9.8 EDP de Fluxo de Calor ou de Difusão

Agora voltamos para uma EDP especial para desenvolver métodos razoavelmente gerais para adaptar uma solução especial de uma EDP a condições de contorno, introduzindo parâmetros que também se aplicam a outras EDPs de segunda ordem com coeficientes constantes. Até certo ponto, eles são complementares ao método básico de separação já estudado para achar soluções de um modo sistemático.

Selecionamos a EDP completa de difusão dependente de tempo como um meio isotrópico. Admitimos que a isotropia não é grande coisa em matéria de restrição porque, no caso de termos diferentes taxas (constantes) de difusão em diferentes direções (por exemplo, na madeira), nossa EDP de fluxo de calor toma a forma

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{9.219}$$

se colocarmos os eixos coordenados ao longo das principais direções de anisotropia. Agora, simplesmente elevamos as coordenadas usando as substituições $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$ para recuperar a forma isotrópica original da Equação (9.219),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2} \tag{9.220}$$

para a função de distribuição de temperatura $\Phi(\xi,\eta,\zeta,t) = \psi(x,y,z,t)$.

Por simplicidade, em primeiro lugar resolvemos a EDP dependente de tempo para um meio unidimensional homogêneo, um longo bastão de metal na direção x, digamos,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{9.221}$$

em que a constante mede a difusividade ou condutividade de calor, y, do meio. Tentamos resolver essa EDP linear com coeficientes constantes com o relevante **Ansatz do produto exponencial** $\psi = e^{\alpha x}\cdot e^{\beta t}$, que, quando substituído na Equação (9.221), resolve a EDP com a restrição $\beta = a^2\alpha^2$ para os parâmetros. Buscamos soluções que se degradam exponencialmente para tempos grandes, isto é, soluções com valores β negativos e, por conseguinte, estabelecemos $\alpha = i\omega$, $\alpha^2 = -\omega^2$ para ω real, e temos

$$\psi(x,t) = e^{i\omega x}e^{-\omega^2a^2t} = (\cos\omega x + i\,\mathrm{sen}\,\omega x)e^{-\omega^2a^2t}.$$

Formando combinações lineares reais, obtemos a solução

$$\psi(\mathbf{x},t) = (A\cos\omega x + B\,\mathrm{sen}\,\omega x)e^{-\omega^2a^2t},$$

para qualquer escolha de A, B, ω, que são introduzidos para satisfazer condições de contorno. Fazendo o somatório sobre múltiplos $n\omega$ da freqüência básica para condições periódicas de contorno ou **integrando sobre o parâmetro** ω para condições gerais de contorno (não-periódicas), encontramos uma solução,

$$\psi(x,t) = \int\big[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\mathrm{sen}\,\omega x\big]e^{-a^2\omega^2t}\,d\omega, \tag{9.222}$$

que é suficientemente geral para ser adaptada a condições de contorno em, digamos, $t = 0$. Quando a condição de contorno dá uma temperatura não-zero ψ_0, como acontece para nosso bastão, então o método do somatório se aplica (expansão de Fourier da condição de contorno). Se o espaço for irrestrito (como no caso de um bastão de extensão infinita), a integral de Fourier se aplica.

- Esse somatório ou integração sobre parâmetros é um dos métodos padrões para generalizar soluções de EDPs específicas de modo a adaptá-las às condições de contorno.

Exemplo 9.8.1 Uma Condição de Contorno Específica

Vamos resolver explicitamente um caso unidimensional em que a temperatura no tempo $t = 0$ é $\psi_0(x) = 1 =$ constante no intervalo entre $x = +1$ e $x = -1$ e zero para $x > 1$ e $x < 1$. Nas extremidade, $x = \pm 1$, a temperatura é sempre mantida em zero.

Para um intervalo finito escolhemos as soluções espaciais $\cos(l\pi x/2)$ da Equação (9.221) para l inteiro, porque elas desaparecem em $x = \pm 1$. Assim, em $t = 0$, nossa solução é uma série de Fourier,

$$\psi(x,0) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l\cos\frac{\pi l x}{2} = 1, \quad -1 < x < 1$$

com coeficientes (veja a Seção 14.1.)

$$\begin{aligned} a_l &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot \cos\frac{\pi l x}{2} = \frac{2}{l\pi}\mathrm{sen}\frac{\pi l x}{2}\bigg|_{x=-1}^{1} \\ &= \frac{4}{\pi l}\mathrm{sen}\frac{l\pi}{2} = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi}, \qquad l = 2m+1; \\ a_l &= 0, \qquad l = 2m. \end{aligned}$$

Incluindo sua dependência do tempo, a solução completa é dada pela série

$$\psi(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\left[(2m+1)\frac{\pi x}{2}\right]e^{-t((2m+1)\pi a/2)^2}, \tag{9.223}$$

que converge absolutamente para $t > 0$, mas apenas condicionalmente em $t = 0$, como resultado da descontinuidade em $x = \pm 1$.

Sem a restrição à temperatura zero nas extremidades do intervalo finito dado, a série de Fourier é substituída por uma integral de Fourier. Nesse caso, a solução geral é dada pela Equação (9.222). Em $t = 0$, a distribuição de temperatura dada $\psi_0 = 1$ dá os coeficientes como (veja a Seção 15.3)

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega x\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{sen}\omega x}{\omega}\bigg|_{x=-1}^{1} = \frac{2\mathrm{sen}\omega}{\pi\omega}, \qquad B(\omega) = 0.$$

Por conseguinte,

$$\psi(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\omega}{\omega}\cos(\omega x)e^{-a^2\omega^2 t}\, d\omega. \tag{9.224}$$

■

Em **três dimensões** o correspondente Ansatz exponencial $\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a+\beta t}$ leva a uma solução com a relação $\beta = -\mathbf{k}^2 = -k^2$ para seu parâmetro, e a forma tridimensional da Equação (9.221) se torna

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0, \tag{9.225}$$

que é a equação de **Helmholtz**, a qual pode ser resolvida pelo método de separação exatamente como antes a equação de Laplace em coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas, sob condições de contorno adequadamente generalizadas.

Em coordenadas cartesianas, com o Ansatz do produto da Equação (9.35), as EDOs separadas de x e y da Equação (9.221) são as mesmas que as Equações (9.38) e (9.41), enquanto a EDO de z, Equação (9.42), generaliza para

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = n^2 > 0, \tag{9.226}$$

em que introduzimos uma outra constante de separação n^2, restringida por

$$k^2 = l^2 + m^2 - n^2\,, \tag{9.227}$$

para produzir um conjunto simétrico de equações. Agora, nossa solução da equação de Helmholtz, Equação (9.225) é rotulada de acordo com a escolha de todas as três constantes de separação l, m, n sujeita à restrição da Equação (9.227). Como antes, a EDO em z, Equação (9.226), dá como resultado soluções $\sim e^{-nz}$ que decaem exponencialmente. A condição de contorno em $z = 0$ fixa os coeficientes de expansão a_{lm}, como na Equação (9.44).

Agora, em coordenadas cilíndricas, usamos a constante de separação l^2 para a EDO em z, tendo em mente uma solução que decai exponencialmente,

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = l^2 Z > 0, \tag{9.228}$$

portanto, $Z \sim e^{-lz}$, porque a temperatura cai a zero em z grande. Se estabelecermos $k^2 + l^2 = n^2$, as Equações (9.53) e (9.54) continuam as mesmas, portanto acabamos com a mesma expansão de Fourier-Bessel, Equação (9.56), como antes.

Em coordenadas esféricas com condições de contorno radiais, o método de separação leva às mesmas EDOs angulares das Equações (9.61) e (9.64), e a EDO radial agora se torna

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2R - \frac{QR}{r^2} = 0, \qquad Q = l(l+1), \tag{9.229}$$

isto é, da Equação (9.65), cujas soluções são as funções esféricas de Bessel da Seção 11.7. Elas estão relacionadas na Tabela 9.2.

A restrição de que k^2 seja uma constante é desnecessariamente severa. O processo de separação ainda funcionará com EDP de Helmholtz para k^2 tão geral quanto

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}h(\varphi) + k'^2. \tag{9.230}$$

No átomo de hidrogênio temos $k^2 = f(r)$ na equação de onda de Schrödinger, e isso leva a uma solução de forma fechada que envolve polinômios de Laguerre.

Soluções Alternativas

Em uma nova abordagem da EDP de fluxo de calor sugerida por experimentos, voltamos agora à EDP unidimensional, Equação (9.221), em busca de soluções de uma nova forma funcional $\psi(x,t) = u(x/\sqrt{t})$, que é sugerida pelo Exemplo 15.1.1. Substituindo $u(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$, na Equação (9.221), usando

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{u'}{\sqrt{t}}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{u''}{t}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{x}{2\sqrt{t^3}}u' \tag{9.231}$$

com a notação $u'(\xi) \equiv \frac{du}{d\xi}$, a EDP é reduzida à EDO

$$2a^2u''(\xi) + \xi u'(\xi) = 0. \tag{9.232}$$

Escrevendo essa EDO como

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{\xi}{2a^2},$$

podemos integrá-la uma vez para obter $\ln u' = -\frac{\xi^2}{4a^2} + \ln C_1$, com uma constante de integração C_1. Exponenciando e integrando novamente, encontramos a solução

$$u(\xi) = C_1\int_0^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}\,d\xi + C_2, \tag{9.233}$$

que envolve duas constantes de integração C_i. A normalização dessa solução no tempo $t = 0$ e temperatura $+1$ para $x > 0$ e -1 para $x < 0$, nossas condições de contorno, fixa as constantes C_i; portanto,

$$\psi = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}\,d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2}\,dv = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{9.234}$$

em que Φ denota a função erro de Gauss (veja o Exercício 5.10.4). Para uma derivação usando a transformada de Fourier, veja o Exemplo 15.1.1. Precisamos generalizar essa solução específica para adaptá-la às condições de contorno.

Com essa finalidade, agora geramos **novas soluções da EDP com coeficientes constantes diferenciando uma solução especial**, Equação (9.234). Em outras palavras, se $\psi(x,t)$ resolve a EDP na Equação (9.221), $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ e $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ também resolvem, porque essas derivadas e as diferenciações da EDP comutam; isto é, a ordem na qual elas são efetuadas não importa. Observe com cuidado que esse método deixa de funcionar se qualquer coeficiente da EDP depender explicitamente de t ou x. Todavia, EDPs com coeficientes constantes são presença dominante na Física. Alguns exemplos são as equações de movimento de Newton (EDOs) na Mecânica Clássica, as equações de onda da Eletrodinâmica e as equações de Poisson e Laplace da Eletrostática e da Gravidade. Mesmo as equações de campo não-lineares da Relatividade Geral de Einstein assumem essa forma especial em coordenadas geodésicas locais.

Portanto, diferenciando a Equação (9.234) em relação a x, encontramos a solução mais simples, mais básica,

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, \tag{9.235}$$

e, repetindo o processo, uma outra solução básica,

$$\psi_2(x,t) = \frac{x}{2a^3\sqrt{t^3\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{9.236}$$

Mais uma vez, essas soluções têm de ser generalizadas para adaptá-las a condições de contorno. E há ainda um outro método de gerar novas soluções de uma EDP com coeficientes constantes: podemos **transpor** uma dada solução, por exemplo, $\psi_1(x,t) \to \psi_1(x-\alpha,t)$, e então **integrá-la sobre o parâmetro de translação** α. Por conseguinte,

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}}\, d\alpha \tag{9.237}$$

é novamente uma solução que reescrevemos usando a substituição

$$\xi = \frac{x-\alpha}{2a\sqrt{t}}, \qquad \alpha = x - 2a\xi\sqrt{t}, \qquad d\alpha = -2a\, d\xi\, \sqrt{t}. \tag{9.238}$$

Assim, constatamos que

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(x - 2a\xi\sqrt{t}) e^{-\xi^2}\, d\xi \tag{9.239}$$

é uma solução de nossa EDP. Sob essa forma, reconhecemos a significância da função peso $C(x)$ do método de translação porque, em $t=0$, $\psi(x,0) = C(x) = \psi_0(x)$ é determinada pela condição de contorno, e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$. Por conseguinte, também podemos escrever a solução como

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x - 2a\xi\sqrt{t}) e^{-\xi^2}\, d\xi, \tag{9.240}$$

demonstrando explicitamente o papel da condição de contorno. Pela Equação (9.240), vemos que a distribuição inicial de temperatura, $\psi_0(x)$, se expande com o tempo e é atenuada pela função peso de Gauss.

Exemplo 9.8.2 Novamente a Condição de Contorno Especial

Vamos expressar a solução do Exemplo 9.8.1 em termos da solução de função erro da Equação (9.234). A condição de contorno em $t = 0$ é $\psi_0(x) = 1$ para $-1 < x < 1$ e zero para $|x| > 1$. Pela Equação (9.240), achamos os limites sobre a variável de integração ξ estabelecendo $x - 2a\xi\sqrt{t} = \pm 1$, o que dá como resultado as extremidades de integração $\xi = (\pm 1 + x)/2a\sqrt{t}$. Por conseguinte, nossa solução se torna

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Usando a função erro definida na Equação (9.234), também podemos escrever essa solução da seguinte maneira:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{9.241}$$

Comparando essa forma de nossa solução com a do Exemplo 9.8.1, vemos que podemos expressar a Equação (9.241) como a integral de Fourier do Exemplo 9.8.1, uma identidade que dá a integral de Fourier integral, Equação (9.224), em forma fechada da função erro tabulada.

■

Por fim, consideramos o caso do fluxo de calor para um meio **esfericamente simétrico** estendido, com centro na origem, o que prescreve coordenadas polares r, θ, φ. Esperamos uma solução da forma $\psi(\mathbf{r}, t) = u(r, t)$. Usando a Equação (2.48), encontramos a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{9.242}$$

que transformamos na EDP de fluxo de calor unidimensional pela substituição

$$u = \frac{v(r,t)}{r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r^3}. \tag{9.243}$$

Essa expressão resulta na EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \tag{9.244}$$

Exemplo 9.8.3 FLUXO DE CALOR ESFERICAMENTE SIMÉTRICO

Vamos aplicar a EDP de fluxo de calor unidimensional com a solução da Equação (9.234) a um fluxo de calor esfericamente simétrico sob condições de fronteira razoavelmente comuns, em que x é liberado pela variável radial. Inicialmente, temos temperatura zero em todos os lugares. Então, no tempo $t = 0$, uma quantidade finita de energia térmica Q é liberada na origem, espalhando-se uniformemente em todas as direções. Qual é a distribuição de temperatura espacial e temporal?

Inspecionando nossa solução especial na Equação (9.236), vemos que, para $t \to 0$, a temperatura

$$\frac{v(r,t)}{r} = \frac{C}{\sqrt{t^3}}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \tag{9.245}$$

vai a zero para todo $r \neq 0$, portanto a temperatura inicial zero está garantida. À medida que $t \to \infty$, a temperatura $v/r \to 0$ para todo r, incluindo a origem, o que está implícito em nossas condições de contorno. A constante C pode ser determinada por conservação de energia, o que dá a restrição

$$Q = \sigma\rho\int\frac{v}{r}d^3r = \frac{4\pi\sigma\rho C}{\sqrt{t^3}}\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\,dr = 8\sqrt{\pi^3}\,\sigma\rho a^3 C, \tag{9.246}$$

em que ρ é a densidade constante do meio e σ é seu calor específico. Aqui, elevamos novamente a variável de integração e integramos por partes para obter

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}r^2\,dr = (2a\sqrt{t})^3\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^2\,d\xi,$$
$$\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^2\,d\xi = -\frac{\xi}{2}e^{-\xi^2}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

A temperatura, como dada pela Equação (9.245) a qualquer instante, que está em t, é uma distribuição gaussiana que se achata à medida que o tempo aumenta, porque sua largura é proporcional a $\sqrt{t}$. Por ser uma função do tempo, a temperatura é proporcional a $t^{-3/2}e^{-T/t}$, com $T \equiv r^2/4a^2$, que se eleva de zero até um máximo e então volta a cair para zero para tempos grandes. Para achar o máximo, estabelecemos

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-3/2}e^{-T/t}\right) = t^{-5/2}e^{-T/t}\left(\frac{T}{t} - \frac{3}{2}\right) = 0, \tag{9.247}$$

pela qual encontramos $t = 2T/3$.

■

No caso de **simetria cilíndrica** (no plano $z = 0$ em coordenadas polares planas $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi$) procuramos uma temperatura $\psi = u(\rho, t)$ que então satisfaça a EDO (usando a Equação (2.35) na equação de difusão)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right), \tag{9.248}$$

que é a planar análoga da Equação (9.244). Essa EDO também tem soluções com a dependência funcional $\rho/\sqrt{t} \equiv r$. Por substituição,

$$u = v\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\rho v'}{2t^{3/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{v'}{\sqrt{t}}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{v'}{t}, \tag{9.249}$$

na Equação (9.248) com a notação $v' \equiv \frac{dv}{dr}$, encontramos a EDO

$$a^2 v'' + \left(\frac{a^2}{r} + \frac{r}{2}\right)v' = 0. \tag{9.250}$$

Essa é uma EDO de primeira ordem para v', que podemos integrar quando separamos as variáveis v e r como

$$\frac{v''}{v'} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2a^2}\right). \tag{9.251}$$

Isso resulta em

$$v(r) = \frac{C}{r}e^{-\frac{r^2}{4a^2}} = C\frac{\sqrt{t}}{\rho}e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}}. \tag{9.252}$$

Essa solução especial para simetria cilíndrica pode ser generalizada e adaptada de modo semelhante a condições de contorno, como o caso esférico. Por fim, a dependência z pode ser fatorada porque z separa da variável radial polar plana ρ.

Resumindo, EDPs podem ser resolvidas com condições iniciais, exatamente como EDOs ou com condições de contorno que prescrevem o valor da solução ou sua derivada em superfícies, curvas ou pontos de contorno. Quando a solução é prescrita sobre o contorno, a EDP é denominada problema de **Dirichlet**; *se a derivada normal da solução é prescrita sobre o contorno, a EDP é denominada problema de* **Neumann**.

Quando a temperatura inicial é prescrita para uma equação de calor unidimensional ou tridimensional (com simetria esférica ou cilíndrica), ela se torna uma função peso da solução, em termos de uma integral sobre a solução gaussiana genérica. A equação de calor tridimensional, com condições de fronteira esféricas ou cilíndricas, é resolvida por separação das variáveis, o que leva a autofunções em cada variável separada e a autovalores como constantes de separação. Para intervalos de contorno finitos em cada coordenada espacial, a soma sobre constantes de separação leva a uma solução de série de Fourier, enquanto condições de contorno infinitas levam a uma solução de integral de Fourier. O método de separação de variáveis tenta resolver uma EDP escrevendo a solução como um produto de funções de uma variável cada. As condições gerais para que o método de separação funcione são fornecidas pelas propriedades de simetria da EDP, à qual se aplica a teoria de grupo contínuo.

Leituras Adicionais

Bateman, H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 1ª. ed. (1932). Grande número de aplicações de várias equações diferenciais parciais em física clássica. Excelentes exemplos da utilização de diferentes sistemas coordenados — coordenadas elipsoidais, parabolóides, toroidais, e assim por diante.

Cohen, H., *Mathematics for Scientists and Engineers*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1992).

Courant, R., e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1 (edição em inglês). Nova York: Interscience (1953), Wiley (1989). Esta é uma das obras clássicas da Física Matemática. Publicada pela primeira vez na Alemanha, em 1924, a edição revisada em inglês é uma excelente referência para um tratamento rigoroso de funções de Green e para uma ampla variedade de outros tópicos de Física Matemática.

Davis, P. J., e P. Rabinowitz, *Numerical Integration*. Waltham, MA: Blaisdell (1967). Esse livro abrange grande quantidade de material sob a forma de fácil leitura. O Apêndice 1 (*On the Practical Evaluation of Integrals*, por M. Abramowitz) é excelente como visão global.

Garcia, A. L., *Numerical Methods for Physics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1994).

Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2ª ed. Nova York: McGraw-Hill (1973), nova tiragem, Dover (1987). Esse texto bem escrito discute uma ampla variedade de métodos numéricos para zeros de funções para a transformada rápida de Fourier. Todos os tópicos são selecionados e desenvolvidos tendo em mente um computador moderno.

Hubbard, J., e B. H. West, *Differential Equations*. Berlim: Springer (1995).