Resposta: $v(t) = v_0 e^{-at}$.

9.2.16 A equação de Bernoulli,

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n,$$

é não-linear para $n \neq 0$ ou 1. Mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear (veja a seção 18.4).

Resposta: $\frac{du}{dx} + (1-n)f(x)u = (1-n)g(x)$.

9.2.17 Resolva a equação linear de primeira ordem, Equação (9.25), admitindo que $y(x) = u(x)v(x)$, onde $v(x)$ é uma solução da equação homogênea correspondente $[q(x) = 0]$. Este é o método de **variação de parâmetros** devido a Lagrange. Aplicamos o método a equações de segunda ordem no Exercício 9.6.25.

9.2.18 (a) Resolva o Exemplo 9.2.1 para uma velocidade inicial $v_i = 60$ mi/h, quando o pára-quedas se abre. Ache $v(t)$. (b) Para um pára-quedista em queda livre, use o coeficiente de atrito $b = 0,25$ kg/m e massa $m = 70$ kg. Qual é a velocidade limitadora neste caso?

9.3 Separação de Variáveis

As equações da Física Matemática listadas na Seção 9.1 são todas equações diferenciais parciais. Nossa primeira técnica para sua solução subdivide a equação diferencial parcial de n variáveis em n equações diferenciais ordinárias. Cada separação introduz uma constante de separação arbitrária. Se temos n variáveis, temos de introduzir $n - 1$ constantes, determinadas pelas condições impostas no problema que estamos resolvendo.

Coordenadas Cartesianas

Em coordenadas cartesianas, a equação de Helmholtz se torna

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0,} \tag{9.34}$$

usando a Equação (2.27) para o laplaciano. No momento, deixe que k^2 seja uma constante. Talvez o modo mais simples de tratar uma equação diferencial parcial como a Equação (9.34) seja subdividi-la em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, o que pode ser feito como segue. Seja

$$\boxed{\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)} \tag{9.35}$$

e substitua essa expressão de volta na Equação (9.34). Como sabemos que a Equação (9.35) é válida? Quando os operadores diferenciais em várias variáveis são aditivos na EDP, isto é, quando não há nenhum produto de operadores diferenciais em variáveis diferentes, o método de separação costuma funcionar. Continuamos a fazer as coisas no espírito do "vamos experimentar para ver se funciona". Se nossa tentativa for bem-sucedida, então a Equação (9.35) será justificada. Se não for bem-sucedida, logo saberemos e então tentaremos um outro ataque, tal como funções de Green, transformadas integrais ou análise numérica de força bruta. Admitindo que ψ seja dada pela Equação (9.35), a Equação (9.34) se torna

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0. \tag{9.36}$$

Dividindo por $\psi = XYZ$ e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}. \tag{9.37}$$

A Equação (9.37) exibe uma separação de variáveis. O lado esquerdo é uma função de x apenas, ao passo que o lado direito depende somente de y e z e não de x. Mas x, y e z são todas coordenadas independentes. O fato de a igualdade de ambos os lados depender de variáveis diferentes significa que o comportamento de x como uma variável independente não é determinado por y e z. Por conseguinte, cada lado deve ser igual a uma constante, uma constante de separação. Escolhemos[2]

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -l^2, \tag{9.38}$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -l^2. \tag{9.39}$$

Agora, voltando nossa atenção para a Equação (9.39), obtemos

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}, \tag{9.40}$$

e conseguimos uma segunda separação. Agora temos uma função de y igualada a uma função de z, como antes. Nós a resolvemos, como antes, igualando cada lado a uma outra constante de separação, ^{2} $-m^2$,

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2, \tag{9.41}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2, \tag{9.42}$$

introduzindo uma constante n^2 por $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ para produzir um conjunto simétrico de equações. Agora temos três EDOs ((9.38), (9.41) e (9.42)) para substituir a Equação (9.34). Nossa suposição (Equação (9.35)) foi bem-sucedida e, por conseguinte, justificada.

Nossa solução deve ser rotulada de acordo com a escolha que fizemos das constantes l, m e n, isto é,

$$\psi_{lm}(x, y, z) = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z). \tag{9.43}$$

Contanto que sujeitos às condições do problema que está sendo resolvido e à condição $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$, podemos escolher l, m e n como quisermos, e a Equação (9.43) ainda será uma solução da Equação (9.34), contanto que $X_l(x)$ seja uma solução da Equação (9.38), e assim por diante. Nós desenvolvemos **a solução mais geral** da Equação (9.34) considerando uma **combinação linear de soluções** ψ_{lm},

$$\Psi = \sum_{l,m} a_{lm}\psi_{lm}. \tag{9.44}$$

Por fim, os coeficientes da constante a_{lm} são escolhidos de modo a permitir que Ψ satisfaça as condições de fronteira do problema, que, como regra, leva a um conjunto discreto de valores l, m.

Coordenadas Cilíndricas Circulares

Como nossa função desconhecida ψ depende de ρ, φ e z, a equação de Helmholtz se torna (veja a Seção 2.4 para ∇^2)

$$\nabla^2\psi(\rho, \varphi, z) + k^2\psi(\rho, \varphi, z) = 0, \tag{9.45}$$

ou

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0. \tag{9.46}$$

Como antes, admitimos uma forma fatorada para ψ,

$$\boxed{\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).} \tag{9.47}$$

Substituindo na Equação (9.46), temos

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + \frac{PZ}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + P\Phi\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2P\Phi Z = 0. \tag{9.48}$$

[2]A escolha de sinal, completamente arbitrária aqui, em problemas específicos será fixada pela necessidade de satisfazer condições de contorno específicas.

Todas as derivadas parciais se tornaram derivadas ordinárias. Dividindo por $P\Phi Z$ e passando a derivada z para o lado direito, temos como resultado

$$\frac{1}{\rho P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}. \tag{9.49}$$

Novamente, uma função de z do lado direito parece depender de uma função de ρ e φ do lado esquerdo. Resolvemos isso igualando cada lado da equação (9.49) à mesma constante. Vamos escolher[3] $-l^2$. Então,

$$\frac{d^2Z}{dz^2}=l^2Z \tag{9.50}$$

e

$$\frac{1}{\rho P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2=-l^2. \tag{9.51}$$

Fazendo $k^2+l^2=n^2$, multiplicando por ρ^2, e rearranjando termos, obtemos

$$\frac{\rho}{P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+n^2\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}. \tag{9.52}$$

Podemos estabelecer o lado direito para m^2 e

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi. \tag{9.53}$$

Por fim, para a dependência de ρ, temos

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+\left(n^2\rho^2-m^2\right)P=0. \tag{9.54}$$

Essa é a equação diferencial de Bessel. As soluções e suas propriedades são apresentadas no Capítulo 11. A separação de variáveis da equação de Laplace em coordenadas parabólicas também dá origem à equação de Bessel. Podemos observar que a equação de Bessel é notória pela variedade de disfarces sob os quais pode aparecer. Se o leitor quiser uma tabulação extensiva de possíveis formas, pode consultar *Tables of Functions* por Jahnke e Emde.[4]

A equação de Helmholtz original, uma EDP tridimensional, foi substituída por três EDOs, Equações (9.50), (9.53) e (9.54). Uma solução da equação de Helmholtz é

$$\psi(\rho,\varphi,z)=P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z). \tag{9.55}$$

Identificando as soluções específicas P, Φ, Z por índices, vemos que a solução mais geral da equação de Helmholtz é uma combinação linear das soluções de produto:

$$\Psi(\rho,\varphi,z)=\sum_{m,n}a_{mn}P_{mn}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_n(z). \tag{9.56}$$

Coordenadas Polares Esféricas

Vamos tentar separar a equação de Helmholtz, mais uma vez com k^2 constante, em coordenadas polares esféricas. Usando a Equação (2.48), obtemos

$$\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]=-k^2\psi. \tag{9.57}$$

Agora, por analogia com a Equação (9.35), experimentamos

$$\boxed{\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).} \tag{9.58}$$

[3]A escolha de sinal da constante de separação é arbitrária. Contudo, escolhemos um sinal de menos para a coordenada axial z na expectativa de uma possível dependência exponencial de z (pela Equação (9.50)). Escolhemos um sinal positivo para a coordenada azimutal φ na expectativa de uma dependência periódica de φ (pela Equação (9.53)).

[4]E. Jahnke e F. Emde, *Tables of functions*, 4ª. ed. revista, Nova York: Dover (1945), p. 146; também E. Jahnke, F. Emde e F. Lösch, *Tables of Higher Functions*, 6ª ed., Nova York: McGraw-Hill (1960).

Substituindo de volta na Equação (9.57) e dividindo por $R\Theta\Phi$, temos

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\,\mathrm{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-k^2. \tag{9.59}$$

Note que, agora, todas as derivadas são derivadas ordinárias em vez de parciais. Multiplicando por r^2 $mboxsen^2\theta$, podemos isolar $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\varphi^2)$ para obter[5]

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\left[-k^2-\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right]. \tag{9.60}$$

A Equação (9.60) relaciona uma função apenas de φ a uma função de r e de θ apenas. Uma vez que r, θ e φ são variáveis independentes, igualamos cada lado da Equação (9.60) a uma constante. Em quase todos os problemas físicos φ aparecerá como um ângulo de azimute. Isso sugere uma solução periódica em vez de uma exponencial. Com isso em mente, vamos usar $-m^2$ como a constante de separação que, nesse caso, deve ser um inteiro ao quadrado. Então,

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-m^2 \tag{9.61}$$

e

$$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}=-k^2. \tag{9.62}$$

Multiplicando a Equação (9.62) por r^2 e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+r^2k^2=-\frac{1}{\mathrm{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta}. \tag{9.63}$$

Mais uma vez, as variáveis são separadas. Igualamos cada lado a uma constante, Q, e finalmente obtemos

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta}\Theta+Q\Theta=0, \tag{9.64}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R-\frac{QR}{r^2}=0. \tag{9.65}$$

Mais uma vez substituímos a equação diferencial parcial de três variáveis por três EDOs. As soluções dessas EDOs são discutidas nos Capítulos 11 e 12. No Capítulo 12, por exemplo, a Equação (9.64) é identificada como a equação associada de Legendre, na qual a constante Q se torna $l(l+1)$; l é um inteiro não-negativo porque θ é uma variável angular. Se k^2 é uma constante (positiva), a Equação (9.65) se torna a equação esférica de Bessel da Seção 11.7.

Novamente, nossa solução mais geral pode ser escrita

$$\psi_{Qm}(r,\theta,\varphi)=\sum_{Q,m}a_{Qm}R_Q(r)\Theta_{Qm}(\theta)\Phi_m(\varphi). \tag{9.66}$$

A restrição de que k^2 seja uma constante é desnecessariamente severa. O processo de separação ainda será possível para k^2 tão geral quanto

$$k^2=f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}h(\varphi)+k'^2. \tag{9.67}$$

No problema do átomo de hidrogênio, um dos exemplos mais importantes da equação de onda de Schrödinger com uma solução de forma fechada é $k^2=f(r)$, com k^2 independente de θ, φ. A Equação (9.65) para o átomo de hidrogênio se torna a equação associada de Laguerre.

A grande importância dessa separação de variáveis em coordenadas polares esféricas se origina do fato de que o caso $k^2=k^2(r)$ abrange uma imensa parte da Física: uma grande quantidade das teorias de gravitação, eletrostática e da física atômica, nuclear e de partículas. Além disso, com $k^2=k^2(r)$, a dependência angular é isolada nas Equações (9.61) e (9.64), **que podem ser resolvidas exatamente.**

[5]Aqui, a ordem na qual as variáveis são separadas não é única. Muitos textos de Mecânica Quântica mostram primeiro a subdivisão da dependência de r.

Por fim, para ilustrar como a constante m na Equação (9.61) é restrita, observamos que φ em coordenadas polares esféricas e cilíndricas é um ângulo de azimute. Se este é um problema clássico, certamente vamos exigir que a solução azimutal $\Phi(\varphi)$ seja de valor único; isto é,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{9.68}$$

Isso equivale a exigir que a solução azimutal tenha um período de 2π.[6] Por conseguinte, m deve ser um inteiro. Qual inteiro será depende dos detalhes do problema. Se o inteiro $|m| > 1$, então Φ terá o período $2\pi/m$. Sempre que uma coordenada corresponde a um eixo de translação ou a um ângulo de azimute, a equação separada tem a forma

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi)$$

para φ, o ângulo de azimute, e

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \pm a^2 Z(z) \tag{9.69}$$

para z, um eixo de translação do sistema de coordenadas cilíndricas. Claro que as soluções são senaz e cos az, para $-a^2$, e a função hiperbólica correspondente (ou exponenciais) sen haz e cos haz para, $+a^2$.

Tabela 9.2 Soluções em coordenadas polares esféricas[a]

	$\psi = \sum_{l,m} a_{lm}\psi_{lm}$	
1.	$\nabla^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}$ [b]
2.	$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}$ [b]
3.	$\nabla^2\psi - k^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} i_l(kr) \\ k_l(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}$ [b]

[a] Referências para algumas das funções $P_l^m(\cos\theta), m = 0$, Seção 12.1; $m \neq 0$, Seção 12.5; $Q_l^m(\cos\theta)$, Seção 12.10; $j_l(kr), n_l(kr), i_l(kr)$, e $k_l(kr)$, Seção 11.7.
[b] $\cos m\varphi$ e sen$m\varphi$ podem ser substituídos por $e^{\pm im\varphi}$.

Entre outras EDOs que aparecem de vez em quando estão as equações de Laguerre e as equações associadas de Laguerre do problema de suprema importância do átomo de hidrogênio na Mecânica Quântica:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0, \tag{9.70}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1+k-x)\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0. \tag{9.71}$$

Pela teoria da Mecânica Quântica do oscilador linear, temos a equação de Hermite

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0. \tag{9.72}$$

Por fim, de vez em quando encontramos a equação diferencial de Chebyshev,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0. \tag{9.73}$$

Para referência conveniente, as formas das soluções da equação de Laplace, da equação de Helmholtz e da equação de difusão para coordenadas polares esféricas estão reunidas na Tabela 9.2. As soluções da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas circulares são apresentadas na Tabela 9.3.

[6] Isso também se aplica à maioria dos problemas de Mecânica Quântica, mas o argumento é muito mais complicado. Se m não for um inteiro, as relações de grupo de rotação e as relações de operador progressivo (Seção 4.3) são rompidas. Compare com E. Merzbacher, Single valuedness of wave functions. *Am. J. Phys.* 30: 237 (1962).

Propriedades gerais que resultam da forma das equações diferenciais são discutidas no Capítulo 10. As soluções individuais são desenvolvidas e aplicadas nos Capítulos 11-13.

O físico praticante pode encontrar, e provavelmente encontrará, outras EDOs de segunda ordem, algumas das quais talvez seja possível transformar nos exemplos estudados aqui. Algumas dessas EDOs podem ser resolvidas pelas técnicas das Seções 9.5 e 9.6. Outras talvez precisem de um computador para uma solução numérica.

Tabela 9.3 Soluções em coordenadas cilíndricas circulares

$$\psi = \sum_{m,\alpha} a_{m\alpha}\psi_{m\alpha}$$

a.	$\nabla^2\psi + \alpha^2\psi = 0$	$\psi_{m\alpha} = \left\{\begin{matrix} J_m(\alpha\rho) \\ N_m(\alpha\rho) \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} e^{-\alpha z} \\ e^{\alpha z} \end{matrix}\right\}$
b.	$\nabla^2\psi - \alpha^2\psi = 0$	$\psi_{m\alpha} = \left\{\begin{matrix} I_m(\alpha\rho) \\ K_m(\alpha\rho) \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \cos \alpha z \\ \operatorname{sen} \alpha z \end{matrix}\right\}$
c.	$\nabla^2\psi = 0$	$\psi_{m} = \left\{\begin{matrix} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{matrix}\right\}$

[a]Referências para as funções radiais são $J_m(\alpha\rho)$, Seção 11.1; $N_m(\alpha\rho)$, Seção 11.3; $I_m(\alpha\rho)$ e $K_m(\alpha\rho)$, Seção 11.5.

Referimo-nos à segunda edição deste texto para outros importantes sistemas de coordenadas.

- Para colocar em perspectiva o método de separação para resolver EDPs, vamos revisá-lo como uma conseqüência de uma simetria da EDP. Considere como exemplo a equação estacionária de Schrödinger $H\psi = E\psi$ com um potencial $V(r)$ que depende somente da distância radial r. Então, essa EDP é invariante sob rotações que compreendem um grupo SO(3). Seu gerador diagonal é o operador de momento angular orbital $L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, e sua invariante quadrática (de Casimir) é $\mathbf{L}^2$. Visto que ambas comutam com H (veja a Seção 4.3), acabamos com três equações de autovalor separadas:

$$H\psi = E\psi, \qquad \mathbf{L}^2\psi = l(l+1)\psi, \qquad L_z\psi = m\psi.$$

Substituindo L_z^2 em $\mathbf{L^2}$ por seu autovalor m^2, a EDO para $\mathbf{L}^2$ se torna a EDO de Legendre e, de modo semelhante, $H\psi = E\psi$ se torna a EDO radial do método de separação em coordenadas polares esféricas.

- Para coordenadas cilíndricas, a EDP é invariante sob rotações em torno do eixo z somente, o que forma um subgrupo de SO(3). Essa invariância resulta no gerador $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ e na EDO azimutal separada $L_z\psi = m\psi$, como antes. Se o potencial V for invariante sob translações ao longo do eixo z, então o gerador $-i\partial/\partial z$ dá a EDO separada na variável z.
- Em geral (veja a Seção 4.3), há n geradores mutuamente comutativos H_i, com autovalores m_i do (clássico) grupo de Lie, G de ordem n e as invariantes de Casimir correspondentes C_i com autovalores c_i, que resultam nas EDOs separadas

$$H_i\psi = m_i\psi, \qquad C_i\psi = c_i\psi\ ,$$

além da EDO $H\psi = E\psi$ (agora) radial.

Exercícios

9.3.1 Deixando o operador $\nabla^2 + k^2$ agir sobre a forma geral $a_1\psi_1(x,y,z) + a_2\psi_2(x,y,z)$, mostre que ela é linear, isto é, que $(\nabla^2 + k^2)(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1\,(\nabla^2 + k^2)\psi_1 + a_2\,(\nabla^2 + k^2)\psi_2$.

9.3.2 Mostre que a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0,$$

ainda é separável em coordenadas cilíndricas circulares se k^2 for generalizada para $k^2 + f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)$.

9.3.3 Separe variáveis na equação de Helmholtz em coordenadas polares esféricas, subdividindo **em primeiro lugar** a dependência radial. Mostre que suas equações separadas têm a mesma forma que as Equações (9.61), (9.64) e (9.65).

9.3.4 Verifique que

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}h(\varphi)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

é separável (em coordenadas polares esféricas). As funções f, g e h são funções só das duas variáveis indicadas; k^2 é uma constante.

9.3.5 Uma partícula atômica (na Mecânica Quântica) está confinada dentro de uma caixa retangular de lados a, b e c. A partícula é descrita por uma função de onda ψ que satisfaz a equação de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi.$$

A função de onda deve se anular em cada superfície da caixa (mas não para ser identicamente zero). Essa condição impõe restrições às constantes de separação e, portanto, à energia E. Qual é o menor valor de E para o qual tal solução pode ser obtida?

Resposta: $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$.

9.3.6 Para um sólido esférico homogêneo com difusibilidade térmica constante K, e nenhuma fonte de calor, a equação de condução de calor se torna

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = K\nabla^2 T(r,t).$$

Admita uma solução da forma

$$T = R(r)T(t)$$

e separe variáveis. Mostre que a equação radial pode assumir a forma padrão

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \left[\alpha^2 r^2 - n(n+1)\right]R = 0;\ n = \text{inteiro}.$$

As soluções dessa equação são denominadas **funções esféricas de Bessel**.

9.3.7 Separe variáveis na equação de difusão do Exercício 9.3.6 em coordenadas cilíndricas circulares. Admita que você pode desprezar efeitos finais e considere $T = T(\rho, t)$.

9.3.8 O operador de momento angular da mecânica quântica é dado por $\mathbf{L} = -i\,(\mathbf{r} \times \nabla)$. Mostre que

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}\psi = l(l+1)\psi$$

leva à equação associada de Legendre.
Sugestão: Os Exercícios 1.9.9 e 2.5.16 podem ajudar.

9.3.9 A equação de onda unidimensional de Schrödinger para uma partícula em um campo de potencial $V = \frac{1}{2}kx^2$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi(x).$$

(a) Usando $\xi = ax$ e uma constante λ, temos

$$a = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}, \qquad \lambda = \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2};$$

mostre que

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0.$$

(b) Substituindo

$$\psi(\xi) = y(\xi)e^{-\xi^2/2},$$

mostre que $y(\xi)$ satisfaz a equação diferencial de Hermite.