

## 15

# Transformadas Integrais

### 15.1 Transformadas Integrais

Na Física Matemática freqüentemente encontramos pares de funções relacionadas por uma expressão da forma

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t) dt. \quad (15.1)$$

A função  $g(\alpha)$  é denominada transformada (integral) de  $f(t)$  pelo núcleo  $K(\alpha, t)$ . A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função  $f(t)$  no espaço  $t$  para uma outra função,  $g(\alpha)$ , no espaço  $\alpha$ . Essa interpretação adquire significância física na relação tempo-freqüência de transformadas de Fourier, como no Exemplo 15.3.1, e nas relações espaço real-espaço momentum da Física Quântica da Seção 15.6.

#### Transformada de Fourier

Uma das mais úteis entre o número infinito de possíveis transformadas é a transformada de Fourier, dada por

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt. \quad (15.2)$$

Dois modificações dessa forma, desenvolvidas na Seção 15.3, são as transformadas de Fourier de co-seno e as transformadas de Fourier de seno:

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (15.3)$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (15.4)$$

A transformada de Fourier é baseada no núcleo  $e^{i\omega t}$  e suas partes real e imaginária tomadas separadamente,  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ . Como esses núcleos são as funções usadas para descrever ondas, as transformadas de Fourier aparecem com freqüência em estudos de ondas e na extração de informações de ondas, em particular quando estão envolvidas informações de fase. A leitura de um interferômetro estelar, por exemplo, envolve uma transformada de Fourier do brilho em um disco estelar. A distribuição de elétrons em um átomo pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados. Na Mecânica Quântica, a origem física das relações de Fourier da Seção 15.6 é a natureza ondulatória da matéria e a descrição que fazemos da matéria em termos de ondas.

#### Exemplo 15.1.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DA GAUSSIANA

A transformada de Fourier de uma função gaussiana  $e^{-a^2 t^2}$ ,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} e^{i\omega t} dt,$$

pode ser feita analiticamente completando o quadrado no expoente,

$$-a^2 t^2 + i\omega t = -a^2 \left( t - \frac{i\omega}{2a^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2},$$

o que verificamos avaliando o quadrado. Substituindo essa identidade, obtemos

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt,$$

deslocando a variável de integração  $t \rightarrow t + \frac{i\omega}{2a^2}$ . Isso é justificado por uma aplicação do teorema de Cauchy ao retângulo com vértices  $-T$ ,  $T$ ,  $T + \frac{i\omega}{2a^2}$ ,  $-T + \frac{i\omega}{2a^2}$  para  $T \rightarrow \infty$ , observando que o integrando não tem nenhuma singularidade nessa região e que as integrais sobre os lados, de  $\pm T$  a  $\pm T + \frac{i\omega}{2a^2}$ , se tornam desprezíveis para  $T \rightarrow \infty$ . Por fim, reescalamos a variável de integração como  $\xi = at$  na integral (veja as Equações ((8.6) e (8.8)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{a}.$$

Substituindo esses resultados, encontramos

$$g(\omega) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right),$$

mais uma vez uma gaussiana, mas em um espaço  $\omega$ . Quanto maior for  $a$ , isto é, quanto mais estreita for a gaussiana original  $e^{-a^2 t^2}$ , mais larga será sua transformada de Fourier  $\sim e^{-\omega^2/4a^2}$ . ■

### Transformadas de Laplace, Mellin e Hankel

Três outros núcleos úteis são

$$e^{-\alpha t}, \quad t J_n(\alpha t), \quad t^{\alpha-1}.$$

Esses núcleos dão origem às seguintes transformadas

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} dt, \quad \text{Transformada de Laplace} \quad (15.5)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) t J_n(\alpha t) dt, \quad \text{Transformada de Hankel (Fourier-Bessel)} \quad (15.6)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) t^{\alpha-1} dt, \quad \text{Transformada de Mellin.} \quad (15.7)$$

Claro que os tipos possíveis são ilimitados. Essas transformadas são úteis na análise matemática e em aplicações físicas. Na verdade, já usamos a transformada de Mellin sem chamá-la por seu nome, isto é,  $g(\alpha) = (\alpha - 1)!$  é a transformada de Mellin de  $f(t) = e^{-t}$ . Veja E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2<sup>a</sup> ed., Nova York: Oxford University Press (1937), para mais transformadas de Mellin. É claro que também poderíamos dizer que  $g(\alpha) = n!/\alpha^{n+1}$  é a transformada de Laplace de  $f(t) = t^n$ . Das três, a transformada de Laplace é, de longe, a mais usada e será discutida minuciosamente nas Seções 15.8 a 15.12. A transformada de Hankel, uma transformada de Fourier para uma expansão de função de Bessel, representa um caso-limite de uma série de Fourier-Bessel. Ela ocorre em problemas de potencial em coordenadas cilíndricas e é muito aplicada em acústica.

### Linearidade

Todas essas transformadas integrais são lineares, isto é,

$$\begin{aligned} \int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] K(\alpha, t) dt \\ = c_1 \int_a^b f_1(t) K(\alpha, t) dt + c_2 \int_a^b f_2(t) K(\alpha, t) dt, \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$\int_a^b c f(t) K(\alpha, t) dt = c \int_a^b f(t) K(\alpha, t) dt, \quad (15.9)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes e  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são funções para as quais a operação transformada é definida. Representando nossa transformada integral linear pelo operador  $\mathcal{L}$ , obtemos

$$g(\alpha) = \mathcal{L}f(t). \quad (15.10)$$

Esperamos que exista um operador inverso  $\mathcal{L}^{-1}$ , tal que<sup>1</sup>

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}g(\alpha). \quad (15.11)$$

No caso de nossas três transformadas de Fourier,  $\mathcal{L}^{-1}$  é dado na Seção 15.3. Em geral, a determinação da transformada inversa é o principal problema da utilização de transformadas integrais. A transformada inversa de Laplace é discutida na Seção 15.12. Se o leitor quiser detalhes sobre as transformadas inversas de Hankel e Mellin, consulte as Leituras Adicionais no final do capítulo.

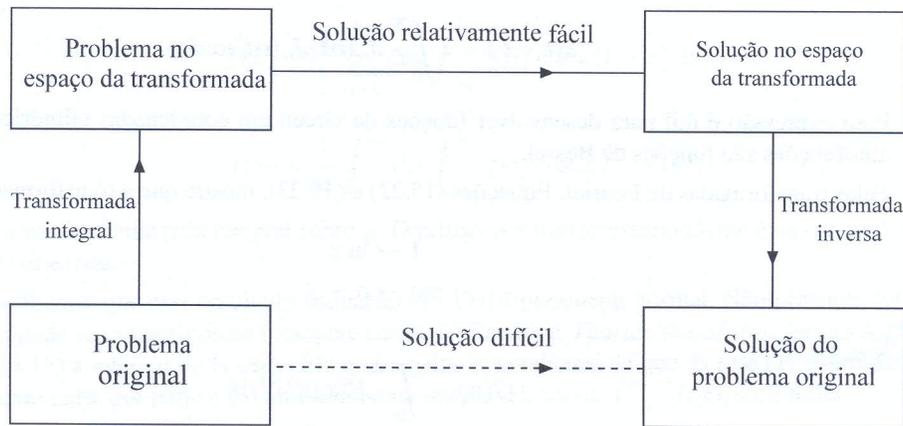


Figura 15.1: Esquema para transformadas integrais.

Transformadas integrais têm muitas aplicações e interpretações físicas especiais que serão observadas no restante deste capítulo. A aplicação mais comum está esquematizada na Figura 15.1. Há problemas que são difíceis de resolver (se é que podem ser resolvidos) nas coordenadas originais (espaço original), mas cuja transformada pode ser resolvida com relativa facilidade. Nesses casos a transformada inversa transporta a solução das coordenadas transformadas para o sistema original. O Exemplo 15.4.1 e o Exercício 15.4.1 ilustram essa técnica.

## Exercícios

**15.1.1** As transformadas de Fourier para uma função de duas variáveis são

$$F(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(ux+vy)} dx dy,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-i(ux+vy)} du dv.$$

Usando  $f(x, y) = f([x^2 + y^2]^{1/2})$ , mostre que as transformadas de Hankel de ordem zero

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr,$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} \rho F(\rho) J_0(\rho r) d\rho,$$

são um caso especial das transformadas de Fourier.

Essa técnica pode ser generalizada para derivar as transformadas de Hankel de ordem  $\nu = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$  (compare com I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Nova York: McGraw-Hill (1951)). Uma abordagem mais geral, válida para  $\nu > -\frac{1}{2}$ , é apresentada em Sneddon, *The Use of Integral Transforms* (Nova York: McGraw-Hill (1972)). Poderíamos também observar que as transformadas de Hankel de ordem não-inteira  $\nu = \pm\frac{1}{2}$  se reduzem a transformadas de Fourier de seno e co-seno.

<sup>1</sup>Expectativa não é prova e, aqui, a prova da existência é complicada porque, na verdade, estamos em um espaço de Hilbert de número infinito de dimensões. Provaremos a existência nos casos especiais de interesse por construção propriamente dita.

**15.1.2** Admitindo a validade do par de equações transformada de Hankel-transformada inversa de Hankel

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) J_n(\alpha t) t dt,$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} g(\alpha) J_n(\alpha t) \alpha d\alpha,$$

mostre que a função delta de Dirac tem uma representação integral de Bessel

$$\delta(t - t') = t \int_0^{\infty} J_n(\alpha t) J_n(\alpha t') \alpha d\alpha.$$

Essa expressão é útil para desenvolver funções de Green em coordenadas cilíndricas, em que as autofunções são funções de Bessel.

**15.1.3** Pelas transformadas de Fourier, Equações (15.22) e (15.23), mostre que a transformação

$$t \rightarrow \ln x$$

$$i\omega \rightarrow \alpha - \gamma$$

leva a

$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} F(x) x^{\alpha-1} dx$$

e

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(\alpha) x^{-\alpha} d\alpha.$$

Essas expressões são as transformadas de Mellin. Uma troca similar de variáveis é empregada na Seção 15.12 para derivar a transformada inversa de Laplace.

**15.1.4** Verifique as seguintes transformadas de Mellin:

$$(a) \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(kx) dx = k^{-\alpha} (\alpha-1)! \operatorname{sen} \frac{\pi\alpha}{2}, \quad -1 < \alpha < 1.$$

$$(b) \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cos(kx) dx = k^{-\alpha} (\alpha-1)! \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

*Sugestão:* Você pode forçar as integrais a uma forma tratável inserindo um fator de convergência  $e^{-bx}$  e (após integração) fazendo  $b \rightarrow 0$ . Além disso,  $\cos kx + i \operatorname{sen} kx = \exp ikx$ .

## 15.2 Desenvolvimento da Integral de Fourier

No Capítulo 14 mostramos que séries de Fourier são úteis para representar certas funções (1) em um intervalo limitado  $[0, 2\pi]$ ,  $[-L, L]$ , e assim por diante, ou (2) para o intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ , **se a função for periódica**. Agora, voltamos nossa atenção para o problema de representar uma função não-periódica em uma faixa infinita. Em termos físicos isso significa resolver um pulso único ou pacote de ondas em ondas senoidais.

Já vimos (Seção 14.2) que, para o intervalo  $[-L, L]$ , os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  podiam ser escritos como

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad (15.12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt. \quad (15.13)$$

A série de Fourier resultante é

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad (15.14)$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (t-x) dt. \quad (15.15)$$

Agora deixamos que o parâmetro  $L$  se aproxime de infinito, transformando o intervalo finito  $[-L, L]$  no intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ . Fazemos

$$\frac{n\pi}{L} = \omega, \quad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega, \quad \text{com } L \rightarrow \infty.$$

Então, temos

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad (15.16)$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad (15.17)$$

substituindo a soma infinita pela integral sobre  $\omega$ . O primeiro termo (correspondente a  $a_0$ ) se anulou, admitindo-se que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  existe.

É preciso salientar que esse resultado (Equação (15.17)) é puramente formal. Não pretende ser uma derivação rigorosa, mas pode se tornar rigorosa (compare com I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Seção 3.2). Consideramos a Equação (15.17) a integral de Fourier. Ela está sujeita às condições de que  $f(x)$  é (1) contínua parte por parte, (2) diferenciável parte por parte e (3) absolutamente integrável, isto é,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  é finita.

### Integral de Fourier — Forma Exponencial

Nossa integral de Fourier (Equação (15.17) pode ser colocada em forma exponencial, observando que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad (15.18)$$

enquanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt = 0; \quad (15.19)$$

$\cos \omega(t-x)$  é uma função par de  $\omega$  e  $\sin \omega(t-x)$  é uma função ímpar de  $\omega$ . Somando as Equações (15.18) (15.19) (com um fator  $i$ ), obtemos o **teorema integral de Fourier**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (15.20)$$

A variável  $\omega$  introduzida aqui é uma variável matemática aleatória. Em muitos problemas físicos, entretanto, ela corresponde à frequência angular  $\omega$ . Então podemos interpretar a Equação (15.18) ou (15.20) como uma representação de  $f(x)$  em termos de uma distribuição de trens de onda senoidais infinitamente longos de frequência angular  $\omega$ , nos quais a frequência é uma variável **contínua**.

### Derivação da Função Delta de Dirac

Se a ordem de integração da Equação (15.20) for invertida, podemos reescrevê-la como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega \right\} dt. \quad (15.20a)$$

Aparentemente, a quantidade entre colchetes se comporta como uma função  $\delta(t-x)$ . Poderíamos considerar que a Equação (15.20) nos dá uma representação da função delta de Dirac. Como alternativa, nós a consideramos uma pista para uma nova derivação do teorema integral de Fourier.

Pela Equação ((1.171b) (deslocando a singularidade de  $t = 0$  to  $t = x$ ),

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_n(t-x) dt, \quad (15.21a)$$

em que  $\delta_n(t-x)$  é uma seqüência que define a distribuição  $\delta(t-x)$ . Note que a Equação (15.21a) admite que  $f(t)$  é contínua em  $t=x$ . Consideramos que  $\delta_n(t-x)$  é

$$\delta_n(t-x) = \frac{\text{sen } n(t-x)}{\pi(t-x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{i\omega(t-x)} d\omega, \quad (15.21b)$$

usando a Equação (1.174). Substituindo na Equação (15.21a), temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-n}^n e^{i\omega(t-x)} d\omega dt. \quad (15.21c)$$

Permutando a ordem de integração e então considerando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos a Equação (15.20), o teorema integral de Fourier.

Entendendo que ele deve ter à frente um sinal de integral, como na Equação (15.21a), a identificação

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega \quad (15.21d)$$

fornece uma representação muito útil da função delta.

### 15.3 Transformadas de Fourier — Teorema da Inversão

Vamos definir  $g(\omega)$ , a transformada de Fourier da função  $f(t)$ , por

$$g(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (15.22)$$

#### Transformada Exponencial

Então, pela Equação (15.20), temos a relação inversa,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (15.23)$$

Note que as Equações (15.22) e (15.23) são quase, mas não exatamente, simétricas, diferindo no sinal de  $i$ .

Aqui há dois pontos que merecem comentário. Primeiro, a simetria  $1/\sqrt{2\pi}$  é uma questão de opção e não de necessidade. Muitos autores anexarão todo o fator  $1/2\pi$  da Equação (15.20) a uma das duas equações: Equação (15.22) ou Equação (15.23). Segundo, embora a integral de Fourier, Equação (15.20), tenha sido alvo de muita atenção na literatura matemática, estaremos interessados primordialmente na transformada de Fourier e sua inversa. Elas são as equações que têm significância física.

Quando passamos o par de transformadas de Fourier para o espaço tridimensional, ele se torna

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad (15.23a)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k. \quad (15.23b)$$

As integrais estão em todo o espaço. A verificação, se quisermos, é imediata, substituindo o lado esquerdo de uma Equação no integrando da outra Equação e usando a função delta tridimensional.<sup>2</sup> A Equação (15.23b) pode ser interpretada como uma expansão de uma função  $f(\mathbf{r})$  em um contínuo de autofunções de onda plana; então,  $g(\mathbf{k})$  se torna a amplitude da onda,  $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ .

#### Transformada de Co-Seno

Se  $f(x)$  for par ou ímpar, essas transformadas podem ser expressas de uma forma um pouco diferente. Considere, em primeiro lugar, uma função par  $f_c$  com  $f_c(x) = f_c(-x)$ . Escrevendo a exponencial da Equação (15.22) em forma trigonométrica,

$$\begin{aligned} g_c(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t) (\cos \omega t + i \text{sen } \omega t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(t) \cos \omega t dt, \end{aligned} \quad (15.24)$$

<sup>2</sup> $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(x_1 - x_2)\delta(y_1 - y_2)\delta(z_1 - z_2)$  com integral de Fourier  $\delta(x_1 - x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik_1(x_1 - x_2)] dk_1$  etc.

sendo que a dependência de  $\sin \omega t$  desaparece com a integração sobre o intervalo simétrico  $(-\infty, \infty)$ . De modo semelhante, uma vez que  $\cos \omega t$  é par, as Equações (15.23) se transformam em

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega. \quad (15.25)$$

As Equações (15.24) e (15.25) são conhecidas como transformadas de Fourier de co-seno.

### Transformada de Seno

O par correspondente de transformadas de Fourier de seno é obtido admitindo que  $f_s(x) = -f_s(-x)$ , ímpar, e aplicando os mesmos argumentos de simetria. As equações são

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(t) \sin \omega t \, dt,^3 \quad (15.26)$$

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega. \quad (15.27)$$

Pela última equação podemos desenvolver a interpretação física de que  $f(x)$  está sendo descrita por um contínuo de ondas senoidais. A amplitude de  $\sin \omega x$  é dada por  $\sqrt{2/\pi} g_s(\omega)$ , na qual  $g_s(\omega)$  é a transformada de Fourier de seno de  $f(x)$ . Veremos que a Equação (15.27) é a integral análoga ao somatório (Equação (14.24)). Interpretações similares são válidas para os casos de co-seno e exponencial.

Se considerarmos as Equações (15.22), (15.24) e (15.26) como as transformadas integrais diretas, descritas por  $\mathcal{L}$  Equação (15.10), Seção 15.1, as transformadas inversas correspondentes,  $\mathcal{L}^{-1}$  da Equação (15.11), são dadas pelas Equações (15.23), (15.25) e (15.27).

Note que cada uma das transformadas de Fourier de co-seno e de seno envolve somente valores positivos (e zero) dos argumentos. Usamos a paridade de  $f(x)$  para estabelecer as transformadas; mas, uma vez estabelecidas as transformadas, o comportamento das funções  $f$  e  $g$  para argumento negativo é irrelevante. Na verdade, as próprias equações transformadas impõem uma **paridade definida: par para a transformada de Fourier de co-seno e ímpar para a transformada de Fourier de seno.**

### Exemplo 15.3.1 TREM DE ONDAS FINITO

Uma importante aplicação da transformada de Fourier é a resolução de um pulso finito em ondas senoidais. Imagine que um trem de ondas  $\sin \omega_0 t$  e seja limitado por célula de Kerr ou obturadores saturáveis de célula, de corante, de modo que temos

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, & |t| < \frac{N\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |t| > \frac{N\pi}{\omega_0}. \end{cases} \quad (15.28)$$

Isso corresponde a  $N$  ciclos de nosso trem de ondas original (Figura 15.2). Uma vez que  $f(t)$  é ímpar, podemos usar a transformada de Fourier de seno (Equação (15.26)) para obter

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega t \, dt. \quad (15.29)$$

Integrando, encontramos nossa função amplitude:

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right]. \quad (15.30)$$

É de considerável interesse ver como  $g_s(\omega)$  depende da frequência. Para  $\omega_0$  e  $\omega \approx \omega_0$ , somente o primeiro termo será de alguma importância por causa dos denominadores. Ele está representado no gráfico da Figura 15.3. Essa é a curva da amplitude para o padrão de difração de fenda única.

Há zeros em

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{N}, \pm \frac{2}{N}, \quad \text{e assim por diante.} \quad (15.31)$$

<sup>3</sup>Note que um fator  $-i$  foi absorvido nessa  $g(\omega)$ .

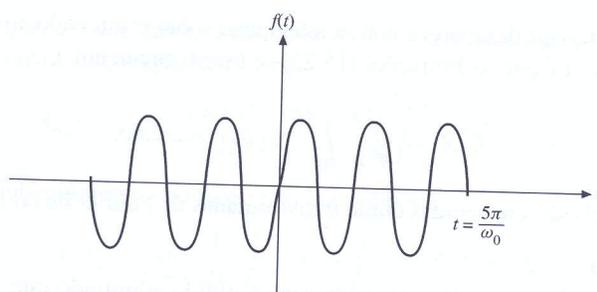


Figura 15.2: Trem de ondas finito.

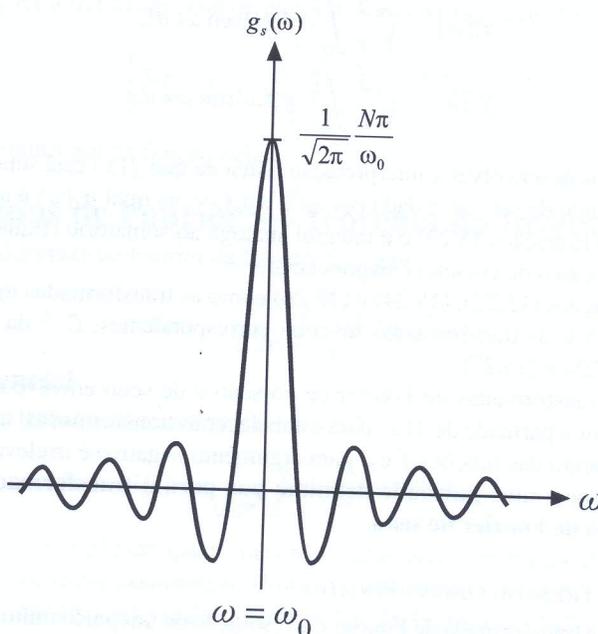


Figura 15.3: Transformada de Fourier de trem de ondas finito.

Para  $N$  grande,  $g_s(\omega)$  também pode ser interpretada como uma distribuição delta de Dirac, como na Seção 1.15. Uma vez que as distribuições fora do máximo central são pequenas nesse caso, podemos considerar

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N} \quad (15.32)$$

uma boa medida da dispersão da frequência de nosso pulso de onda. É claro que, se  $N$  for grande (um pulso longo), a dispersão da frequência será pequena. Por outro lado, se nosso pulso for limitado e ficar curto,  $N$  pequeno, a distribuição de frequência será mais larga e os máximos secundários serão mais importantes. ■

### Princípio da Incerteza

Eis aqui um análogo clássico do famoso princípio da incerteza da Mecânica Quântica. Se estivermos tratando com ondas eletromagnéticas,

$$\begin{aligned} \frac{h\omega}{2\pi} &= E, & \text{energia (de nosso fóton)} \\ \frac{h\Delta\omega}{2\pi} &= \Delta E, \end{aligned} \quad (15.33)$$

sendo  $h$  a constante de Planck. Aqui,  $\Delta E$  representa uma incerteza na energia de nosso pulso. Há também uma incerteza em relação ao tempo, porque nossa onda de  $N$  ciclos requer  $2N\pi/\omega_0$  segundos para passar. Considerando

$$\Delta t = \frac{2N\pi}{\omega_0}, \quad (15.34)$$

temos o produto dessas duas incertezas:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h \Delta \omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h \frac{\omega_0}{2\pi N} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h. \quad (15.35)$$

Na verdade, o princípio da incerteza de Heisenberg afirma que

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}, \quad (15.36)$$

e isso é claramente satisfeito em nosso exemplo.

### Exercícios

- 15.3.1** (a) Mostre que  $g(-\omega) = g^*(\omega)$  é uma condição necessária e suficiente para  $f(x)$  ser real.  
 (b) Mostre que  $g(-\omega) = -g^*(\omega)$  é uma condição necessária e suficiente para  $f(x)$  ser imaginária pura.

*Nota:* A condição da parte (a) é usada no desenvolvimento das relações de dispersão da Seção 7.2.

- 15.3.2** Seja  $F(\omega)$  a transformada (exponencial) de Fourier de  $f(x)$  e  $G(\omega)$  a transformada de Fourier de  $g(x) = f(x+a)$ . Mostre que

$$G(\omega) = e^{-ia\omega} F(\omega).$$

- 15.3.3** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

é uma função escalonada finita simétrica.

- (a) Ache  $g_c(\omega)$ , transformada de Fourier de co-seno de  $f(x)$ .  
 (b) Considerando a transformada inversa de co-seno, mostre que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen } \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega.$$

- (c) Pela parte (b), mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = 1, \\ \frac{\pi}{2}, & |x| < 1. \end{cases}$$

- 15.3.4** (a) Mostre que as transformadas de Fourier de seno e co-seno de  $e^{-at}$  são

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}, \quad g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}.$$

*Sugestão:* Cada uma das transformadas pode ser relacionada com a outra por integração por partes.

- (b) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\omega \text{sen } \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Esses resultados também são obtidos por integração de contorno (Exercício 7.1.14).

- 15.3.5** Ache a transformada de Fourier do pulso triangular (Figura 15.4).

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|), & |x| < \frac{1}{a}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{a}. \end{cases}$$

*Nota:* Essa função dá uma outra seqüência delta com  $h = a$  e  $a \rightarrow \infty$ .

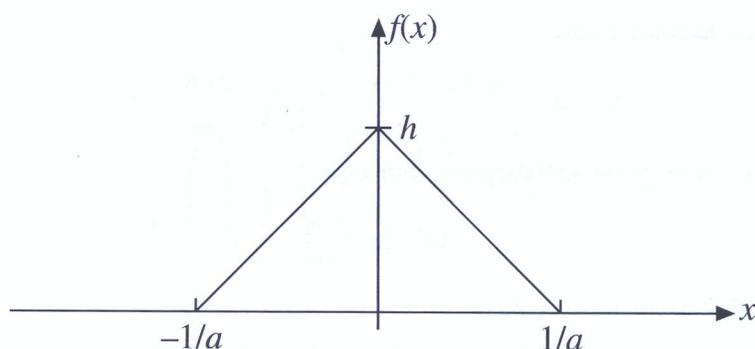


Figura 15.4: Pulso triangular.

**15.3.6** Defina uma seqüência

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

(Essa é a Equação (1.172)). Expresse  $\delta_n(x)$  como uma integral de Fourier (via o teorema integral de Fourier, transformada inversa etc.). Por fim, mostre que podemos escrever

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

**15.3.7** Usando a seqüência

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2),$$

mostre que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

*Nota:* Lembre-se de que  $\delta(x)$  é definida em termos de seu comportamento como parte de um integrando (Seção 1.15), em especial Equações (1.178) e (1.179).

**15.3.8** Derive as representações de seno e co-seno de  $\delta(t-x)$  que são comparáveis com a representação exponencial, Equação (15.21d).

$$\text{Resposta. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega t \sin \omega x d\omega, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t \cos \omega x d\omega.$$

**15.3.9** Em uma cavidade ressonante, uma oscilação eletromagnética de freqüência  $\omega_0$  se extingue como

$$A(t) = A_0 e^{-\omega_0 t / 2Q} e^{-i\omega_0 t}, \quad t > 0.$$

(Considere  $A(t) = 0$ , para  $t < 0$ .) O parâmetro  $Q$  é uma medida da razão entre energia armazenada e perda de energia por ciclo. Calcule a distribuição de freqüência da oscilação,  $a^*(\omega)a(\omega)$ , em que  $a(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $A(t)$ .

*Nota:* Quanto maior for  $Q$ , mais inclinada será sua linha de ressonância.

$$\text{Resposta: } a^*(\omega)a(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2}.$$

**15.3.10** Prove que

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{E_0 - i\Gamma/2 - \hbar\omega} = \begin{cases} \exp(-\frac{\Gamma t}{2\hbar}) \exp(-\frac{iE_0 t}{\hbar}), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Essa integral de Fourier aparece em uma variedade de problemas da Mecânica Quântica: penetração de barreira WKB (Wentzel-Kramers Brillouin), dispersão, teoria da perturbação dependente do tempo, e assim por diante.

*Sugestão:* Tente integração de contorno.

**15.3.11** Verifique que as seguintes são transformadas integrais de Fourier uma da outra:

- (a)  $\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$  e  $J_0(ay)$ ,
- (b)  $\begin{cases} 0, & |x| < a, \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, & |x| > a, \end{cases}$  e  $N_0(a|y|)$ ,
- (c)  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  e  $K_0(a|y|)$ .

(d) Você tem uma idéia de por que  $I_0(ay)$  não está incluída nessa lista?

*Sugestão:*  $J_0$ ,  $N_0$  e  $K_0$  podem ser transformadas com muita facilidade usando uma representação exponencial, invertendo a ordem de integração e empregando a representação exponencial da função delta de Dirac (Seção 15.2). Esses casos podem ser tratados igualmente bem como transformadas de Fourier de co-seno.

*Nota:* A relação  $K_0$  parece conseqüência de uma Equação de função de Green no Exercício 9.7.14.

**15.3.12** Um cálculo do campo magnético de um circuito de corrente circular em coordenadas cilíndricas circulares leva à integral

$$\int_0^\infty \cos kz k K_1(ka) dk.$$

Mostre que essa integral é igual a

$$\frac{\pi a}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

*Sugestão:* Tente diferenciar o Exercício 15.3.11(c).

**15.3.13** Como extensão do Exercício 15.3.11, mostre que

$$(a) \int_0^\infty J_0(y) dy = 1, \quad (b) \int_0^\infty N_0(y) dy = 0, \quad (c) \int_0^\infty K_0(y) dy = \frac{\pi}{2}.$$

**15.3.14** A integral de Fourier, Equação (15.18), é considerada sem significado para  $f(t) = \cos \alpha t$ . Mostre que a integral de Fourier pode ser estendida para cobrir  $f(t) = \cos \alpha t$  pela utilização da função delta de Dirac.

**15.3.15** Mostre que

$$\int_0^\infty \sin ka J_0(k\rho) dk = \begin{cases} (a^2 - \rho^2)^{-1/2}, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Aqui,  $a$  e  $\rho$  são positivos. A equação resulta da determinação da distribuição de cargas em um disco condutor isolado, de raio  $a$ . Note que a função à direita tem uma descontinuidade **infinita**  $\rho = a$ .

*Nota:* A abordagem da transformada de Laplace aparece no Exercício 15.10.8.

**15.3.16** A função  $f(r)$  tem uma transformada exponencial de Fourier,

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} k^2}.$$

Determine  $f(\mathbf{r})$ .

*Sugestão:* Use coordenadas polares esféricas no espaço  $k$ .

$$\text{Resposta: } f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}.$$

**15.3.17** (a) Calcule a transformada exponencial de Fourier de  $f(x) = e^{-a|x|}$ .

(b) Calcule a transformada inversa empregando o cálculo de resíduos (Seção 7.1).

**15.3.18** Mostre que as seguintes são transformadas de Fourier uma da outra.

$$i^n J_n(t) \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) (1 - x^2)^{-1/2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$T_n(x)$  é a polinomial de Chebyshev de enésima ordem.

*Sugestão:* Com  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ , a transformada de  $T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}$  leva a uma representação integral de  $J_n(t)$ .

**15.3.19** Mostre que a transformada exponencial de Fourier de

$$f(\mu) = \begin{cases} P_n(\mu), & |\mu| \leq 1, \\ 0, & |\mu| > 1 \end{cases}$$

é  $(2i^n/2\pi)j_n(kr)$ . Aqui,  $P_n(\mu)$  é uma polinomial de Legendre e  $j_n(kr)$  é uma função de Bessel esférica.

**15.3.20** Mostre que a transformada exponencial tridimensional de Fourier de uma função radialmente simétrica pode ser reescrita como uma transformada de Fourier de seno:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [rf(r)] \text{sen } kr dr.$$

**15.3.21** (a) Mostre que  $f(x) = x^{-1/2}$  é **auto-recíproca** sob as transformadas de Fourier de co-seno e seno, isto é,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \cos xt dx &= t^{-1/2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \text{sen } xt ds &= t^{-1/2}. \end{aligned}$$

(b) Use os resultados precedentes para avaliar as integrais de Fresnel  $\int_0^{\infty} \cos(y^2) dy$  e  $\int_0^{\infty} \text{sen}(y^2) dy$ .

## 15.4 Transformada de Fourier de Derivadas

Na Seção 15.1, a Figura 15.1 delinea a técnica geral de usar transformadas de Fourier e transformadas inversas para resolver um problema. Aqui damos um passo inicial na resolução de uma equação diferencial obtendo a transformada de Fourier de uma derivada.

Usando a forma exponencial, determinamos que a transformada de Fourier de  $f(x)$  é

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx, \quad (15.37)$$

e para  $df(x)/dx$ ,

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx. \quad (15.38)$$

Integrando a Equação (15.38) por partes, obtemos

$$g_1(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \quad (15.39)$$

Se  $f(x)$  desaparecer<sup>4</sup> quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , temos

$$g_1(\omega) = -i\omega g(\omega); \quad (15.40)$$

isto é, a transformada da derivada é  $(-i\omega)$  vezes a transformada da função original. Isso pode ser imediatamente generalizado para a enésima derivada, dando como resultado

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega), \quad (15.41)$$

contanto que todas as partes integradas desapareçam quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Esse é o poder da transformada de Fourier, a razão por que ela é tão útil para resolver equações diferenciais (parciais). A operação de diferenciação foi substituída por uma multiplicação no espaço  $\omega$ .

<sup>4</sup>À parte os casos como o Exercício 15.3.6,  $f(x)$  deve desaparecer quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , para que a transformada de Fourier de  $f(x)$  exista.

### Exemplo 15.4.1 EQUAÇÃO DE ONDA

Essa técnica pode ser usada com vantagem no tratamento de EDPs. Para ilustrar a técnica, vamos derivar uma expressão familiar da Física elementar. Uma corda infinitamente longa está vibrando livremente. A amplitude  $y$  das vibrações (pequenas) satisfaz a Equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (15.42)$$

Vamos admitir uma condição inicial

$$y(x, 0) = f(x), \quad (15.43)$$

em que  $f$  é localizada, isto é, se aproxima de zero em  $x$  grande.

Aplicando nossa transformada de Fourier em  $x$ , o que significa multiplicar por  $e^{i\alpha x}$ , e integrando sobre  $x$ , obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{i\alpha x} dx \quad (15.44)$$

ou

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Y(\alpha, t)}{\partial t^2}. \quad (15.45)$$

Aqui, usamos

$$Y(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\alpha x} dx \quad (15.46)$$

e a Equação (15.41) para a derivada de segunda ordem. Note que a parte integrada da Equação (15.39) se anula: a onda ainda não foi a  $\pm\infty$  porque está se propagando para diante no tempo e não há nenhuma fonte no infinito porque  $f(\pm\infty) = 0$ . Uma vez que não aparece nenhuma derivada em relação a  $\alpha$ , a Equação (15.45) é, na verdade, uma EDO, ou seja, a Equação do oscilador linear. Essa transformação, de uma EDP para uma EDO, é um feito significativo. Resolvemos a Equação (15.45) sujeita às condições iniciais adequadas. Em  $t = 0$ , aplicando a Equação (15.43), a Equação (15.46) se reduz a

$$Y(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha). \quad (15.47)$$

A solução geral da Equação (15.45) em forma exponencial é

$$Y(\alpha, t) = F(\alpha) e^{\pm i v \alpha t}. \quad (15.48)$$

Usando a fórmula de inversão (Equação (15.23)), temos

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (15.49)$$

e, pela Equação (15.48),

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha(x \mp vt)} d\alpha. \quad (15.50)$$

Uma vez que  $f(x)$  é a transformada inversa de Fourier de  $F(\alpha)$ ,

$$y(x, t) = f(x \mp vt), \quad (15.51)$$

correspondente às ondas que avançam nas direções  $+x$  e  $-x$ , respectivamente.

As combinações lineares de ondas particulares são dadas pela condição de contorno da Equação (15.43) e alguma outra condição de contorno, tal como uma restrição sobre  $\partial y / \partial t$ . ■

A proeza que a transformada de Fourier realiza aqui merece destaque especial.

- Nossa transformada de Fourier converteu uma EDP em uma EDO, em que o “grau de transcendência” do problema foi reduzido.

Na Seção 15.9, transformadas de Laplace são usadas para converter EDOs (com coeficientes constantes) em equações algébricas. Mais uma vez, o grau de transcendência é reduzido. O problema é simplificado, como mostra a Figura 15.1.

### Exemplo 15.4.2 EDP DO FLUXO DE CALOR

Para ilustrar outra transformação de uma EDP em uma EDO, vamos aplicar a transformada de Fourier à Equação diferencial parcial do fluxo de calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

em que a solução  $\psi(x, t)$  é a temperatura no espaço como uma função do tempo. Considerando a transformada de Fourier de ambos os lados dessa Equação (note que, aqui, somente  $\omega$  é a variável da transformada conjugada para  $x$  porque  $t$  é o tempo na EDP do fluxo de calor), em que

$$\Psi(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{i\omega x} dx,$$

isso resulta em uma EDO para a transformada de Fourier  $\Psi$  de  $\psi$  na variável de tempo  $t$ ,

$$\frac{\partial \Psi(\omega, t)}{\partial t} = -a^2 \omega^2 \Psi(\omega, t).$$

Integrando, obtemos

$$\ln \Psi = -a^2 \omega^2 t + \ln C \quad \text{ou} \quad \Psi = C e^{-a^2 \omega^2 t},$$

em que a constante de integração  $C$  ainda pode depender de  $\omega$  e, em geral, é determinada por condições iniciais. De fato,  $C = \Psi(\omega, 0)$  é a distribuição espacial inicial de  $\Psi$ , portanto é dada pela transformada (em  $x$ ) da distribuição espacial inicial de  $\psi$ , a saber,  $\psi(x, 0)$ . Colocando essa solução de volta em nossa transformada inversa de Fourier, temos como resultado

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega x} e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega.$$

Por simplicidade, aqui consideramos  $C$  independente de  $\omega$  (admitindo uma distribuição de temperatura inicial de função delta) e integramos completando o quadrado em  $\omega$ , como no Exemplo 15.1.1, fazendo as trocas adequadas de variáveis e parâmetros ( $a^2 \rightarrow a^2 t$ ,  $\omega \rightarrow x, t \rightarrow -\omega$ ). Isso resulta na solução particular da EDP de fluxo de calor,

$$\psi(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

que aparece como uma hipótese inteligente no Capítulo 8. Na verdade, mostramos que  $\psi$  é a transformada inversa de Fourier de  $C \exp(-a^2 \omega^2 t)$ . ■

### Exemplo 15.4.3 INVERSÃO DE EDP

Derive a integral de Fourier para a função de Green  $G_0$  da EDP de Poisson, que é uma solução de

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Uma vez conhecida  $G_0$ , a solução geral da EDP de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

da eletrostática, é dada como

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') 4\pi\rho(\mathbf{r}') d^3r'.$$

Aplicando  $\nabla^2$  a  $\Phi$  e usando a EDP que a função de Green satisfaz, verificamos que

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \int \nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') 4\pi\rho(\mathbf{r}') d^3r' = - \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') 4\pi\rho(\mathbf{r}') d^3r' = -4\pi\rho(\mathbf{r}).$$

Agora usamos a transformada de Fourier de  $G_0$ , que é  $g_0$ , e desta a da função  $\delta$ , escrevendo

$$\nabla^2 \int g_0(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = - \int e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}.$$

Como os integrandos de integrais de Fourier iguais devem ser os mesmos em (quase) todo lugar, o que resulta da transformada inversa de Fourier, e com

$$\nabla e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = i\mathbf{p}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')},$$

isso resulta em  $-\mathbf{p}^2 g_0(\mathbf{p}) = -1$ . Por conseguinte, a aplicação do laplaciano à integral de Fourier  $f(\mathbf{r})$  corresponde a multiplicar sua transformada de Fourier  $g(\mathbf{p})$  por  $-\mathbf{p}^2$ . Substituir essa solução na transformada inversa de Fourier para  $G_0$  resulta em

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \mathbf{p}^2} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Podemos verificar a última parte desse resultado aplicando  $\nabla^2$  a  $G_0$  novamente e lembrando, do Capítulo 1, que  $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ .

A transformada inversa de Fourier pode ser avaliada usando coordenadas polares, explorando a simetria esférica de  $\mathbf{p}^2$ . Por simplicidade, escrevemos  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e denominamos  $\theta$  o ângulo entre  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{p}$ ,

$$\begin{aligned} \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \frac{d^3p}{p^2} &= \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 e^{ipR \cos \theta} d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{iR} \int_0^\infty \frac{dp}{p} e^{ipR \cos \theta} \Big|_{\cos \theta = -1}^1 = \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty \frac{\text{sen } pR}{p} dp \\ &= \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty \frac{\text{sen } pR}{pR} d(pR) = \frac{2\pi^2}{R}, \end{aligned}$$

em que  $\theta$  e  $\varphi$  são os ângulos de  $\mathbf{p}$  e  $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , do Exemplo 7.1.4. Dividindo por  $(2\pi)^3$ , obtemos  $G_0(R) = 1/(4\pi R)$ , como afirmamos. Uma avaliação dessa transformada de Fourier por integração de contorno é dada no Exemplo 9.7.2. ■

## Exercícios

- 15.4.1** A equação de idade de Fermi unidimensional para a difusão de nêutrons que desaceleram em algum meio (como grafite) é

$$\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau}.$$

Aqui,  $q$  é o número de nêutrons que desaceleram, caindo abaixo de alguma dada energia por segundo por unidade de volume. A idade de Fermi,  $\tau$ , é uma medida da perda de energia.

Se  $q(x, 0) = S\delta(x)$ , correspondente a uma fonte plana de nêutrons em  $x = 0$ , emitindo  $S$  nêutrons por unidade de área por segundo, derive a solução

$$q = S \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}.$$

*Sugestão:* Substitua  $q(x, \tau)$  por

$$p(k, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, \tau) e^{ikx} dx.$$

Isso é análogo à difusão de calor em um meio infinito.

- 15.4.2** A Equação (15.41) resulta em

$$g_2(\omega) = -\omega^2 g(\omega)$$

para a transformada de Fourier da derivada de segunda ordem de  $f(x)$ . A condição  $f(x) \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow \pm\infty$  pode ser ligeiramente relaxada. Ache a condição menos restritiva para a equação precedente para que  $g_2(\omega)$  seja válida.