9.5 Soluções de Série — Método de Frobenius

Nesta seção desenvolvemos um método para obter uma solução da EDO linear homogênea de segunda ordem. O método, uma expansão de série, sempre funcionará, contanto que o ponto de expansão não seja pior do que um ponto singular regular. Em Física, essa condição muito branda é quase sempre satisfeita.

Uma EDO **linear homogênea de segunda ordem** pode ser colocada na forma

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0.} \tag{9.80}$$

A equação é **homogênea** porque cada termo contém $y(x)$ ou uma derivada; **linear**, porque cada y, dy/dx ou d^2y/dx^2 aparece como a primeira potência – e nenhum produto. Nesta seção desenvolvemos (ao menos) uma solução da Equação (9.80). Na Seção 9.6 desenvolvemos a **segunda solução, independente, e provamos que não existe nenhuma terceira solução independente**. Por conseguinte, a **solução mais geral** da Equação (9.80) pode ser escrita como

$$\boxed{y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).} \tag{9.81}$$

Nosso problema físico pode levar a uma EDO linear **não-homogênea**, de segunda ordem

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x).} \tag{9.82}$$

A função da direita, $F(x)$, representa uma fonte (tal como uma carga eletrostática) ou uma força propulsora (tal como em um oscilador forçado). Soluções específicas dessa equação não-homogênea são abordadas rapidamente no Exercício 9.6.25. Elas são exploradas com um certo detalhe usando as técnicas de função de Green, nas Seções 9.7 e 10.5, e com uma técnica de t ransformada de Laplace na Seção 15.11. Denominando essa solução y_p, podemos adicioná-la a qualquer solução da equação homogênea correspondente, a Equação (9.80). Daí, a **solução mais geral** da Equação (9.82) é

$$\boxed{y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x).} \tag{9.83}$$

As constantes c_1 e c_2 serão eventualmente fixadas por condições de contorno.

Por enquanto, admitimos que $F(x) = 0$ e que nossa equação diferencial é homogênea. Tentaremos desenvolver uma solução para nossa equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, Equação (9.80), pela substituição por uma série de potências com coeficientes indeterminados. Também está disponível como um parâmetro a potência do menor termo da série que não se anula. Como ilustração, aplicamos o método a duas equações diferenciais importantes, primeiro à equação do oscilador linear (clássico)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y = 0, \tag{9.84}$$

com soluções conhecidas $y = \operatorname{sen}\omega x, \cos\omega x$.

Experimentamos

$$\begin{aligned} y(x) &= x^k\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}, \qquad a_0 \neq 0, \end{aligned} \tag{9.85}$$

com o expoente k e todos os coeficientes a_λ ainda indeterminados. Note que k não precisa ser um inteiro. Diferenciando duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda-1}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na Equação (9.84), temos

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2} + \omega^2\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \tag{9.86}$$

Pela nossa análise da unicidade da série de potências (Capítulo 5), os coeficientes de cada potência de x no lado esquerdo da Equação (9.86) devem desaparecer individualmente.

A potência mais baixa de x que aparece na Equação (9.86) é x^{k-2}, para $\lambda = 0$ no primeiro somatório. A exigência de que o coeficiente desapareça[8] resulta em

$$a_0 k(k-1) = 0.$$

Escolhemos a_0 como o coeficiente dos termos mais baixos que não desaparecem da série (Equação (9.85)); daí, por definição, $a_0 \neq 0$. Por conseguinte, temos

$$k(k-1) = 0. \tag{9.87}$$

Denominamos essa equação, que vem do coeficiente da potência mais baixa de x, **equação indicial**. A equação indicial e suas raízes têm importância crítica para nossa análise. Se $k = 1$, o coeficiente $a_1(k+1)k$ de x^{k-1} deve desaparecer, de modo que $a_1 = 0$. Claro que nesse exemplo devemos exigir que $k = 0$ ou $k = 1$.

Antes de considerarmos essas duas possibilidades para k, voltamos à Equação (9.86) e impomos que os coeficientes líquidos restantes, digamos, o coeficiente de $x^{k+j} (j \geq 0)$, desapareçam. Estabelecemos $\lambda = j + 2$ no primeiro somatório e $\lambda = j$ no segundo. (São somatórios independentes e λ é um índice mudo). Isso resulta em

$$a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1) + \omega^2 a_j = 0$$

ou

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)}. \tag{9.88}$$

Essa é uma **relação de recorrência** de dois termos.[9] Dado a_j, podemos calcular a_{j+2} e então a_{j+4}, a_{j+6}, e assim por diante, até o ponto que desejarmos. Note que, para esse exemplo, se começarmos com a_0, a Equação (9.88) leva aos coeficientes pares a_2, a_4, e assim por diante, e ignora a_1, a_3, a_5, e assim por diante. Visto que a_1 é arbitrário se $k = 0$ e necessariamente zero se $k = 1$, vamos igualá-lo a zero (compare com os Exercícios 9.5.3 e 9.5.4) e então, pela Equação (9.88)

$$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0,$$

e todos os coeficientes de número ímpar desaparecem. As potências ímpares de x na verdade reaparecerão quando for usada a **segunda** raiz da equação indicial.

Voltando à Equação (9.87), nossa equação indicial, em primeiro lugar experimentamos a solução $k = 0$. A relação de recorrência (Equação (9.88)) se torna

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)}, \tag{9.89}$$

o que leva a

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} = -\frac{\omega^2}{2!} a_0, \\ a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{3 \cdot 4} = +\frac{\omega^4}{4!} a_0, \\ a_6 &= -a_4 \frac{\omega^2}{5 \cdot 6} = -\frac{\omega^6}{6!} a_0, \text{ e assim por diante.} \end{aligned}$$

Por inspeção (e indução matemática),

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0, \tag{9.90}$$

e nossa solução é

$$y(x)_{k=0} = a_0 \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \cdots \right] = a_0 \cos \omega x. \tag{9.91}$$

[8] Ver a unicidade de séries de potência, Seção 5.7.

[9] A relação de recorrência pode envolver três termos, isto é, a_{j+2}, dependendo de a_j e a_{j-2}. A Equação (13.2) para as funções de Hermite fornecem um exemplo desse comportamento.

Se escolhermos a raiz da equação indicial $k = 1$ (Equação (9.88)), a relação de recorrência se torna

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)}. \tag{9.92}$$

Substituindo em $j = 0, 2, 4$, sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} = -\frac{\omega^2}{3!} a_0, \\ a_4 &= -a_2 \frac{\omega 2}{4 \cdot 5} = +\frac{\omega^4}{5!} a_0, \\ a_6 &= -a_4 \frac{\omega^2}{6 \cdot 7} = -\frac{\omega^6}{7!} a_0, \text{ e assim por diante.} \end{aligned}$$

Mais uma vez, por inspeção e indução matemática,

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0. \tag{9.93}$$

Para essa escolha, $k = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} y(x)_{k=1} &= a_0 x \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{3!} + \frac{(\omega x)^4}{5!} - \frac{(\omega x)^6}{7!} + \cdots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \left[(\omega x) - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \cdots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega x. \end{aligned} \tag{9.94}$$

Para resumir essa abordagem, podemos escrever a Equação (9.86) esquematicamente, como mostra a Figura 9.2. Pela unicidade da série de potências (Seção 5.7), o coeficiente total de cada potência de x deve desaparecer por si só. A exigência de que o primeiro coeficiente (1) desapareça leva à equação indicial, Equação (9.87). O segundo coeficiente é manipulado estabelecendo $a_1 = 0$. A desaparição do coeficiente de x^k (e de potências mais altas, tomadas uma por vez) leva à relação de recorrência, Equação (9.88).

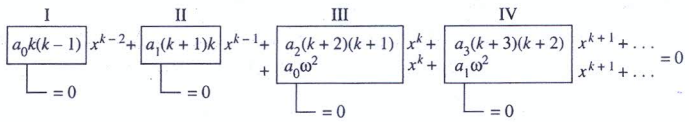

Figura 9.2: Relação de recorrência de expansão de série de potências.

Essa substituição de série, conhecida como método de Frobenius, nos deu duas soluções de série da equação do oscilador linear. Contudo, há dois pontos nessas soluções de série que precisam ser muito enfatizados:

1. A solução de série sempre deve ser substituída de volta na equação diferencial para ver se funciona, uma precaução contra erros algébricos e lógicos. Se funcionar, ela é uma solução.
2. A aceitabilidade de uma solução de série depende de sua convergência (incluindo convergência assintótica). É bem possível que o método de Frobenius dê uma solução de série que satisfaça a equação diferencial original quando substituída na equação, mas que **não** convirja na região de interesse. A equação diferencial de Legendre ilustra essa situação.

Expansão em Torno de x_0

A Equação (9.85) é uma expansão em torno da origem, $x_0 = 0$. É perfeitamente possível substituir a Equação (9.85) por

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (x - x_0)^{k+\lambda}, \qquad a_0 \neq 0. \tag{9.95}$$

De fato, no caso das equações de Legendre, Chebyshev e hipergeométricas, escolher $x_0 = 1$ tem algumas vantagens. O ponto x_0 não deve ser escolhido em uma singularidade essencial — ou nosso método de Frobenius provavelmente falhará. A série resultante (x_0 um ponto ordinário ou um ponto singular regular) será válida onde ela convergir. Você pode esperar algum tipo de divergência quando $|x - x_0| = |z_s - x_0|$, em que z_s é a singularidade mais próxima de x_0 (no plano complexo).

Simetria de Soluções

Vamos observar que obtemos uma solução de simetria par, $y_1(x) = y_1(-x)$, e uma de simetria ímpar, $y_2(x) = -y_2(-x)$. Isso não é apenas um acidente, mas uma conseqüência direta da forma da EDO. Escrevendo uma EDO geral como

$$\mathcal{L}(x)y(x) = 0, \tag{9.96}$$

na qual $\mathcal{L}(x)$ é o operador diferencial, vemos que, para a equação do oscilador linear (Equação (9.84)), $\mathcal{L}(x)$ é par sob paridade; isto é,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x). \tag{9.97}$$

Sempre que o operador diferencial tiver uma paridade ou simetria específica, par ou ímpar, podemos permutar $+x$ e $-x$, e a Equação (9.96) se torna

$$\pm\mathcal{L}(x)y(-x) = 0, \tag{9.98}$$

$+$ se $\mathcal{L}(x)$ for par, $-$ se $\mathcal{L}(x)$ for ímpar. É claro que, se $y(x)$ for uma solução da equação diferencial, $y(-x)$ também é uma solução. Então, qualquer solução pode ser resolvida em partes par e ímpar,

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\big[y(x) + y(-x)\big] + \tfrac{1}{2}\big[y(x) - y(-x)\big], \tag{9.99}$$

sendo que o primeiro colchete da direita dá uma solução par, e o segundo, uma solução ímpar.

Se nos referirmos à Seção 9.4, podemos ver que todas as equações (ou operadores diferenciais) de Legendre, Chebyshev, Bessel, oscilador harmônico simples e Hermite exibem essa paridade par; isto é, sua $P(x)$ na Equação (9.80) é ímpar e $Q(x)$ é par. Soluções de todas essas equações podem ser apresentadas como séries de potências pares de x e séries separadas de potências ímpares de x. O operador diferencial de Laguerre não tem simetria par nem ímpar; daí, não podemos esperar que suas soluções exibam paridade par ou ímpar. Nossa ênfase na paridade se origina primariamente da importância da paridade na Mecânica Quântica. Constatamos que funções de onda habitualmente são pares ou ímpares, o que quer dizer que elas têm uma paridade definida. A maioria das interações (o decaimento beta é uma grande exceção) também é par ou ímpar, e o resultado é que a paridade é conservada.

Limitações da Abordagem de Série – Equação de Bessel

Essa abordagem sobre a equação do oscilador linear talvez tenha sido um pouco fácil demais. Substituindo as séries de potências (Equação (9.85)) na equação diferencial (Equação (9.84)), obtemos duas soluções independentes sem problema algum.

Para ter uma idéia do que pode acontecer, tentamos resolver a equação de Bessel,

$$x^2y'' + xy' + \big(x^2 - n^2\big)y = 0, \tag{9.100}$$

usando y' em lugar de dy/dx e y'' em lugar de d^2y/dx^2. Novamente, admitindo uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda},$$

diferenciamos e substituímos na Equação (9.100). O resultado é

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda+2} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda n^2 x^{k+\lambda} = 0. \tag{9.101}$$

Fazendo $\lambda = 0$, obtemos o coeficiente de x^k, a potência mais baixa de x que aparece do lado esquerdo,

$$a_0\big[k(k-1) + k - n^2\big] = 0, \tag{9.102}$$

e novamente $a_0 \neq 0$ por definição. Por conseguinte, a Equação (9.102) resulta na equação **indicial**

$$k^2 - n^2 = 0\,, \tag{9.103}$$

com soluções $k = \pm n$.

É interessante examinar o coeficiente de x^{k+1} também. Nesse caso, obtemos

$$a_1\left[(k+1)k + k + 1 - n^2\right] = 0\,,$$

ou

$$a_1(k+1-n)(k+1+n) = 0. \tag{9.104}$$

Para $k = \pm n$, nem $k+1-n$ nem $k+1+n$ desaparece, e nós **devemos** exigir que $a_1 = 0$.[10]

Passando para o coeficiente de x^{k+j} para $k = n$, fazemos $\lambda = j$ no primeiro, segundo e quarto termos da Equação (9.101) e $\lambda = j-2$ no terceiro termo. Impondo que o coeficiente resultante de x^{k+1} desapareça, obtemos

$$a_j\left[(n+j)(n+j-1) + (n+j) - n^2\right] + a_{j-2} = 0.$$

Quando j é substituído por $j+2$, essa expressão pode ser reescrita para $j \geq 0$ como

$$a_{j+2} = -a_j \frac{1}{(j+2)(2n+j+2)}, \tag{9.105}$$

que é a relação de recorrência desejada. A aplicação repetida dessa relação de recorrência leva a

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \frac{1}{2(2n+2)} = -\frac{a_0 n!}{2^2 1!(n+1)!}, \\
a_4 &= -a_2 \frac{1}{4(2n+4)} = \frac{a_0 n!}{2^4 2!(n+2)!}, \\
a_6 &= -a_4 \frac{1}{6(2n+6)} = -\frac{a_0 n!}{2^6 3!(n+3)!}, \text{ e assim por diante,}
\end{aligned}$$

e, em geral,

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{a_0 n!}{2^{2p} p!(n+p)!}. \tag{9.106}$$

Inserindo esses coeficientes em nossa solução de série admitida, temos

$$y(x) = a_0 x^n \left[1 - \frac{n! x^2}{2^2 1!(n+1)!} + \frac{n! x^4}{2^4 2!(n+2)!} - \cdots\right]. \tag{9.107}$$

Em forma de somatório

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n! x^{n+2j}}{2^{2j} j!(n+j)!} \\
&= a_0 2^n n! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}.
\end{aligned} \tag{9.108}$$

No Capítulo 11 o somatório final é identificado como a função de Bessel $J_n(x)$. Note que essa solução, $J_n(x)$, tem simetria par ou simetria ímpar,[11] como seria de esperar da forma da equação de Bessel.

Quando $k = -n$ e n não é um inteiro, podemos gerar uma segunda série distinta, a ser rotulada $J_{-n}(x)$. Contudo, quando $-n$ é um inteiro negativo, começa a dificuldade. A relação de recorrência para os coeficientes a_j ainda é dada pela Equação (9.105), mas com $2n$ substituído por $-2n$. Então, quando $j+2 = 2n$ ou $j = 2(n-1)$, o coeficiente a_{j+2} aumenta demais e não temos nenhuma solução de série. Essa catástrofe pode ser remediada na Equação (9.108), como é feito no Capítulo 11, e o resultado é que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n \text{ um inteiro.} \tag{9.109}$$

[10] $k = \pm n = -\frac{1}{2}$ são exceções.

[11] $J_n(x)$ é uma função par se n for um inteiro par, uma função ímpar se n for um inteiro ímpar. Para n não-inteiro, o x^n não tem tal simetria simples.

A segunda solução simplesmente reproduz a primeira. Não conseguimos construir uma segunda solução independente para a equação de Bessel por essa técnica de série quando n é um inteiro.

Substituindo em uma série infinita, obtivemos duas soluções para a equação do oscilador linear e uma para a equação de Bessel (duas se n não for um inteiro). A resposta às perguntas "Sempre podemos fazer isso?", "Esse método sempre funcionará?" é não, não podemos fazer isso sempre. Esse método de solução de série nem sempre funcionará.

Singularidades Regulares e Irregulares

O sucesso do método de substituição de série depende das raízes da equação indicial e do grau de singularidade dos coeficientes na equação diferencial. Para entender melhor o efeito dos coeficientes da equação nessa abordagem ingênua de substituição de série, considere quatro equações simples:

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = 0, \tag{9.110a}$$

$$y'' - \frac{6}{x^3}y = 0, \tag{9.110b}$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0, \tag{9.110c}$$

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0. \tag{9.110d}$$

O leitor pode mostrar com facilidade que, para a Equação (9.110a), a equação indicial é

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

resultando em $k = 3, -2$. Visto que a equação é homogênea em x (contando d^2/dx^2 como x^{-2}), não há nenhuma relação de recorrência. Contudo, ficamos com duas soluções perfeitamente boas, x^3 e x^{-2}.

A Equação (9.110b) difere da Equação (9.110a) por somente uma potência de x, mas isso envia a equação indicial a

$$-6a_0 = 0,$$

sem absolutamente nenhuma solução, porque concordamos que $a_0 \neq 0$. Nossa substituição de série funcionou para a Equação (9.110a), que tinha só uma singularidade regular, mas não para a Equação (9.110b), que tem um ponto singular irregular na origem.

Continuando com a Equação (9.110c), adicionamos um termo y'/x. A equação indicial é

$$k^2 - a^2 = 0,$$

mas, novamente, não há nenhuma relação de recorrência. As soluções são $y = x^a, x^{-a}$, ambas séries de um único termo, perfeitamente aceitáveis.

Quando mudamos a potência de x no coeficiente de y' de -1, para -2, Equação (9.110d), há uma drástica mudança na solução. A equação indicial (com apenas o termo y' contribuindo) se torna

$$k = 0.$$

Há uma relação de recorrência,

$$a_{j+1} = +a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1}.$$

A menos que o parâmetro a seja selecionado para fazer com que a série termine, temos

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j\to\infty} \frac{j(j+1)}{j+1}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{j^2}{j} = \infty.$$

Daí, nossa solução de série diverge para todo $x \neq 0$. Mais uma vez, nosso método funcionou para a Equação (9.110c) com uma singularidade regular, mas falhou quando tínhamos a singularidade irregular da Equação (9.110d).

Teorema de Fuchs

A resposta à pergunta básica, quando podemos esperar que o método de substituição de série funcione, é dada pelo teorema de Fuchs, que afirma que sempre podemos obter ao menos uma solução de série de potências, contanto que estejamos expandindo em torno de um ponto que é um ponto ordinário ou, na pior das hipóteses, um ponto singular regular.

Se tentarmos uma expansão em torno de uma singularidade irregular ou essencial, nosso método pode falhar, como falhou para as Equações (9.110b) e (9.110d). Felizmente, as equações mais importantes da Física Matemática, listadas na Seção 9.4, não têm nenhuma singularidade irregular no plano finito. Uma discussão mais detalhada do teorema de Fuchs aparece na Seção 9.6.

Pela Tabela 9.4, Seção 9.4, o infinito é visto como um ponto singular para todas as equações consideradas. Para ilustrar ainda melhor o teorema de Fuchs, a equação de Legendre (tendo infinito como uma singularidade regular) tem uma solução de série convergente em potências negativas do argumento (Seção 12.10). Ao contrário, a equação de Bessel (com uma singularidade irregular no infinito) resulta em séries assintóticas (Seções 5.10 e 11.6). Essas soluções assintóticas são de extrema utilidade.

Resumo

Se estivermos expandindo em torno de um ponto ordinário ou, na pior das hipóteses, em torno de uma singularidade regular, a abordagem de substituição de série resultará em pelo menos uma solução (teorema de Fuchs).

Obter uma ou duas soluções distintas depende das raízes da equação indicial.

1. Se as duas raízes da equação indicial forem iguais, podemos obter só uma solução por esse método de substituição de série.
2. Se a diferença entre as duas raízes for um número não-inteiro, podem ser obtidas duas soluções independentes.
3. Se a diferença entre as duas raízes for um número inteiro, a maior das duas resultará em uma solução.

A menor raiz pode ou não dar uma solução, dependendo do comportamento dos coeficientes. Na equação do oscilador linear obtemos duas soluções; para a equação de Bessel, obtemos só uma solução.

A utilidade da solução de série em termos do que é a solução (isto é, números) depende da rapidez de convergência da série e da disponibilidade dos coeficientes. Muitas EDOs não resultarão em relações de recorrência simples e atraentes para os coeficientes. Em geral, a série disponível provavelmente será útil para $|x|$ (ou $|x - x_0|$) muito pequeno. Podemos utilizar computadores para determinar coeficientes adicionais de série usando uma linguagem simbólica como Mathematica,[12] Maple,[13] ou Reduce.[14] Entretanto, para trabalho numérico, muitas vezes o melhor será a integração numérica direta.

Exercícios

9.5.1 Teorema da unicidade. A função $y(x)$ satisfaz uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. Em $x = x_0$, $y(x) = y_0$ e $dy/dx = y_0'$. Mostre que $y(x)$ é única e que nenhuma outra solução dessa equação diferencial passa pelos pontos (x_0, y_0) com uma inclinação de y_0'.
Sugestão: Admita que uma segunda solução satisfaça essas condições e compare com as expansões da série de Taylor.

9.5.2 Tentou-se uma solução de série da Equação (9.80) por expansão em torno do ponto $x = x_0$. Se x_0 é um ponto ordinário, mostre que a equação indicial tem raízes $k = 0, 1$.

9.5.3 No desenvolvimento de uma solução de série da equação do oscilador harmônico simples (OHS), o segundo coeficiente da série a_1 foi desprezado exceto para o igualar a zero. Desenvolva uma segunda equação do tipo indicial a partir do coeficiente da próxima potência mais baixa de x, x^{k-1},

(a) (equação OHS com $k = 0$). Mostre que se pode atribuir qualquer valor finito a a_1 (incluindo zero).

(b) (equação OHS com $k = 1$). Mostre que a_1 deve ser igualado a zero.

9.5.4 Analise as soluções de série das seguintes equações diferenciais para ver quando a_1 **pode** ser igualado a zero sem que nada seja irrevogavelmente perdido e quando a_1 **deve** ser igualado a zero.
(a) Legendre, (b) Chebyshev, (c) Bessel, (d) Hermite.

[12] S. Wolfram, *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Nova York: Addison Wesley (1991).
[13] A. Heck, *Introduction to Maple*, Nova York: Springer (1993).
[14] G. Rayna, *Reduce Software for Algebraic Computation*, Nova York: Springer (1987).

Resposta: (a) Legendre, (b) Chebyshev e (d) Hermite: Para $k = 0$, a_1 **pode** ser igualado a zero; para $k = 1$, a_1, **deve** ser igualado a zero.
(c) Bessel: a_1 **deve** ser igualado a zero (exceto para $k = \pm n = -\frac{1}{2}$).

9.5.5 Resolva a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

por substituição direta de série.

(a) Verifique que a equação indicial é

$$k(k-1) = 0.$$

(b) Usando $k = 0$, obtenha uma série de potências pares de x ($a_1 = 0$).

$$y_{\text{par}} = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right],$$

em que

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - n(n+1)}{(j+1)(j+2)}a_j.$$

(c) Usando $k = 1$, desenvolva uma série de potências ímpares de x ($a_1 = 1$).

$$y_{\text{ímpar}} = a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right],$$

onde

$$a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+2) - n(n+1)}{(j+2)(j+3)}a_j.$$

(d) Mostre que ambas as soluções, y_{par} e y_{impar}, divergem para $x = \pm 1$ **se a série continuar até o infinito**.

(e) Por fim, mostre que, por uma escolha adequada de n, uma série por vez pode ser convertida em um polinômio, evitando assim a catástrofe da divergência. Em Mecânica Quântica essa restrição de n a valores inteiros corresponde à **quantização do momento angular**.

9.5.6 Desenvolva soluções de série para a equação diferencial de Hermite

(a) $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$.

Resposta: $k(k-1) = 0$, equação indicial.

Para $k = 0$,

$$a_{j+2} = 2a_j\frac{j - \alpha}{(j+1)(j+2)} \qquad (j\ ),$$

$$y_{\text{par}} = a_0\left[1 + \frac{2(-\alpha)x^2}{2!} + \frac{2^2(-\alpha)(2-\alpha)x^4}{4!} + \cdots\right].$$

Para $k = 1$,

$$a_{j+2} = 2a_j\frac{j + 1 - \alpha}{(j+2)(j+3)} \qquad (j \text{ par}),$$

$$y_{\text{ímpar}} = a_1\left[x + \frac{2(1-\alpha)x^3}{3!} + \frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)x^5}{5!} + \cdots\right].$$

(b) Mostre que ambas as soluções de série são convergentes para todo x, sendo que, para índices grandes, a razão entre coeficientes sucessivos se comporta como a razão correspondente na expansão de $\exp(x^2)$.

(c) Mostre que, por escolha adequada de α, as soluções de série podem ser abreviadas e convertidas a polinômios finitos. (Esses polinômios, adequadamente normalizados, se tornam polinômios de Hermite na Seção 13.1.)

9.5.7 A EDO de Laguerre é

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Desenvolva uma solução de série selecionando o parâmetro n para transformar sua série em um polinômio.

9.5.8 Resolva e equação de Chebyshev

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0,$$

por substituição de série. Quais restrições são impostas a n se você exigir que a solução da série convirja para $x = \pm 1$?

Resposta: A série infinita realmente converge para $x = \pm 1$ e não existe nenhuma restrição imposta a n (compare com o Exercício 5.2.16).

9.5.9 Resolva

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0,$$

escolhendo a raiz da equação indicial para obter uma série **ímpar** de potências de x. Uma vez que a série divergirá para $x = 1$, escolha n para convertê-la em um polinômio.

$$k(k-1) = 0.$$

Para $k = 1$,

$$a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+3) - n(n+2)}{(j+2)(j+3)} a_j.$$

9.5.10 Obtenha uma solução de série da equação hipergeométrica

$$x(x-1)y'' + \big[(1+a+b)x - c\big]y' + aby = 0.$$

Teste sua solução para convergência.

9.5.11 Obtenha duas soluções de série da equação hipergeométrica confluente

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$$

Teste suas soluções para convergência.

9.5.12 Uma análise baseada na Mecânica Quântica do efeito de Stark (coordenadas parabólicas) leva à equação diferencial

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{du}{d\xi}\right) + \left(\frac{1}{2}E\xi + \alpha - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4}F\xi^2\right)u = 0.$$

Aqui, α é uma constante de separação, E é a energia total e F é uma constante, em que Fz é a energia potencial acrescentada ao sistema pela introdução de um campo elétrico. Usando a maior raiz da equação indicial, desenvolva uma solução de série de potências em torno de $\xi = 0$. Avalie os três primeiros coeficientes em termos de a_o.

$$\text{Equação indicial} \qquad k^2 - \frac{m^2}{4} = 0,$$

$$u(\xi) = a_0\xi^{m/2}\left\{1 - \frac{\alpha}{m+1}\xi + \left[\frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)} - \frac{E}{4(m+2)}\right]\xi^2 + \cdots\right\}.$$

Note que a perturbação F não aparece até a inclusão de a_3.

9.5.13 Para o caso especial de não haver nenhuma dependência azimutal, a análise de Mecânica Quântica do íon molecular do hidrogênio leva à equação

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right] + \alpha u + \beta\eta^2 u = 0.$$

Desenvolva uma solução de série de potências para $u(\eta)$. Avalie os três primeiros coeficientes que não desaparecem em termos de a_0.

$$\text{Equação indicial} \qquad k(k-1)=0,$$

$$u_{k=1}=a_0\eta\left\{1+\frac{2-\alpha}{6}\eta^2+\left[\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120}-\frac{\beta}{20}\right]\eta^4+\cdots\right\}.$$

9.5.14 Para uma boa aproximação, a interação de dois núcleos pode ser descrita por um potencial mesônico

$$V=\frac{Ae^{-ax}}{x},$$

atrativo para A negativo. Desenvolva uma solução de série da equação de onda de Schrödinger resultante.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+(E-V)\psi=0$$

através dos três coeficientes que não desaparecem.

$$\psi=a_0\left\{x+\tfrac{1}{2}A'x^2+\tfrac{1}{6}\left[\tfrac{1}{2}A'^2-E'-aA'\right]x^3+\cdots\right\},$$

em que "linha" indica multiplicação por $2m/\hbar^2$.

9.5.15 A energia potencial de um elétron próximo ao núcleo de um átomo complexo é dada por

$$V=\frac{Ze^2}{r}\left(1+b_1r+b_2r^2\right),$$

em que os coeficientes b_1 e b_2 surgem de efeitos de *screening*. Para o caso de momento angular zero, mostre que os três primeiros termos da solução da equação de Schrödinger têm a mesma forma que os do Exercício 9.5.14. Por translação adequada de coeficientes ou parâmetros, escreva os três primeiros termos em uma expansão de série da função de onda.

9.5.16 Se o parâmetro a^2 na Equação (9.110d) for igual a 2, a Equação (9.110d) se torna

$$y''+\frac{1}{x^2}y'-\frac{2}{x^2}y=0.$$

Pela equação indicial e pela relação de recorrência, **derive** uma solução $y=1+2x+2x^2$. Verifique que ela é de fato uma solução substituindo-a de volta na equação diferencial.

9.5.17 A função modificada de Bessel $I_0(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}I_0(x)+x\frac{d}{dx}I_0(x)-x^2I_0(x)=0.$$

Pelo Exercício 7.3.4 verifica-se que o termo dominante em uma expansão assintótica é

$$I_0(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Suponha uma série da forma

$$I_0(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+\cdots\right\}.$$

Determine os coeficientes b_1 e b_2.

Resposta: $b_1=\frac{1}{8}$, $b_2=\frac{9}{128}$.

9.5.18 A solução par da série de potências de equação de Legendre é dada pelo Exercício 9.5.5. Considere $a_0=1$ e n um inteiro que não seja par, digamos, $n=0,5$. Calcule as somas parciais da série através de $x^{200},x^{400},x^{600},\ldots,x^{2000}$ para $x=0,95(0,01)1,00$. Além disso, escreva o termo individual correspondente a cada uma dessas potências.
Nota: Esse cálculo **não** constitui prova de convergência em $x=0,99$ ou divergência em $x=1,00$, mas você talvez possa ver a diferença no comportamento da seqüência de somas parciais para esses dois valores de x.