9.3.10 Verifique que as seguintes são soluções da equação de Laplace:

$$\text{(a) } \psi_1 = 1/r,\ r \neq 0, \qquad \text{(b) } \psi_2 = \frac{1}{2r}\ln\frac{r+z}{r-z}.$$

Nota: As z derivadas de $1/r$ geram os polinômios de Legendre, $P_n(\cos\theta)$, Exercício 12.1.7. As z derivadas de $(1/2r)\ln[(r+z)/(r-z)]$ geram as funções de Legendre, $Q_n(\cos\theta)$.

9.3.11 Se Ψ é uma solução da equação de Laplace, $\nabla^2\Psi = 0$, mostre que $\partial\Psi/\partial z$ também é uma solução.

9.4 Pontos Singulares

Nesta seção apresentamos o conceito de ponto singular ou singularidade (como aplicado a uma equação diferencial). O interesse nesse conceito surge de sua utilidade para (1) classificar EDOs e (2) investigar a viabilidade de uma solução de série. Essa viabilidade é o tópico do teorema de Fuchs, Seções 9.5 e 9.6.

Todas as EDOs listadas na Seção 9.3 podem ser resolvidas para d^2y/dx^2. Usando a notação $d^2y/dx^2 = y''$, temos[7]

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{9.74}$$

Se escrevermos nossa equação diferencial homogênea de segunda ordem (em y) como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{9.75}$$

estamos prontos para definir pontos ordinários e singulares. Se as funções $P(x)$ e $Q(x)$ permanecerem finitas em $x = x_0$, o ponto $x = x_0$ será um ponto ordinário. Contudo, se $P(x)$ ou $Q(x)$ (ou ambos) divergir à medida que $x \to x_0$, o ponto x_0 será um ponto singular. Usando a Equação (9.75), podemos distinguir entre duas espécies de pontos, singulares.

1. Se $P(x)$ ou $Q(x)$ divergir, à medida que $x \to x_0$, mas $(x - x_0)P(x)$ e $(x - x_0)^2Q(x)$ permanecerem finitas, à medida que $x \to x_0$, então $x = x_0$ será denominado ponto singular **regular** ou não-essencial.
2. Se $P(x)$ divergir mais rapidamente do que $1/(x - x_0)$, de modo que $(x - x_0)P(x)$ vai ao infinito, à medida que $x \to x_0$ ou $Q(x)$ divergir mais rapidamente do que $1/(x - x_0)^2$, de modo que $(x - x_0)^2Q(x)$ vai ao infinito, à medida que $x \to x_0$, então o ponto $x = x_0$ será denominado **singularidade irregular** ou **essencial.**

Essas definições são válidas para todos os valores finitos de x_0. A análise do ponto $x \to \infty$ é semelhante ao tratamento de funções de uma variável complexa (Seção 6.6). Estabelecemos $x = 1/z$, substituímos na equação diferencial e então deixamos que $z \to 0$. Trocando variáveis nas derivadas, temos

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy(z^{-1})}{dz} = -z^2\frac{dy(z^{-1})}{dz}, \tag{9.76}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dz}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]\frac{dz}{dx} = (-z^2)\left[-2z\frac{dy(z^{-1})}{dz} - z^2\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}\right] \\ &= 2z^3\frac{dy(z^{-1})}{dz} + z^4\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}.\end{aligned} \tag{9.77}$$

Usando esses resultados, transformamos a Equação (9.75) em

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2} + \left[2z^3 - z^2P(z^{-1})\right]\frac{dy}{dz} + Q(z^{-1})y = 0. \tag{9.78}$$

Nesse caso, o comportamento de $x = \infty (z = 0)$ depende do comportamento dos novos coeficientes,

$$\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} \quad \text{e} \quad \frac{Q(z^{-1})}{z^4},$$

à medida que $z \to 0$. Se essas duas expressões permanecerem finitas, o ponto $x = \infty$ é um ponto ordinário. Se elas divergirem não mais rapidamente do que $1/z$ e $1/z^2$, respectivamente, o ponto $x = \infty$ será um ponto singular regular; caso contrário, será um ponto singular irregular (uma singularidade essencial).

[7] Essa notação "com linha", $y' = dy/dx$, foi introduzida por Lagrange no final do século XVIII como uma abreviação para a notação de Leibniz, mais explícita, porém mais trabalhosa, dy/dx.

Exemplo 9.4.1

A equação de Bessel é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{9.79}$$

Comparando-a com a Equação (9.75), temos

$$P(x) = \frac{1}{x}, \qquad Q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2},$$

Tabela 9.4

	Equação	Singularidade Regular $x =$	Singularidade Irregular $x =$
1.	Hipergeométrica $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x - c]y' + aby = 0.$	$0, 1, \infty$	-
2.	Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$	$-1, 1, \infty$	-
3.	Chebyshev $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$	$-1, 1, \infty$	-
4.	Hipergeométrica confluente $xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$	0	∞
5.	Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$	0	∞
6.	Laguerre[a] $xy'' + (1 x)y' + ay = 0.$	0	∞
7.	Oscilador harmônico simples $y'' + \omega^2 y = 0.$	-	∞
8.	Hermite $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$	-	∞

[a] As equações associadas têm os mesmos pontos singulares.

o que mostra que o ponto $x = 0$ é uma singularidade regular. Por inspeção, vemos que não há outros pontos singulares na faixa finita. À medida que $x \to \infty (z \to 0)$, temos, pela Equação (9.78), os coeficientes

$$\frac{2z - z}{z^2} \quad \text{e} \quad \frac{1 - n^2z^2}{z^4}.$$

Uma vez que a última expressão diverge como z^4, o ponto $x = \infty$ é uma singularidade irregular, ou essencial. ■

As equações diferenciais ordinárias da Seção 9.3, mais duas outras equações, a hipergeométrica e a hipergeométrica confluente, têm pontos singulares, como mostra a Tabela 9.4.

Veremos que todas as primeiras três equações da Tabela 9.4, hipergeométrica, Legendre e Chebyshev, têm três pontos singulares regulares. A equação hipergeométrica, com singularidades regulares em 0, 1 e ∞ é considerada o padrão, a forma canônica. Então, as soluções das outras duas podem ser expressas em termos das soluções dela, as funções hipergeométricas, o que faremos no Capítulo 13.

De modo semelhante, a equação hipergeométrica confluente é considerada a forma canônica de uma equação diferencial linear de segunda ordem com um ponto singular regular e um ponto singular irregular.

Exercícios

9.4.1 Mostre que a equação de Legendre tem singularidades regulares em $x = -1$, 1, e ∞.

9.4.2 Mostre que a equação de Laguerre, assim como a equação de Bessel, tem uma singularidade regular em $x = 0$ e uma singularidade irregular em $x = \infty$.

9.4.3 Mostre que a substituição

$$x \to \frac{1-x}{2}, \qquad a = -l, \qquad b = l + 1, \qquad c = 1$$

converte a equação hipergeométrica na equação de Legendre.