro (compare com o Exercício 11.1.7).

Relações de Recorrência

As relações de recorrência para $J_n(x)$ e suas derivadas podem ser todas obtidas por operação sobre a série, Equação (11.5), embora isso exija um pouco de clarividência (ou muita tentativa e erro). A verificação das relações de recorrência conhecidas é direta (Exercício 11.1.7). Aqui é conveniente obtê-las pela função geradora, $g(x, t)$. Diferenciando ambos os lados da Equação (11.1) em relação a t , constatamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) &= \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

²Pelas etapas que levam a essa série e pelas suas características de convergência, deve ficar claro que ela pode ser usada com x substituído por z , sendo z qualquer ponto no plano complexo finito.

e substituindo a exponencial na Equação (11.2) e igualando os coeficientes de potências iguais de t ,³ obtemos

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \quad (11.10)$$

Essa é uma relação de recorrência de três termos. Dados J_0 e J_1 , por exemplo, J_2 (e qualquer outra ordem inteira J_n) pode ser calculada.

Diferenciando a Equação (11.1) em relação a x , temos

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n. \quad (11.11)$$

Mais uma vez, substituindo na Equação (11.2) e igualando os coeficientes de potências iguais de t , obtemos o resultado

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (11.12)$$

Como caso especial dessa relação geral de recorrência,

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (11.13)$$

Somando as Equações (11.10) e (11.12) e dividindo por 2, temos

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x). \quad (11.14)$$

Multiplicar por x^n e rearranjar os termos produz

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \quad (11.15)$$

Subtrair a Equação (11.12) da Equação (11.10) e dividir por 2 resulta em

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x). \quad (11.16)$$

Multiplicando por x^{-n} e rearranjando termos, obtemos

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (11.17)$$

Equação Diferencial de Bessel

Suponha que consideremos um conjunto de funções $Z_\nu(x)$ que satisfaça as relações básicas de recorrência (Equações (11.10) e (11.12)), mas com ν necessariamente um inteiro e Z_ν não necessariamente dada pela série (Equação (11.5)). A Equação (11.14) pode ser reescrita ($n \rightarrow \nu$) como

$$xZ'_\nu(x) = xZ_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x). \quad (11.18)$$

Diferenciando em relação a x , temos

$$xZ''_\nu(x) + (\nu + 1)Z'_\nu - xZ'_{\nu-1} - Z_{\nu-1} = 0. \quad (11.19)$$

Multiplicando por x e então subtraindo a Equação (11.18) multiplicada por ν , temos

$$x^2 Z''_\nu + xZ'_\nu - \nu^2 Z_\nu + (\nu - 1)xZ_{\nu-1} - x^2 Z'_{\nu-1} = 0. \quad (11.20)$$

Agora reescrevemos a Equação (11.16) e substituímos n por $\nu - 1$:

$$xZ'_{\nu-1} = (\nu - 1)Z_{\nu-1} - xZ_\nu. \quad (11.21)$$

Usando a Equação (11.21) para eliminar $Z_{\nu-1}$ e $Z'_{\nu-1}$ da Equação (11.20), finalmente obtemos

$$\boxed{x^2 Z''_\nu + xZ'_\nu + (x^2 - \nu^2)Z_\nu = 0,} \quad (11.22)$$

³ Isso depende do fato de a representação de série de potência ser única (Seções 5.7 e 6.5).

que é a EDO de **Bessel**. Por conseguinte, quaisquer funções $Z_\nu(x)$ que satisfaçam as relações de recorrência (Equações (11.10) e (11.12), (11.14) e (11.16) ou (11.15) e (11.17)) satisfazem a equação de Bessel; isto é, as Z_ν desconhecidas são funções de Bessel. Em particular, mostramos que as funções $J_n(x)$, definidas por nossa função geradora, satisfazem a EDO de Bessel. Se o argumento for $k\rho$ em vez de x , a Equação (11.22) se torna

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Z_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Z_\nu(k\rho) + (k^2 \rho^2 - \nu^2) Z_\nu(k\rho) = 0. \quad (11.22a)$$

Representação Integral

Um modo particularmente útil e poderoso de tratar funções de Bessel emprega representações integrais. Se voltarmos à função geradora (Equação (11.2)) e substituirmos $t = e^{i\theta}$, obteremos

$$e^{ix \operatorname{sen} \theta} = J_0(x) + 2[J_2(x) \cos 2\theta + J_4(x) \cos 4\theta + \dots] + 2i[J_1(x) \operatorname{sen} \theta + J_3(x) \operatorname{sen} 3\theta + \dots], \quad (11.23)$$

na qual usamos as relações

$$\begin{aligned} J_1(x)e^{i\theta} + J_{-1}(x)e^{-i\theta} &= J_1(x)(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2iJ_1(x) \operatorname{sen} \theta, \\ J_2(x)e^{2i\theta} + J_{-2}(x)e^{-2i\theta} &= 2J_2(x) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (11.24)$$

e assim por diante.

Em notação de somatório,

$$\begin{aligned} \cos(x \operatorname{sen} \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta), \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \operatorname{sen}[(2n-1)\theta], \end{aligned} \quad (11.25)$$

igualando as partes real e imaginária da Equação (11.23).

Empregando as propriedades de ortogonalidade de co-seno e seno,⁴

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}, \quad (11.26a)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}, \quad (11.26b)$$

nas quais n e m são inteiros **positivos** (zero excluído)⁵, obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ par,} \\ 0, & n \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (11.27)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ par,} \\ J_n(x), & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (11.28)$$

Se essas duas equações forem somadas,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos n\theta + \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} n\theta] \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11.29)$$

⁴Elas são autofunções de uma equação auto-adjunta (equação do oscilador linear) e satisfazem condições de contorno adequadas (compare com as Seções 10.2 e 14.1).

⁵As Equações (11.26a) e (11.26b) são válidas para m ou $n = 0$. Se m e $n = 0$, a constante em (11.26a) se torna π ; a constante na Equação (11.26b) se torna 0.

Como caso especial (integre a Equação (11.25) sobre $(0, \pi)$ para obter)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (11.30)$$

Observando que $\cos(x \operatorname{sen} \theta)$ repete a si mesmo em todos os quatro quadrantes, podemos escrever a Equação (11.30) como

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (11.30a)$$

Por outro lado, $\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$ inverte o sinal nos terceiro e quarto quadrantes, portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) d\theta = 0. \quad (11.30b)$$

Somando a Equação (11.30a) e i vezes a Equação (11.30b), obtemos a representação exponencial complexa

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta. \quad (11.30c)$$

Essa representação integral (Equação (11.29)) pode ser obtida de um modo um pouco mais direto empregando integração de contorno (compare com o Exercício 11.1.16).⁶ Existem muitas outras representações integrais (compare com o Exercício 11.1.18).

Exemplo 11.1.1 DIFRAÇÃO DE FRAUNHOFER, ABERTURA CIRCULAR

Na teoria da difração através de uma abertura circular encontramos a integral

$$\Phi \sim \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{ibr \cos \theta} d\theta \quad (11.31)$$

para Φ , a amplitude da onda difratada.⁷ Aqui, θ é um ângulo azimutal no plano da abertura circular de raio a , e α é o ângulo definido por um ponto sobre um anteparo abaixo da abertura circular em relação à normal que passa pelo ponto central. O parâmetro b é dado por

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha, \quad (11.32)$$

sendo λ o comprimento de onda da onda incidente. Os outros símbolos são definidos pela Figura 11.2. Pela Equação (11.30c) obtemos⁸

$$\Phi \sim 2\pi \int_0^a J_0(br) r dr. \quad (11.33)$$

A Equação (11.15) nos permite integrar a Equação (11.33) imediatamente para obter

$$\Phi \sim \frac{2\pi ab}{b^2} J_1(ab) \sim \frac{\lambda a}{\operatorname{sen} \alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha\right). \quad (11.34)$$

Note que, aqui, $J_1(0) = 0$. A intensidade da luz no padrão de difração é proporcional a Φ^2 e

$$\Phi^2 \sim \left\{ \frac{J_1[(2\pi a/\lambda) \operatorname{sen} \alpha]}{\operatorname{sen} \alpha} \right\}^2. \quad (11.35)$$

⁶Para $n = 0$, uma simples integração sobre θ de 0 a 2π converterá a Equação (11.23) na Equação (11.30c).

⁷O expoente $ibr \cos \theta$ dá a fase da onda sobre um anteparo distante no ângulo α (r, θ). A forma exponencial imaginária desse integrando significa que a integral é tecnicamente uma transformada de Fourier (Capítulo 15). Em geral, o padrão da difração de Fraunhofer é dado pela transformada de Fourier da abertura.

⁸Também poderíamos nos referir ao Exercício 11.1.16(b).

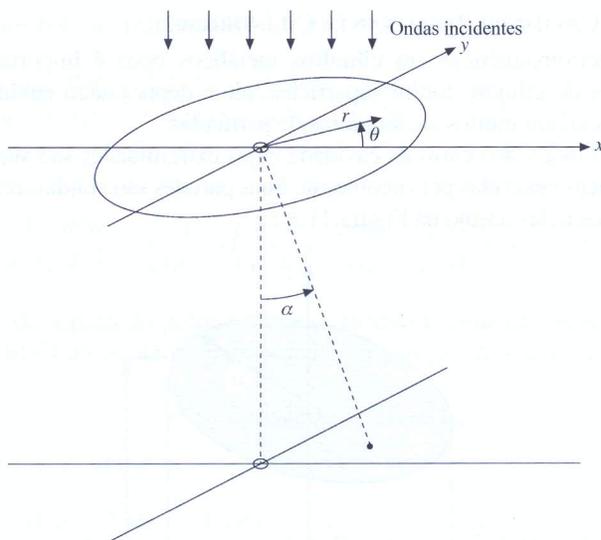


Figura 11.2: Difração de Fraunhofer, abertura circular.

Tabela 11.1 Zeros das funções de Bessel e suas derivadas de primeira ordem

Número de zeros	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178
	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$		
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012		
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152		
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459		

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Pela Tabela 11.1, que relaciona os zeros das funções de Bessel e suas derivadas de primeira ordem,⁹ a Equação (11.35) terá um zero em

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha = 3,8317 \dots, \quad (11.36)$$

ou

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3,8317\lambda}{2\pi a}. \quad (11.37)$$

Para luz verde, $\lambda = 5,5 \times 10^{-5}$ cm. Daí, se $a = 0,5$ cm,

$$\alpha \approx \operatorname{sen} \alpha = 6,7 \times 10^{-5} \text{ (radianos)} \approx 14 \text{ segundos de crc}, \quad (11.38)$$

o que mostra que a curvatura ou amplitude do raio de luz é extremamente pequena. Se essa análise fosse conhecida no século XVII, os argumentos contra a teoria de onda da luz teriam caído por terra. Em meados do século XX, esse mesmo padrão de difração apareceu na dispersão de partículas nucleares por núcleos atômicos — uma notável demonstração das propriedades de onda das partículas nucleares. ■

Um outro exemplo da utilização de funções de Bessel e suas raízes é dado pela cavidade ressonante eletromagnética (Exemplo 11.1.2) e pelos exemplo e exercícios da Seção 11.2.

⁹Raízes adicionais das funções de Bessel e suas derivadas de primeira ordem podem ser encontradas em C. L. Beattie, Table of first 700 zeros of Bessel Functions. *Bell Syst. Tech. J.* 37: 689 (1958), e Bell Monogr. 3055. Raízes podem ser acessadas no *software* Mathematica e outros *softwares* simbólicos que estão na Web.

Exemplo 11.1.2 CAVIDADE RESSONANTE CILÍNDRICA

A propagação de ondas eletromagnéticas em cilindros metálicos ocos é importante em muitos dispositivos práticos. Se as extremidades do cilindro forem superfícies, ele é denominado **cavidade**. Cavidades ressonantes desempenham um papel crucial em muitos aceleradores de partículas.

Considerando o eixo z ao longo do centro da cavidade cujas extremidades são superfícies em $z = 0$ e $z = l$ e usamos coordenadas cilíndricas sugeridas pela geometria. Suas paredes são condutores perfeitos, portanto o campo elétrico tangencial desaparece nelas (como na Figura 11.3):

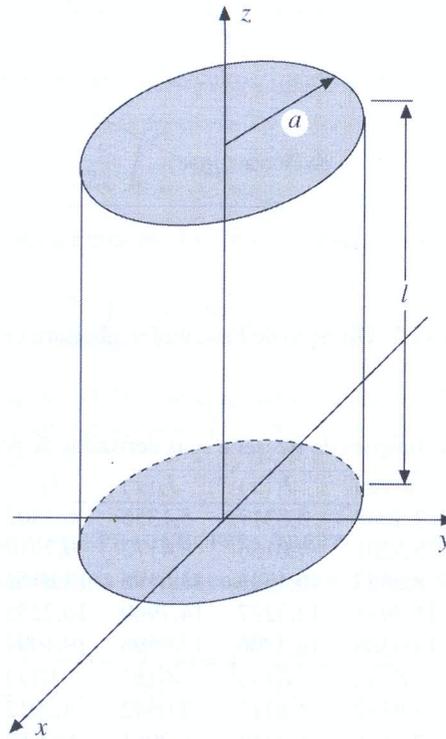


Figura 11.3: Cavidade ressonante cilíndrica.

$$E_z = 0 = E_\varphi, \quad \text{para } \rho = a, \quad E_\rho = 0 = E_\varphi, \quad \text{para } z = 0, l.$$

Dentro da cavidade temos um vácuo, portanto $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Ondas magnéticas no interior de uma cavidade ressonante oscilam com dependência harmônica do tempo $e^{-i\omega t}$, o que resulta de separar o tempo das variáveis espaciais em equações de Maxwell (Seção 1.9), portanto

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \alpha^2 \mathbf{E}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c}.$$

Com $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (vácuo, nenhuma carga) e a Equação (1.85), obtemos, para a parte espacial do campo elétrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \alpha^2 \mathbf{E} = 0,$$

que é denominada **EDP vetorial de Helmholtz**. A componente z (E_z , somente parte espacial) satisfaz a equação escalar de Helmholtz,

$$\nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0. \quad (11.39)$$

As componentes do campo elétrico transversal $\mathbf{E}_\perp = (E_\rho, E_\varphi)$ obedecem à mesma EDP, mas em condições de contorno diferentes, dadas anteriormente. Uma vez que E_z é conhecida, as equações de Maxwell determinam E_φ totalmente. Se o leitor quiser detalhes, consulte Jackson, *Electrodynamics*, nas Leituras Adicionais.

Separamos a variável z de ρ e φ , porque não há nenhuma derivada mista $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \rho}$ etc. A solução de produto, $E_z = v(\rho, \varphi)w(z)$, é substituída na EDP de Helmholtz por E_z usando a Equação (2.35) para ∇^2 em coordenadas

cilíndricas, e então dividimos por vw , resultando

$$\frac{1}{w(z)} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 v \right) v(\rho, \varphi) = 0.$$

Isso implica

$$-\frac{1}{w(z)} \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{v(\rho, \varphi)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 v \right) = k^2.$$

Aqui, k^2 é uma constante de separação porque os lados direito e esquerdo dependem de variáveis diferentes. Para $w(z)$ encontramos a EDO do oscilador harmônico com solução de onda estacionária (não-transitória) que procuramos,

$$w(z) = A \sin kz + B \cos kz,$$

com A, B constantes. Para $v(\rho, \varphi)$ obtemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 v = 0, \quad \gamma^2 = \alpha^2 - k^2.$$

Nessa EDO podemos separar as variáveis ρ e φ porque não há nenhum termo misto $\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi}$. A forma de produto $v = u(\rho)\Phi(\varphi)$ em

$$\frac{\rho^2}{u(\rho)} \left(\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \gamma^2 u \right) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2,$$

em que a **constante de separação** m^2 **deve ser um inteiro**, porque a solução angular $\Phi = e^{im\varphi}$ da EDO

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

deve ser periódica no ângulo azimutal.

Isso nos deixa com a EDO radial

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) u = 0.$$

Argumentos dimensionais sugerem elevar $\rho \rightarrow r = \gamma\rho$ e dividir por γ^2 , o que resulta em

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(1 - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0.$$

Essa é a EDO de Bessel para $\nu = m$. Usamos a solução regular $J_m(\gamma\rho)$ porque a segunda solução independente (irregular) é singular na origem, o que é inaceitável aqui. A solução completa é

$$E_z = J_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} (A \sin kz + B \cos kz), \quad (11.40a)$$

em que a constante γ é determinada pela **condição de contorno** $E_z = 0$ sobre a superfície da cavidade $\rho = a$, isto é, que γa seja uma raiz da função de Bessel J_m (veja a Tabela 11.1). Isso dá um conjunto discreto de valores $\gamma = \gamma_{mn}$, em que n designa a n -ésima raiz de J_m (veja a Tabela 11.1).

Para o modo de oscilação transversal magnético, ou TM, com $H_z = 0$, as equações de Maxwell estão implícitas. (Mais uma vez, consulte *Resonant Cavities* em *Electrodynamics* de J. D. Jackson, em Leituras Adicionais.)

$$\mathbf{E}_\perp \sim \nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

A forma desse resultado sugere $E_z \sim \cos kz$, isto é, estabelecer $A = 0$, de modo que $\mathbf{E}_\perp \sim \sin kz = 0$ em $z = 0, l$ possa ser satisfeita por

$$k = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (11.41)$$

Assim, os campos elétricos **tangenciais** E_ρ e E_φ desaparecem em $z = 0$ e l . Em outras palavras, $A = 0$ corresponde às $dE_z/dz = 0$ em $z = 0$ e $z = l$ para o modo TM. Então, no total, temos

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{l^2}, \quad (11.42)$$

com

$$\gamma = \gamma_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \quad (11.43)$$

em que α_{mn} é o enésimo zero de J_m . Agora, a solução geral

$$E_z = \sum_{m,n,p} J_m(\gamma_{mn}\rho) e^{\pm im\varphi} B_{mnp} \cos \frac{p\pi z}{l}, \quad (11.40b)$$

com constantes B_{mnp} , resulta do princípio da superposição.

O resultado das duas condições de contorno e da constante de separação m^2 é que a frequência angular de nossa oscilação depende de três parâmetros discretos:

$$\omega_{mnp} = c\sqrt{\frac{\alpha_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, 3, \dots, \\ p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11.44)$$

Essas são as frequências ressonantes permissíveis para nosso modo TM. O modo TE (transversal elétrico) de oscilação é o tópico do Exercício 11.1.26. ■

Abordagens Alternativas

As funções de Bessel são introduzidas aqui por meio de uma função geradora, Equação (11.2). Há outras abordagens possíveis. Uma listagem das várias possibilidades apresenta:

1. Função geradora (mágica), Equação (11.2).
2. Solução de série de equação diferencial de Bessel, Seção 9.5.
3. Integrais de contorno: alguns autores preferem começar com definições de integral de contorno das funções de Hankel, Seções 7.3 e 11.4, e desenvolver a função de Bessel $J_\nu(x)$ a partir das funções de Hankel.
4. Solução direta de problemas físicos: o Exemplo 11.1.1, difração de Fraunhofer com uma abertura circular ilustra isso. A propósito, a Equação (11.31) pode ser tratada por expansão de série, se quisermos. Feynman¹⁰ desenvolve funções de Bessel a partir de uma consideração de ressonante de cavidade.

Caso a função geradora pareça muito arbitrária, ela pode ser derivada de uma integral de contorno (Exercício 11.1.16) ou das relações de recorrência da função de Bessel (Exercício 11.1.6). Note que a integral de contorno não é limitada ao inteiro ν , o que nos dá um ponto de partida para desenvolver as funções de Bessel.

Funções de Bessel de Ordem Não-Inteira

Essas diferentes abordagens não são exatamente equivalentes. A abordagem da função geradora é muito conveniente para derivar duas relações de recorrência, equação diferencial de Bessel, representações integrais, teoremas da adição (Exercício 11.1.2) e limites superiores e inferiores (Exercício 11.1.1). Contudo, é provável que você já tenha notado que a função geradora definiu apenas funções de Bessel de ordem inteira, J_0, J_1, J_2 , e assim por diante. Essa é uma limitação da abordagem da função geradora que pode ser evitada usando, em vez dela, a integral de contorno do Exercício 11.1.16, o que leva à abordagem precedente (3). Mas a função de Bessel da primeira espécie, $J_\nu(x)$, pode facilmente ser definida para ν não-inteiro usando a série (Equação (11.5)) como uma nova definição.

As relações de recorrência podem ser verificadas por substituição na forma de série de $J_\nu(x)$ (Exercício 11.1.7). A equação de Bessel resulta dessas relações. De fato, se ν não for um inteiro, na verdade há uma importante simplificação. Constata-se que J_ν e $J_{-\nu}$ são independentes, porque não existe nenhuma relação da forma da Equação (11.8). Por outro lado, para $\nu = n$, inteiro, precisamos de uma outra solução. O desenvolvimento dessa segunda solução e uma investigação de suas propriedades são o assunto da Seção 11.3.

¹⁰R. P. Feynman, R. B. Leighton, e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II. Reading, MA: Addison-Wesley (1964), Chapter 23.

Exercícios

11.1.1 Pelo produto das funções geradoras $g(x, t) \cdot g(x, -t)$, mostre que

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \dots$$

e, portanto, que $|J_0(x)| \leq 1$ e $|J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Sugestão: Use unicidade de séries de potências, Seção 5.7.

11.1.2 Usando uma função geradora $g(x, t) = g(u + v, t) = g(u, t) \cdot g(v, t)$, mostre que

$$(a) \quad J_n(u + v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) \cdot J_{n-s}(v),$$

$$(b) \quad J_0(u + v) = J_0(u)J_0(v) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(u)J_{-s}(v).$$

Esses são teoremas da adição para as funções de Bessel.

11.1.3 Usando somente a função geradora

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

e não a forma explícita de série de $J_n(x)$, mostre que $J_n(x)$ tem paridade ímpar ou par conforme n for ímpar ou par, isto é,¹¹

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x).$$

11.1.4 Derive a expansão de Jacobi-Anger

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}.$$

Essa é uma expansão de uma onda plana em uma série de ondas cilíndricas.

11.1.5 Mostre que

$$(a) \quad \cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x),$$

$$(b) \quad \sin x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x).$$

11.1.6 Para ajudar a tirar a função geradora do reino da magia, mostre que ela pode ser derivada da relação de recorrência, Equação (11.10).

Sugestão:

(a) Admita uma função geradora da forma

$$g(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m.$$

(b) Multiplique a Equação (11.10) por t^n e some sobre n .

(c) Reescreva o resultado anterior como

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)g(x, t) = \frac{2t}{x} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}.$$

(d) Integre e ajusta a “constante” de integração (uma função de x), de modo que o coeficiente da potência de ordem zero, t^0 , é $J_0(x)$, como fornecido pela Equação (11.5).

¹¹ Isso é visto com facilidade pela forma de série da Equação (11.5).

11.1.7 Mostre, por diferenciação direta, que

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$$

satisfaz as duas relações de recorrência

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_\nu(x), \end{aligned}$$

e a equação diferencial de Bessel

$$x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0.$$

11.1.8 Prove que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x \cos \theta) \cos \theta \, d\theta, \quad \frac{1 - \cos x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \theta) \, d\theta.$$

Sugestão: A integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \theta \, d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}$$

pode ser útil.

11.1.9 Mostre que

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Essa integral é uma transformada de Fourier de co-seno (compare com a Seção 15.3). A correspondente transformada de Fourier de seno,

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{\sqrt{t^2-1}} dt,$$

é estabelecida na Seção 11.4 (Exercício 11.4.6) usando uma representação integral de função de Hankel.

11.1.10 Derive

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n J_0(x).$$

Sugestão: Tente indução matemática.

11.1.11 Mostre que, entre quaisquer dois zeros consecutivos de $J_n(x)$, há um, e somente um, zero de $J_{n+1}(x)$.

Sugestão: As Equações (11.15) e (11.17) podem ser úteis.

11.1.12 Uma análise de padrões de radiação de antena para um sistema com uma abertura circular envolve a equação

$$g(u) = \int_0^1 f(r) J_0(ur) r \, dr.$$

Se $f(r) = 1 - r^2$, mostre que

$$g(u) = \frac{2}{u^2} J_2(u).$$

11.1.13 A seção de choque diferencial em um experimento de espalhamento nuclear é dada por $d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2$. Um tratamento aproximado leva a

$$f(\theta) = \frac{-ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp[ik\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi] \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Aqui, θ é um ângulo pelo qual a partícula dispersa é espalhada. R é o raio nuclear. Mostre que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\pi R^2)^2 \frac{1}{\pi} \left[\frac{J_1(kR \operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right]^2.$$