

Exercício

15.7.1 Derive a convolução

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(t - \tau) d\tau.$$

15.8 Transformadas de Laplace

Definição

A transformada de Laplace $f(s)$ ou \mathcal{L} de uma função $F(t)$ é definida por¹¹

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad (15.99)$$

Aqui cabem alguns comentários sobre a existência da integral. A integral infinita de $F(t)$,

$$\int_0^{\infty} F(t) dt,$$

não precisa existir. Por exemplo, $F(t)$ pode divergir exponencialmente para t grande. Contudo, se houver alguma constante s_0 , tal que

$$|e^{-s_0 t} F(t)| \leq M, \quad (15.100)$$

uma constante positiva para t suficientemente grande, $t > t_0$, a transformada de Laplace (Equação (15.99)) existirá para $s > s_0$; diz-se que $F(t)$ é de *ordem exponencial*. Como contra-exemplo, $F(t) = e^{t^2}$ não satisfaz a condição dada pela Equação (15.100) e **não** é de ordem exponencial. $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ **não** existe.

A transformada de Laplace também pode deixar de existir por causa de uma singularidade suficientemente forte na função $F(t)$ quando $t \rightarrow 0$, isto é,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

diverge na origem para $n \leq -1$. A transformada de Laplace $\mathcal{L}\{t^n\}$ não existe para $n \leq -1$.

Uma vez que, para duas funções $F(t)$ e $G(t)$, para as quais existem as integrais,

$$\mathcal{L}\{aF(t) + bG(t)\} = a\mathcal{L}\{F(t)\} + b\mathcal{L}\{G(t)\}, \quad (15.101)$$

a operação denotada por \mathcal{L} é **linear**.

Funções Elementares

Para apresentar a transformada de Laplace, vamos aplicar a operação a algumas das funções elementares. Em todos os casos, admitimos que $F(t) = 0$, para $t < 0$. Se

$$F(t) = 1, \quad t > 0,$$

então,

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0. \quad (15.102)$$

Mais uma vez, seja

$$F(t) = e^{kt}, \quad t > 0.$$

A transformada de Laplace se torna

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \frac{1}{s - k}, \quad \text{para } s > k. \quad (15.103)$$

Usando essa relação, obtemos a transformada de Laplace de certas outras funções. Visto que

$$\cosh kt = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}), \quad \sinh kt = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt}), \quad (15.104)$$

¹¹Isso às vezes é denominado **transformada unilateral de Laplace**; a integral de $-\infty$ to $+\infty$ é denominada **transformada bilateral de Laplace**. Alguns autores introduzem um fator adicional s . Esse s extra parece ter pouca vantagem e está sempre atrapalhando (compare com Jeffreys e Jeffreys, Seção 14.13; para comentários adicionais, veja as Leituras Adicionais). Em geral consideramos s real e positivo. É possível ter s complexo, contanto que $\Re(s) > 0$.

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh kt\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right) = \frac{s}{s^2 - k^2}, \\ \mathcal{L}\{\sinh kt\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k} \right) = \frac{k}{s^2 - k^2},\end{aligned}\tag{15.105}$$

ambas válidas para $s > k$. Temos as relações

$$\cos kt = \cosh ikt, \quad \sin kt = -i \sinh ikt.\tag{15.106}$$

Usando as Equações (15.105) com k no lugar de ik , constatamos que as transformadas de Laplace são

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos kt\} &= \frac{s}{s^2 + k^2}, \\ \mathcal{L}\{\sin kt\} &= \frac{k}{s^2 + k^2},\end{aligned}\tag{15.107}$$

ambas válidas para $s > 0$. Uma outra derivação dessa última transformada é dada na seção seguinte. Note que $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\sin kt\} = 1/k$. A transformada de Laplace atribui um valor $1/k$ para $\int_0^\infty \sin kt \, dt$.

Por fim, para $F(t) = t^n$, temos

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt,$$

que é exatamente a função fatorial. Daí

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n > -1.\tag{15.108}$$

Note que em todas essas transformadas temos a variável s no denominador — potências negativas de s . Em particular, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$. A significância desse ponto é que, se $f(s)$ envolver potências positivas de s ($\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) \rightarrow \infty$), então não existe nenhuma transformada inversa.

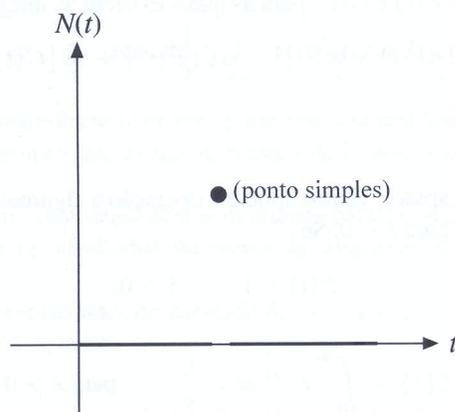


Figura 15.7: Uma possível função nula.

Transformada Inversa

Essas operações têm pouca importância, a menos que possamos efetuar a transformada inversa, como nas transformadas de Fourier. Isto é,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s),$$

então,

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t).\tag{15.109}$$

Essa transformada inversa **não** é única. Duas funções $F_1(t)$ e $F_2(t)$ podem ter a mesma transformada, $f(s)$. Contudo, nesse caso,

$$F_1(t) - F_2(t) = N(t),$$

em que $N(t)$ é uma função nula (Figura 15.7), indicando que

$$\int_0^{t_0} N(t) dt = 0,$$

para todo t_0 . Esse resultado é conhecido como **teorema de Lerch**. Portanto, para o físico e o engenheiro, $N(t)$ quase sempre pode ser considerada zero, e a operação inversa se torna única.

A transformada inversa pode ser determinada de várias maneiras. (1) Pode-se montar uma tabela de transformadas e usá-la para efetuar a transformação inversa, exatamente como uma tabela de logaritmos pode ser usada para consultar antilogaritmos. As transformadas precedentes constituem o início de tal tabela. Se quiser um conjunto mais completo de transformadas de Laplace, veja a Tabela 15.2 (adiante) ou AMS-55, Capítulo 29 (a referência completa é dada na nota de rodapé 4 no Capítulo 5). Empregar expansões por frações parciais e vários teoremas operacionais, que são considerados em seções subsequentes, facilita a utilização das tabelas.

- Existe uma certa justificativa para suspeitar que essas tabelas têm mais valor para resolver exercícios propostos em livros didáticos do que para resolver problemas do mundo real.
- Uma técnica geral para \mathcal{L}^{-1} será desenvolvida na Seção 15.12 usando o cálculo de resíduos.
- Para as dificuldades e possibilidades de uma abordagem numérica — inversão numérica —, referimo-nos às Leituras Adicionais.

Expansão por Frações Parciais

A utilização de uma tabela de transformadas (ou transformadas inversas) é facilitada pela expansão de $f(s)$ em **frações parciais**.

Nossa transformada $f(s)$ muitas vezes ocorre na forma $g(s)/h(s)$, em que $g(s)$ e $h(s)$ são polinomiais sem nenhum fator comum, sendo $g(s)$ de grau mais baixo do que $h(s)$. Se os fatores de $h(s)$ forem todos lineares e distintos, então, pelo método das frações parciais, podemos escrever

$$f(s) = \frac{c_1}{s - a_1} + \frac{c_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - a_n}, \quad (15.110)$$

em que os c_i são independentes de s . Os a_i são as raízes de $h(s)$. Se qualquer uma das raízes, por exemplo, a_1 , múltipla (ocorrendo m vezes), então $f(s)$ tem a forma

$$f(s) = \frac{c_{1,m}}{(s - a_1)^m} + \frac{c_{1,m-1}}{(s - a_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{s - a_1} + \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{s - a_i}. \quad (15.111)$$

Por fim, se um dos fatores for quadrático, $(s^2 + ps + q)$, então o numerador, em vez de ser uma simples constante, terá a forma

$$\frac{as + b}{s^2 + ps + q}.$$

Há várias maneiras de determinar as constantes introduzidas. Por exemplo, na Equação (15.110) podemos multiplicar tudo por $(s - a_i)$ e obter

$$c_i = \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i) f(s). \quad (15.112)$$

Em casos elementares, uma solução direta costuma ser a mais fácil.

Exemplo 15.8.1 EXPANSÃO PARCIAL POR FRAÇÕES

Seja

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} = \frac{c}{s} + \frac{as + b}{s^2 + k^2}. \quad (15.113)$$

Colocando o lado direito da Equação sobre um denominador comum e igualando potências iguais de s no numerador, obtemos

$$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} = \frac{c(s^2 + k^2) + s(as + b)}{s(s^2 + k^2)}, \quad (15.114)$$

$$c + a = 0, \quad s^2; \quad b = 0, \quad s^1; \quad ck^2 = k^2, \quad s^0.$$

Resolvendo essas expressões ($s \neq 0$), temos

$$c = 1, \quad b = 0, \quad a = -1,$$

o que resulta em

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + k^2}, \quad (15.115)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = 1 - \cos kt \quad (15.116)$$

pelas Equações (15.102) e (15.106). ■

Exemplo 15.8.2 UMA FUNÇÃO DEGRAU

Como aplicação de transformadas de Laplace, considere a avaliação de

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{x} dx. \quad (15.117)$$

Suponha que consideramos a transformada de Laplace dessa integral definida (e imprópria):

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{x} dx\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{x} dx dt. \quad (15.118)$$

Agora, permutando a ordem de integração (o que é justificado),¹² obtemos

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen } tx dt \right] dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{s^2 + x^2}, \quad (15.119)$$

uma vez que o fator dentro das chaves é exatamente a transformada de Laplace de $\text{sen } tx$. Pelas tabelas de integrais,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{1}{s} \text{tg}^{-1}\left(\frac{x}{s}\right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2s} = f(s). \quad (15.120)$$

Pela Equação (15.102) efetuamos a transformação inversa para obter

$$F(t) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \quad (15.121)$$

de acordo com uma avaliação pelos cálculo de resíduos (Seção 7.1). Admitimos que $t > 0$ em $F(t)$. Para $F(-t)$, precisamos observar apenas que $\text{sen}(-tx) = -\text{sen } tx$, resultando em $F(-t) = -F(t)$. Por fim, se $t = 0$, $F(0)$ é claramente zero. Por conseguinte,

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{x} dx = \frac{\pi}{2} [2u(t) - 1] = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & t < 0. \end{cases} \quad (15.122)$$

Note que $\int_0^{\infty} (\text{sen } tx/x) dx$, considerada uma função de t , descreve uma função escalonada (Figura 15.8), um degrau de altura π em $t = 0$, o que é consistente com a Equação (1.174). ■

A técnica no exemplo precedente foi (1) introduzir uma segunda integração — a transformada de Laplace, (2) inverter a ordem de integração e (3) considerar a transformada inversa de Laplace. Há muitas oportunidades em que essa técnica de inverter a ordem de integração pode ser aplicada e já mostrou ser útil. O Exercício 15.8.6 é uma variação disso.

¹²Veja, em Leituras Adicionais, Jeffreys e Jeffreys (1966), Capítulo 1 (convergência uniforme de integrais).

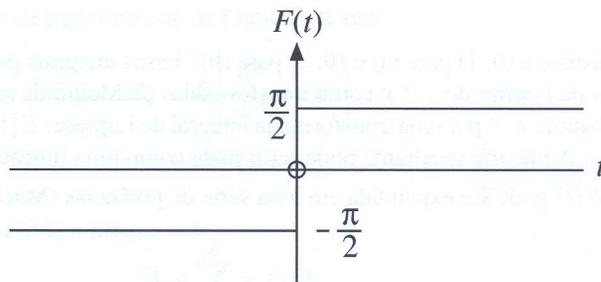


Figura 15.8: $F(t) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } tx}{x} dx$, uma função degrau.

Exercícios

15.8.1 Prove que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = \lim_{t \rightarrow +0} F(t).$$

Sugestão: Admita que $F(t)$ pode ser expressa como $F(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$.

15.8.2 Mostre que

$$\frac{1}{\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\cos xt\} = \delta(x).$$

15.8.3 Verifique que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}\right\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad a^2 \neq b^2.$$

15.8.4 Usando expansões por frações parciais, mostre que

$$(a) \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}, \quad a \neq b.$$

$$(b) \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}, \quad a \neq b.$$

15.8.5 Usando expansões por frações parciais, mostre que, para $a^2 \neq b^2$,

$$(a) \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right\} = -\frac{1}{a^2 - b^2} \left\{\frac{\text{sen } at}{a} - \frac{\text{sen } bt}{b}\right\},$$

$$(b) \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right\} = \frac{1}{a^2 - b^2} \{a \text{sen } at - b \text{sen } bt\}.$$

15.8.6 Sabe-se que o potencial eletrostático de um disco condutor carregado tem a forma geral (coordenadas cilíndricas circulares)

$$\Phi(\rho, z) = \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) f(k) dk,$$

sendo $f(k)$ desconhecida. Em grandes distâncias ($z \rightarrow \infty$), o potencial deve se aproximar do potencial de Coulomb $Q/4\pi\epsilon_0 z$. Mostre que

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}.$$

Sugestão: Você pode fazer $\rho = 0$ e admitir uma expansão de Maclaurin de $f(k)$ ou, usando e^{-kz} , construir uma seqüência delta.

15.8.7 Mostre que

$$(a) \quad \int_0^\infty \frac{\cos s}{s^\nu} ds = \frac{\pi}{2(\nu-1)! \cos(\nu\pi/2)}, \quad 0 < \nu < 1,$$

$$(b) \quad \int_0^\infty \frac{\text{sen } s}{s^\nu} ds = \frac{\pi}{2(\nu-1)! \text{sen}(\nu\pi/2)}, \quad 0 < \nu < 2,$$

Por que ν é restrito a $(0, 1)$ para (a) e $(0, 2)$ para (b)? Essas integrais podem ser interpretadas como transformadas de Fourier de $s^{-\nu}$ e como transformadas de Mellin de $\sin s$ e $\cos s$.

Sugestão: Substitua $s^{-\nu}$ por uma transformada integral de Laplace: $\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\}/(\nu-1)!$. Então integre em relação a s . A integral resultante pode ser tratada como uma função beta (Seção 8.4).

15.8.8 Uma função $F(t)$ pode ser expandida em uma série de potências (Maclaurin), isto é,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Então,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt.$$

Mostre que $f(s)$, a transformada de Laplace de $F(t)$, não contém nenhuma potência de s maior do que s^{-1} . Verifique seu resultado calculando $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$, o e comente.

15.8.9 Mostre que a transformada de Laplace de $M(a, c, x)$ é

$$\mathcal{L}\{M(a, c, x)\} = \frac{1}{s} {}_2F_1\left(a, 1; c; \frac{1}{s}\right).$$

15.9 Transformada de Laplace de Derivadas

Talvez a principal aplicação de transformadas de Laplace seja na conversão de equações diferenciais em formas mais simples que podem ser resolvidas com maior facilidade. Veremos, por exemplo, que equações diferenciais acopladas com coeficientes constantes se transformam em equações algébricas lineares simultâneas.

Vamos transformar a derivada de primeira ordem de $F(t)$:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} dt.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F'(t)\} &= e^{-st} F(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\ &= s \mathcal{L}\{F(t)\} - F(0). \end{aligned} \quad (15.123)$$

Em termos estritos, $F(0) = F(+0)$ ¹³ e dF/dt deve ser ao menos contínua parte por parte para $0 \leq t < \infty$. Naturalmente, ambas, $F(t)$ e sua derivada, devem ser tais que as integrais não diverjam. A propósito, a Equação (15.123) dá uma outra prova do Exercício 15.8.8. Uma extensão resulta em

$$\mathcal{L}\{F^{(2)}(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - sF(+0) - F'(+0), \quad (15.124)$$

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(+0) - \dots - F^{(n-1)}(+0). \quad (15.125)$$

A transformada de Laplace, assim como a transformada de Fourier, substitui diferenciação por multiplicação. Nos exemplos seguintes, EDOs se tornam equações algébricas. É aqui que está o poder e a utilidade da transformada de Laplace. Mas veja o Exemplo 15.10.3 para saber o que pode acontecer se os coeficientes não forem constantes.

Note como as condições iniciais, $F(+0)$, $F'(+0)$, e assim por diante, estão incorporadas na transformada. A Equação (15.124) pode ser usada para derivar $\mathcal{L}\{\sin kt\}$. Usamos a identidade

$$-k^2 \sin kt = \frac{d^2}{dt^2} \sin kt. \quad (15.126)$$

¹³A aproximação de zero é pelo lado positivo.

Então, aplicando a operação da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} -k^2 \mathcal{L}\{\text{sen } kt\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} \text{sen } kt\right\} \\ &= s^2 \mathcal{L}\{\text{sen } kt\} - s \text{sen}(0) - \left.\frac{d}{dt} \text{sen } kt\right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (15.127)$$

Uma vez que $\text{sen}(0) = 0$ e $d/dt \text{sen } kt|_{t=0} = k$,

$$\mathcal{L}\{\text{sen } kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad (15.128)$$

o que verifica a Equação (15.107).

Exemplo 15.9.1 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Como exemplo físico, considere uma massa m oscilando sob a influência de uma mola ideal, constante de mola k . Como sempre, desprezamos o atrito. Então, a segunda lei de Newton se torna

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + kX(t) = 0; \quad (15.129)$$

além disso, consideramos as condições ideais

$$X(0) = X_0, \quad X'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$m \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 X}{dt^2}\right\} + k \mathcal{L}\{X(t)\} = 0, \quad (15.130)$$

e, usando a Equação (15.124), essa expressão se torna

$$ms^2 x(s) - msX_0 + kx(s) = 0, \quad (15.131)$$

$$x(s) = X_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{com } \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}. \quad (15.132)$$

Pela Equação (15.107) vemos que essa é a transformada de $\cos \omega_0 t$, que resulta em

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t, \quad (15.133)$$

como esperado. ■

Exemplo 15.9.2 NUTAÇÃO DA TERRA

Um exemplo um pouco mais complicado é a nutação dos pólos da Terra (precessão livre de força). Se tratarmos a Terra como um esferóide (oblato) rígido, as equações de movimento de Euler se reduzem a

$$\frac{dX}{dt} = -aY, \quad \frac{dY}{dt} = +aX, \quad (15.134)$$

em que $a \equiv [(I_z - I_x)/I_z] \omega_z$, $X = \omega_x$, $Y = \omega_y$ com vetor de velocidade angular $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ (Figura 15.9), $I_z =$ momento de inércia em torno do eixo z e $I_y = I_x$ momento de inércia em torno do eixo x (ou y). O eixo z coincide com o eixo de simetria da Terra. A diferença entre o eixo de simetria e o eixo de rotação diária da Terra, ω , é de cerca de 15 metros, medida nos pólos. A transformação dessas equações diferenciais acopladas resulta em

$$sx(s) - X(0) = -ay(s), \quad sy(s) - Y(0) = ax(s). \quad (15.135)$$

Combinados para eliminar $y(s)$, temos

$$s^2 x(s) - sX(0) + aY(0) = -a^2 x(s),$$

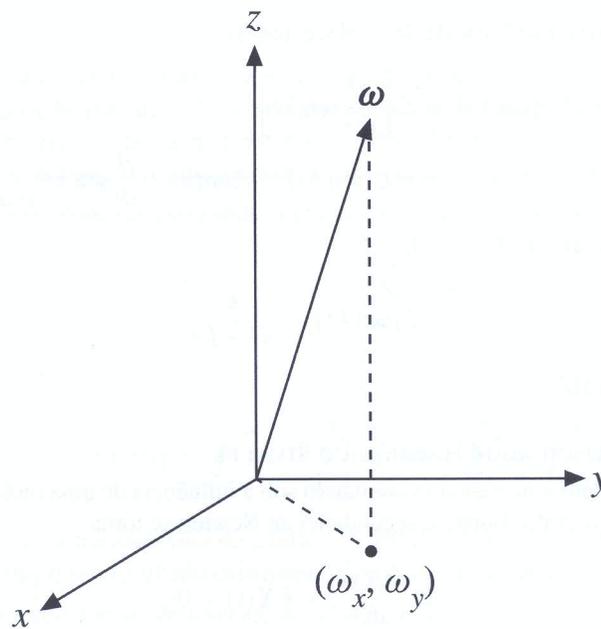


Figura 15.9:

ou

$$x(s) = X(0) \frac{s}{s^2 + a^2} - Y(0) \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad (15.136)$$

Daí,

$$X(t) = X(0) \cos at - Y(0) \sin at. \quad (15.137)$$

De modo semelhante,

$$Y(t) = X(0) \sin at + Y(0) \cos at. \quad (15.138)$$

Essa expressão é considerada a rotação do vetor (X, Y) em sentido anti-horário (para $a > 0$) em torno do eixo z com ângulo $\theta = at$ e velocidade angular a .

Podemos encontrar uma interpretação direta escolhendo o eixo de tempo, de modo que $Y(0) = 0$. Então,

$$X(t) = X(0) \cos at, \quad Y(t) = X(0) \sin at, \quad (15.139)$$

que são as equações paramétricas para rotação de (X, Y) em uma órbita circular de raio $X(0)$, com velocidade angular a no sentido anti-horário.

No caso da velocidade angular da Terra, o vetor $X(0)$ é de cerca de 15 metros, enquanto a , como definida aqui, corresponde a um período $(2\pi/a)$ de cerca de 300 dias. Na verdade, por causa dos desvios em relação ao corpo rígido idealizado que admitimos ao estabelecer as equações de Euler, o período é de aproximadamente 427 dias.¹⁴ Se na Equação (15.134) fizermos

$$X(t) = L_x, \quad Y(t) = L_y,$$

em que L_x e L_y são as componentes x e y do momento angular \mathbf{L} , $a = -g_L B_z$, g_L é a razão giromagnética e B_z é o campo magnético (ao longo do eixo z), então a Equação (15.134) descreve a precessão de Larmor de corpos carregados em um campo magnético uniforme B_z . ■

Função Delta de Dirac

Há mais uma outra transformada que é útil para usar com equações diferenciais — a função delta de Dirac:¹⁵

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}, \quad \text{para } t_0 \geq 0, \quad (15.140)$$

¹⁴D. Menzel, ed., *Fundamental Formulas of Physics*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1955), nova tiragem, 2ª ed., Dover (1960), p. 695.

¹⁵Em termos estritos, a função delta de Dirac é indefinida. Contudo, a integral sobre ela é definida. Essa abordagem é desenvolvida na Seção 1.16 usando seqüências delta.

e para $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad (15.141)$$

em que se admite que estamos usando uma representação da função delta, tal que

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0, \quad \text{para } t > 0. \quad (15.142)$$

Como método alternativo, $\delta(t)$ pode ser considerada o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ de $F(t)$,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon^{-1}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases} \quad (15.143)$$

Por cálculo direto,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \quad (15.144)$$

Considerando o limite da integral (em vez da integral do limite), temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{F(t)\} = 1,$$

ou Equação (15.141),

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Essa função delta costuma ser denominada função impulso porque é muito útil para descrever forças impulsivas, isto é, forças que duram somente por um intervalo de tempo muito curto.

Exemplo 15.9.3 FORÇA IMPULSIVA

A segunda lei de Newton para força impulsiva agindo sobre uma partícula de massa m se torna

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = P\delta(t), \quad (15.145)$$

em que P é uma constante. Transformando, obtemos

$$ms^2 x(s) - msX(0) - mX'(0) = P. \quad (15.146)$$

Para uma partícula que parte do repouso, $X'(0) = 0$.¹⁶ Também consideraremos $X(0) = 0$. Então,

$$x(s) = \frac{P}{ms^2}, \quad (15.147)$$

e

$$X(t) = \frac{P}{m}t, \quad (15.148)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{P}{m}, \quad \text{uma constante.} \quad (15.149)$$

O efeito do impulso $P\delta(t)$ é transferir (instantaneamente) P unidades de momento linear à partícula.

Uma análise semelhante se aplica ao galvanômetro balístico. O torque no galvanômetro é dado inicialmente por $k\iota$, no qual ι é um pulso de corrente e k é uma constante de proporcionalidade. Uma vez que ι tem curta duração, fazemos

$$k\iota = kq \delta(t), \quad (15.150)$$

em que q é a carga total carregada pela corrente ι . Então, sendo I o momento de inércia,

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kq \delta(t), \quad (15.151)$$

e, transformando como antes, constatamos que o efeito do pulso de corrente é uma transferência de kq unidades de momento **angular** ao galvanômetro. ■

¹⁶ Isso deveria ser $X'(0^+)$. Para incluir o efeito do impulso, considere que o impulso ocorrerá em $t = \varepsilon$ e faça $\varepsilon \rightarrow 0$.

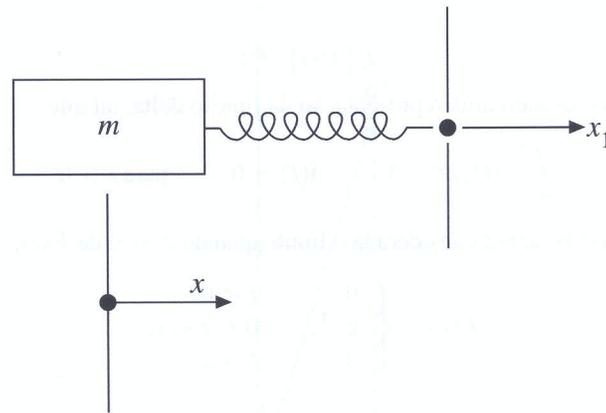


Figura 15.10: Mola.

Exercícios

- 15.9.1** Use a expressão para a transformada de uma derivada de segunda ordem para obter a transformada de $\cos kt$.
- 15.9.2** Uma massa m está ligada a uma extremidade de uma mola não-estendida, com constante de mola k (Figura 15.10). No tempo $t = 0$ a extremidade livre da mola sofre uma aceleração constante a , longe da massa. Usando transformadas de Laplace,
- (a) Ache a posição x de m como uma função do tempo.
- (b) Determine a forma limite de $x(t)$ para t pequeno.

Resposta: (a) $x = \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$,

(b) $x = \frac{a\omega^2}{4!}t^4$, $\omega t \ll 1$.

- 15.9.3** Núcleos radioativos se desintegram segundo a lei

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

sendo N a concentração de um dado nuclídeo e λ a constante de desintegração particular. Essa equação pode ser interpretada como uma afirmação de que a taxa de desintegração é proporcional ao número desses núcleos radioativos presentes. Todos eles se desintegram independentemente. Em uma série radioativa de n nuclídeos diferentes, iniciando com N_1 ,

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad \text{e assim por diante.}$$

$$\frac{dN_n}{dt} = \lambda_{n-1} N_{n-1}, \quad \text{estável.}$$

Ache $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, $n = 3$, com $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = N_3(0) = 0$.

Resposta: $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$, $N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$,

$$N_3(t) = N_0 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right).$$

Ache uma expressão aproximada para N_2 e N_3 , válida para t pequeno quando $\lambda_1 \approx \lambda_2$.

Resposta: $N_2 \approx N_0 \lambda_1 t$, $N_3 \approx \frac{N_0}{2} \lambda_1 \lambda_2 t^2$.

Ache expressões aproximadas para N_2 e N_3 , válidas para t grande, quando

- (a) $\lambda_1 \gg \lambda_2$,
- (b) $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Resposta: (a) $N_2 \approx N_0 e^{-\lambda_2 t}$,

$$N_3 \approx N_0 (1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad \lambda_1 t \gg 1.$$

$$(b) N_2 \approx N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_3 \approx N_0 (1 - e^{-\lambda_1 t}), \quad \lambda_2 t \gg 1.$$

15.9.4 A formação de um isótopo em um reator nuclear é dada por

$$\frac{dN_2}{dt} = nv\sigma_1 N_{10} - \lambda_2 N_2(t) - nv\sigma_2 N_2(t).$$

Aqui, o produto nv é o fluxo de nêutrons, nêutrons por centímetro cúbico vezes centímetros por segundo significa velocidade; σ_1 e σ_2 (cm^2) são medidas da probabilidade de absorção de nêutrons pelo isótopo original, concentração N_{10} , que admitimos constante, e do isótopo recentemente formado, concentração N_2 , respectivamente. A constante de desintegração radioativa para o isótopo é λ_2 .

(a) Ache a concentração N_2 do novo isótopo como uma função do tempo.

(b) Se o elemento original for Eu^{153} , $\sigma_1 = 400$ barns = $400 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$, $\sigma_2 = 1.000$ barns = $1.000 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$, e $\lambda_2 = 1,4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$. Se $N_{10} = 10^{20}$ e $(nv) = 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, ache N_2 , a concentração de Eu^{154} após um ano de irradiação contínua. Justifica-se supor que N_1 é constante?

15.9.5 Em um reator nuclear, Xe^{135} é formado como produto direto de fissão e também como um produto da desintegração de I^{135} , tempo de meia-vida de 6,7 horas. A meia-vida do Xe^{135} é de 9,2 horas. Como o Xe^{135} absorve fortemente nêutrons térmicos e por isso “envenena” o reator nuclear, sua concentração é uma questão de grande interesse. As equações relevantes são

$$\frac{dN_I}{dt} = \gamma_I \varphi \sigma_f N_U - \lambda_I N_I,$$

$$\frac{dN_X}{dt} = \lambda_I N_I + \gamma_X \varphi \sigma_f N_U - \lambda_X N_X - \varphi \sigma_X N_X.$$

Aqui, N_I = concentração de I^{135} (Xe^{135} , U^{235}). Admita que

N_U = constante,

γ_I = produção de I^{135} por fissão = 0,060,

γ_X = produção de Xe^{135} diretamente da fissão = 0,003,

$\lambda_I = \text{I}^{135}$ (Xe^{135}) constante de desintegração = $\frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0,693}{t_{1/2}}$,

σ_f = seção de choque de fissão de nêutron térmico para U^{235} ,

σ_X = seção de choque de absorção de nêutron térmico para Xe^{135}
 = $3,5 \times 10^6$ barns = $3,5 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$.

(σ_I , seção de choque de absorção de I^{135} , é desprezível.)

φ = fluxo de nêutrons = nêutrons/ $\text{cm}^3 \times$ velocidade média (cm/s).

(a) Ache $N_X(t)$ em termos de fluxo de nêutrons φ e do produto $\sigma_f N_U$.

(b) Ache $N_X(t \rightarrow \infty)$.

(c) Após N_X ter alcançado o equilíbrio, o reator é paralisado, $\varphi = 0$. Ache $N_X(t)$ após a paralisação. Note o aumento em N_X , que pode, durante algumas horas, interferir com a nova partida do reator.

15.10 Outras Propriedades

Substituição

Se substituirmos o parâmetro s por $s - a$ na definição da transformada de Laplace (Equação (15.99)), teremos

$$\begin{aligned} f(s - a) &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} F(t) dt \\ &= \mathcal{L}\{e^{at} F(t)\}. \end{aligned} \quad (15.152)$$

Por conseguinte, a substituição de s por $s - a$ corresponde a multiplicar $F(t)$ por e^{at} e vice-versa. Esse resultado pode ser usado com vantagem para ampliar nossa tabela de transformadas. Pela Equação (15.107), constatamos imediatamente que

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}; \quad (15.153)$$

além disso,

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos kt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}, \quad s > a.$$

Exemplo 15.10.1 OSCILADOR ATENUADO

Essas expressões são úteis quando consideramos uma massa oscilatória com atenuação proporcional à velocidade. A Equação (15.129), à qual foi adicionada essa atenuação, se torna

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = 0, \quad (15.154)$$

na qual b é uma constante de proporcionalidade. Vamos admitir que a partícula parta do repouso em $X(0) = X_0$, $X'(0) = 0$. A equação transformada é

$$m[s^2x(s) - sX_0] + b[sx(s) - X_0] + kx(s) = 0, \quad (15.155)$$

e

$$x(s) = X_0 \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k}. \quad (15.156)$$

Essa expressão pode ser manipulada completando o quadrado do denominador:

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right). \quad (15.157)$$

Se a atenuação for pequena, $b^2 < 4km$, o último termo é positivo e será denotado por ω_1^2 :

$$\begin{aligned} x(s) &= X_0 \frac{s + b/m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} \\ &= X_0 \frac{s + b/2m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} + X_0 \frac{(b/2m\omega_1)\omega_1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}. \end{aligned} \quad (15.158)$$

Pela Equação (15.153),

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 e^{-(b/2m)t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \\ &= X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \cos(\omega_1 t - \varphi), \end{aligned} \quad (15.159)$$

em que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{2m\omega_1}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

É claro que, à medida que $b \rightarrow 0$, essa solução passa para a solução não-atenuada (Seção 15.9). ■

Analogia com RLC

Vale a pena notar a similaridade entre essa oscilação harmônica simples atenuada de uma massa em uma mola e um circuito RLC (resistência, indutância e capacitância), (Figura 15.11). Em qualquer instante, a soma das diferenças de potencial ao redor do circuito deve ser zero (lei de Kirchhoff, conservação de energia). Isso resulta em

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int^t I dt = 0. \quad (15.160)$$

Diferenciando a corrente I em relação ao tempo (para eliminar a integral), temos

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (15.161)$$

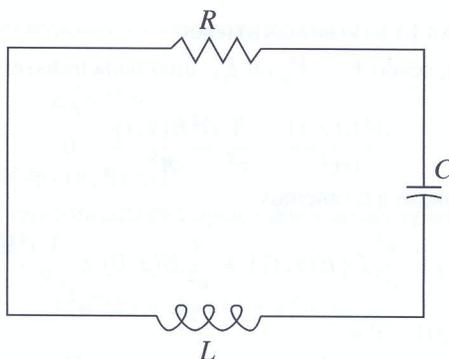


Figura 15.11: Circuito RLC.

Se substituirmos $I(t)$ por $X(t)$, L por m , R por b e C^{-1} por k , então a Equação (15.161) é idêntica ao problema mecânico. Esse é apenas um exemplo da unificação de diversos ramos da Física pela Matemática. Uma discussão mais completa será encontrada no livro de Olson.¹⁷

Translação

Desta vez, seja $f(s)$ multiplicada por e^{-bs} , $b > 0$:

$$\begin{aligned}
 e^{-bs} f(s) &= e^{-bs} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+b)} F(t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{15.162}$$

Agora, seja $t + b = \tau$. A Equação (15.162) se torna

$$\begin{aligned}
 e^{-bs} f(s) &= \int_b^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) u(\tau - b) d\tau,
 \end{aligned}
 \tag{15.163}$$

em que $u(\tau - b)$ é a função degrau unitária. Essa relação costuma ser denominada **teorema do deslocamento de Heaviside** (Figura 15.12).

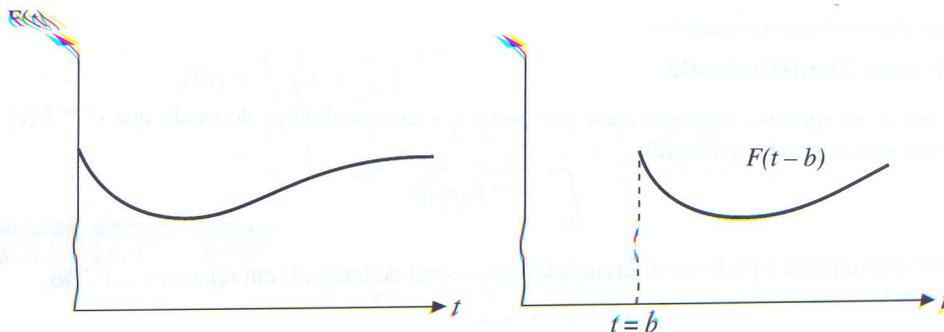


Figura 15.12: Translação.

Visto que admitimos que $F(t)$ é igual a zero para $t < 0$, $F(\tau - b) = 0$, para $0 \leq \tau < b$. Por conseguinte, podemos estender o limite inferior para zero sem mudar o valor da integral. Então, observando que τ é somente uma variável de integração, obtemos

$$e^{-bs} f(s) = \mathcal{L}\{F(\tau - b)\}.
 \tag{15.164}$$

¹⁷H. F. Olson, *Dynamical Analogies*, Nova York: Van Nostrand (1943).

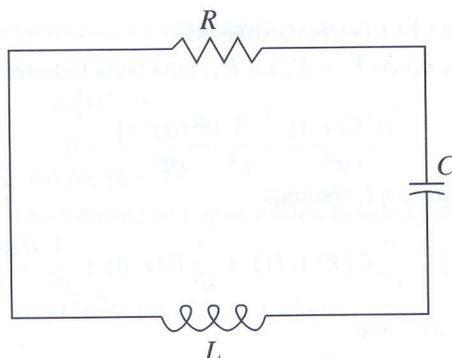


Figura 15.11: Circuito RLC.

Se substituirmos $I(t)$ por $X(t)$, L por m , R por b e C^{-1} por k , então a Equação (15.161) é idêntica ao problema mecânico. Esse é apenas um exemplo da unificação de diversos ramos da Física pela Matemática. Uma discussão mais completa será encontrada no livro de Olson.¹⁷

Translação

Desta vez, seja $f(s)$ multiplicada por e^{-bs} , $b > 0$:

$$\begin{aligned} e^{-bs} f(s) &= e^{-bs} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+b)} F(t) dt. \end{aligned} \quad (15.162)$$

Agora, seja $t + b = \tau$. A Equação (15.162) se torna

$$\begin{aligned} e^{-bs} f(s) &= \int_b^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) u(\tau - b) d\tau, \end{aligned} \quad (15.163)$$

em que $u(\tau - b)$ é a função degrau unitária. Essa relação costuma ser denominada **teorema do deslocamento de Heaviside** (Figura 15.12).

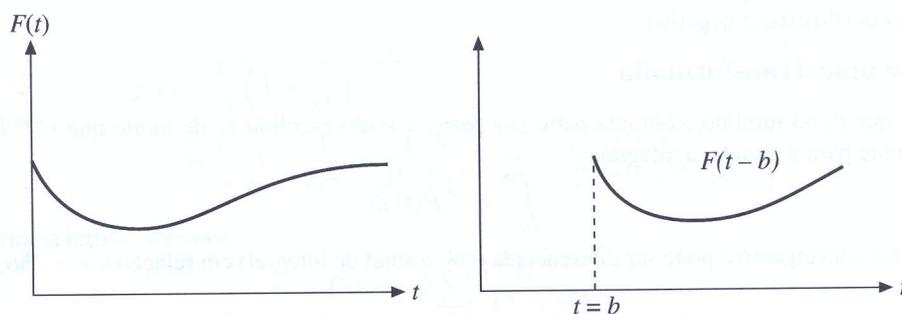


Figura 15.12: Translação.

Visto que admitimos que $F(t)$ é igual a zero para $t < 0$, $F(\tau - b) = 0$, para $0 \leq \tau < b$. Por conseguinte, podemos estender o limite inferior para zero sem mudar o valor da integral. Então, observando que τ é somente uma variável de integração, obtemos

$$e^{-bs} f(s) = \mathcal{L}\{F(t - b)\}. \quad (15.164)$$

¹⁷H. F. Olson, *Dynamical Analogies*, Nova York: Van Nostrand (1943).

Exemplo 15.10.2 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A equação de onda eletromagnética, sendo $E = E_y$ ou E_z , uma onda transversal que se propaga ao longo do eixo x , é

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (15.165)$$

Transformando essa equação em relação a t , obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} - \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} + \frac{s}{v^2} E(x, 0) + \frac{1}{v^2} \left. \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (15.166)$$

Se tivermos a condição inicial $E(x, 0) = 0$ e

$$\left. \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

então,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} = \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\}. \quad (15.167)$$

A solução (dessa EDO) é

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = c_1 e^{-(s/v)x} + c_2 e^{+(s/v)x}. \quad (15.168)$$

As "constantes" c_1 e c_2 são obtidas por condições de contorno adicionais. Elas são constantes em relação a x mas podem depender de s . Se nossa onda permanecer finita quando $x \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}\{E(x, t)\}$, também permanecerá finita. Por conseguinte, $c_2 = 0$. Se $E(0, t)$ for denotada por $F(t)$, então $c_1 = f(s)$ e

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = e^{-(s/v)x} f(s). \quad (15.169)$$

Pela propriedade da translação (Equação (15.164)), constatamos imediatamente que

$$E(x, t) = \begin{cases} F(t - \frac{x}{v}), & t \geq \frac{x}{v}, \\ 0, & t < \frac{x}{v}. \end{cases} \quad (15.170)$$

Diferenciação e substituição na Equação (15.165) verifica a Equação (15.170). Nossa solução representa uma onda (ou pulso) que se move na direção positiva x com velocidade v . Note que para $x > vt$, a região permanece não-perturbada; o pulso não teve tempo de chegar lá. Se quiséssemos que o sinal se propagasse ao longo do eixo x negativo, c_1 teria de ser igualado a 0 e nós teríamos obtido

$$E(x, t) = \begin{cases} F(t + \frac{x}{v}), & t \geq -\frac{x}{v}, \\ 0, & t < -\frac{x}{v}, \end{cases} \quad (15.171)$$

uma onda ao longo do eixo x negativo. ■

Derivada de uma Transformada

Quando $F(t)$, que é, no mínimo, contínua parte por parte, e s são escolhidos, de modo que $e^{-st}F(t)$ converge exponencialmente para s grande, a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

é uniformemente convergente e pode ser diferenciada (sob o sinal de integral) em relação a s . Então,

$$f'(s) = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} F(t) dt = \mathcal{L}\{-tF(t)\}. \quad (15.172)$$

Continuando esse processo, obtemos

$$f^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n F(t)\}. \quad (15.173)$$

Todas as integrais obtidas dessa maneira serão uniformemente convergentes por causa do comportamento exponencial decrescente de $e^{-st}F(t)$.

Essa mesma técnica pode ser aplicada para gerar mais transformadas. Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \frac{1}{s-k}, \quad s > k. \quad (15.174)$$

Diferenciando em relação a s (ou em relação a k), obtemos

$$\mathcal{L}\{te^{kt}\} = \frac{1}{(s-k)^2}, \quad s > k. \quad (15.175)$$

Exemplo 15.10.3 EQUAÇÃO DE BESSEL

Uma aplicação interessante de uma transformada de Laplace diferenciada aparece na solução da equação de Bessel com $n = 0$. Pelo Capítulo 11, temos

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0. \quad (15.176)$$

Dividindo por x e substituindo $t = x$ e $F(t) = y(x)$ para ficar de acordo com a presente notação, vemos que a equação de Bessel se torna

$$tF''(t) + F'(t) + tF(t) = 0. \quad (15.177)$$

Precisamos de uma solução regular, em particular, $F(0) = 1$. 1. Pela Equação (15.177), com $t = 0$, $F'(0) = 0$. Além disso, admitimos que nossa $F(t)$ desconhecida tem uma transformada. Transformando e usando as Equações (15.123), (15.124) e (15.172), temos

$$-\frac{d}{ds}[s^2 f(s) - s] + sf(s) - 1 - \frac{d}{ds}f(s) = 0. \quad (15.178)$$

Rearranjando a Equação (15.178), obtemos

$$(s^2 + 1)f'(s) + sf(s) = 0, \quad (15.179)$$

ou

$$\frac{df}{f} = -\frac{s ds}{s^2 + 1}, \quad (15.180)$$

uma EDO de primeira ordem. Por integração,

$$\ln f(s) = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + \ln C, \quad (15.181)$$

que pode ser reescrita como

$$f(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (15.182)$$

Para fazer uso da Equação (15.108), expandimos $f(s)$ em uma série de potências negativas de s , convergente para $s > 1$:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{C}{s} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{C}{s} \left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!s^4} - \dots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2 s^{2n}} + \dots\right]. \end{aligned} \quad (15.183)$$

Invertendo termo a termo, obtemos

$$F(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}. \quad (15.184)$$

Quando igualamos C a 1, como requer a condição inicial $F(0) = 1$, $F(t)$ é exatamente $J_0(t)$, nossa familiar função de Bessel de ordem zero. Por conseguinte,

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (15.185)$$

Note que admitimos $s > 1$. Deixamos a prova para $s > 0$ como problema.

Vale a pena observar que essa aplicação foi bem-sucedida e relativamente fácil porque consideramos $n = 0$ na equação de Bessel. Isso possibilitou dividir um fator de x (ou t). Se não tivéssemos feito isso, os termos da forma

$t^2 F(t)$ teriam introduzido uma derivada de segunda ordem de $f(s)$. A equação resultante não teria sido mais fácil de resolver do que a original.

Quando passamos das EDOs lineares com coeficientes constantes, a transformada de Laplace ainda pode ser aplicada, mas não há garantia de que essa aplicação será proveitosa.

A aplicação à equação de Bessel, $n \neq 0$, será encontrada nas referências. Como alternativa, podemos mostrar que

$$\mathcal{L}\{J_n(at)\} = \frac{a^{-n}(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \quad (15.186)$$

expressando $J_n(t)$ como uma série infinita e transformando termo a termo. ■

Integração de Transformadas

Novamente, sendo $F(t)$ no mínimo contínua parte por parte e x grande o suficiente para que $e^{-xt}F(t)$ decresça exponencialmente (quando $x \rightarrow \infty$), a integral

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}F(t) dt \quad (15.187)$$

é uniformemente convergente em relação a x . Isso justifica inverter a ordem de integração na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_s^b f(x) dx &= \int_s^b dx \int_0^\infty dt e^{-xt}F(t) \\ &= \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} (e^{-st} - e^{-bt}) dt, \end{aligned} \quad (15.188)$$

na integração com relação a x . Escolhemos o limite inferior s grande o suficiente para que $f(s)$ esteja dentro da região de convergência uniforme. Agora, deixando $b \rightarrow \infty$, temos

$$\int_s^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}, \quad (15.189)$$

contanto que $F(t)/t$ seja finita em $t = 0$ ou divirja com menos força do que t^{-1} (de modo que $\mathcal{L}\{F(t)/t\}$ existirá).

Limites de Integração — Função Escalonada Unitária

Os limites de integração reais para a transformada de Laplace podem ser especificados com a função degrau unitária (Heaviside)

$$u(t - k) = \begin{cases} 0, & t < k \\ 1, & t > k. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{u(t - k)\} = \int_k^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-ks}.$$

Um pulso retangular de largura k e altura unitária é descrito por $F(t) = u(t) - u(t - k)$. Considerando a transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}\{u(t) - u(t - k)\} = \int_0^k e^{-st} dt = \frac{1}{s} (1 - e^{-ks}).$$

A função degrau unitária também é usada na Equação (15.163) e poderia ser invocada no Exercício 15.10.13.

Exercícios

15.10.1 Resolva a Equação (15.154), que descreve um oscilador harmônico simples atenuado para $X(0) = X_0$, $X'(0) = 0$ e

- (a) $b^2 = 4$ km (criticamente atenuado),
 (b) $b^2 > 4$ km (superatenuado).

Resposta: (a) $X(t) = X_0 e^{-(b/2m)t} \left(1 + \frac{b}{2m}t\right)$.

- 15.10.2** Resolva a Equação (15.154), que descreve um oscilador harmônico simples atenuado para $X(0) = 0$, $X'(0) = v_0$ e
- $b^2 < 4 km$ (subatenuado),
 - $b^2 = 4 km$ (criticamente atenuado),
 - $b^2 > 4 km$ (superatenuado).

Resposta: (a) $X(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \sin \omega_1 t$,
 (b) $X(t) = v_0 t e^{-(b/2m)t}$.

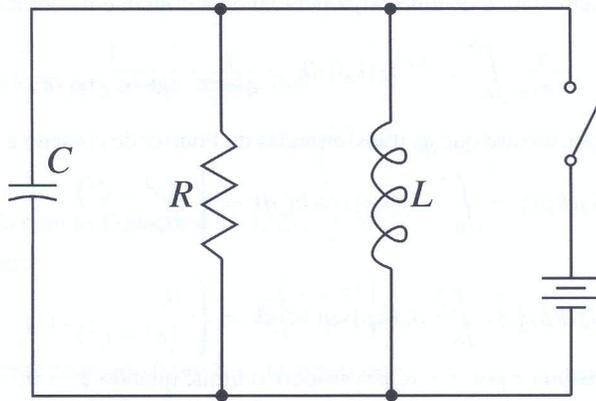


Figura 15.13: Circuito de toque de campainha.

- 15.10.3** O movimento de um corpo em queda em um meio resistente pode ser descrito por

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = mg - b \frac{dX(t)}{dt},$$

quando a força de retardo é proporcional à velocidade. Ache $X(t)$ e $dX(t)/dt$ para as condições iniciais

$$X(0) = \frac{dX}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

- 15.10.4** **Circuito de toque de campainha.** Em certos circuitos eletrônicos, resistência, indutância e capacitância são montadas em paralelo na placa de circuito (Figura 15.13). Uma voltagem constante é mantida nos elementos paralelos conservando o capacitor carregado. No tempo $t = 0$, o circuito é desconectado da fonte de voltagem. Ache as voltagens através dos elementos R , L e C como uma função do tempo. Admita que R é grande.
Sugestão: Pelas leis de Kirchhoff,

$$I_R + I_C + I_L = 0 \quad \text{e} \quad E_R = E_C = E_L,$$

em que

$$E_R = I_R R, \quad E_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

$$E_C = \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t I_C dt,$$

$q_0 =$ carga inicial do capacitor.

Com a impedância DC de $L = 0$, faça $I_L(0) = I_0$, $E_L(0) = 0$. Isso significa que $q_0 = 0$.

- 15.10.5** Expressando $J_0(t)$ como uma integral de contorno, aplique a operação de transformada de Laplace, inverta a ordem de integração e, assim, mostre que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \quad \text{para } s > 0.$$

- 15.10.6** Desenvolva a transformada de Laplace de $J_n(t)$ a partir de $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$ usando as relações de recorrência da função de Bessel.

Sugestão: Essa é uma chance de usar indução matemática.

- 15.10.7** Um cálculo do campo magnético de um circuito de corrente circular em coordenadas cilíndricas circulares leva à integral

$$\int_0^\infty e^{-kz} k J_1(ka) dk, \quad \Re(z) \geq 0.$$

Mostre que essa integral é igual a $a/(z^2 + a^2)^{3/2}$.

- 15.10.8** O potencial eletrostático de uma carga pontual q na origem em coordenadas cilíndricas circulares é

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\rho) dk = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \Re(z) \geq 0.$$

Por essa relação, mostre que as transformadas de Fourier de co-seno e seno de $J_0(k\rho)$ são

$$(a) \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_c \{J_0(k\rho)\} = \int_0^\infty J_0(k\rho) \cos k\zeta dk = \begin{cases} (\rho^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \rho > \zeta, \\ 0, & \rho < \zeta. \end{cases}$$

$$(b) \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_s \{J_0(k\rho)\} = \int_0^\infty J_0(k\rho) \sin k\zeta dk = \begin{cases} 0, & \rho > \zeta, \\ (\rho^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \rho < \zeta. \end{cases}$$

Sugestão: Substitua z por $z + i\zeta$ e considere o limite quando $z \rightarrow 0$.

- 15.10.9** Mostre que

$$\mathcal{L}\{I_0(at)\} = (s^2 - a^2)^{-1/2}, \quad s > a.$$

- 15.10.10** Verifique as seguintes transformadas de Laplace:

$$(a) \mathcal{L}\{j_0(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a} \cotg^{-1}\left(\frac{s}{a}\right),$$

$$(b) \mathcal{L}\{n_0(at)\} \text{ não existe,}$$

$$(c) \mathcal{L}\{i_0(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sinh at}{at}\right\} = \frac{1}{2a} \ln \frac{s+a}{s-a} = \frac{1}{a} \cotgh^{-1}\left(\frac{s}{a}\right),$$

$$(d) \mathcal{L}\{k_0(at)\} \text{ não existe.}$$

- 15.10.11** Desenvolva uma solução de transformada de Laplace da equação de Laguerre

$$tF''(t) + (1-t)F'(t) + nF(t) = 0.$$

Note que você precisa de uma derivada de uma transformada e de uma transformada de derivadas. Vá até onde puder com n ; então (e só então) faça $n = 0$.

- 15.10.12** Mostre que a transformada de Laplace do polinômio de Laguerre $L_n(at)$ é dada por

$$\mathcal{L}\{L_n(at)\} = \frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

- 15.10.13** Mostre que

$$\mathcal{L}\{E_1(t)\} = \frac{1}{s} \ln(s+1), \quad s > 0,$$

em que

$$E_1(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{x} dx.$$

$E_1(t)$ é a função integral exponencial.

- 15.10.14** (a) Pela Equação (15.189), mostre que

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt,$$

contanto que as integrais existam.

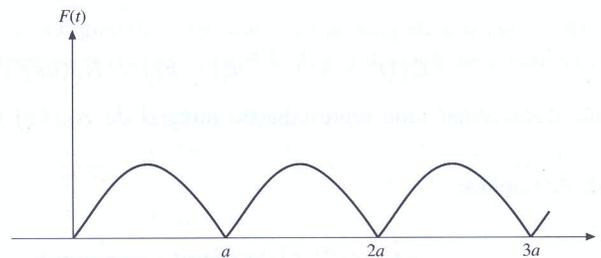


Figura 15.14: Função periódica.

(b) Pelo resultado precedente, mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

de acordo com as Equações (15.122) e (7.56).

15.10.15 (a) Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen } kt}{t}\right\} = \text{cotg}^{-1}\left(\frac{s}{k}\right).$$

(b) Usando esse resultado (com $k = 1$), prove que

$$\mathcal{L}\{\text{si}(t)\} = -\frac{1}{s} \text{tg}^{-1} s,$$

em que

$$\text{si}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx, \quad \text{a integral de seno.}$$

15.10.16 Se $F(t)$ for periódica (Figura 15.14) com um período a , de modo que $F(t+a) = F(t)$ para todo $t \geq 0$, mostre que

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-as}},$$

agora com a integração somente sobre o **primeiro período** de $F(t)$.

15.10.17 Ache a transformada de Laplace da onda quadrada (período a) definida por

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{a}{2} \\ 0, & \frac{a}{2} < t < a. \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } f(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-as/2}}{1 - e^{-as}}.$$

15.10.18 Mostre que

$$(a) \mathcal{L}\{\cosh at \cos at\} = \frac{s^3}{s^4 + 4a^4}, \quad (c) \mathcal{L}\{\sinh at \cos at\} = \frac{as^2 - 2a^3}{s^4 + 4a^4},$$

$$(b) \mathcal{L}\{\cosh at \text{sen } at\} = \frac{as^2 + 2a^3}{s^4 + 4a^4}, \quad (d) \mathcal{L}\{\sinh at \text{sen } at\} = \frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}.$$

15.10.19 Mostre que

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\{(s^2 + a^2)^{-2}\} = \frac{1}{2a^3} \text{sen } at - \frac{1}{2a^2} t \cos at,$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\{s(s^2 + a^2)^{-2}\} = \frac{1}{2a} t \text{sen } at,$$

$$(c) \mathcal{L}^{-1}\{s^2(s^2 + a^2)^{-2}\} = \frac{1}{2a} \text{sen } at + \frac{1}{2} t \cos at,$$

$$(d) \mathcal{L}^{-1}\{s^3(s^2 + a^2)^{-2}\} = \cos at - \frac{a}{2} t \text{sen } at.$$