

Calculando o lado esquerdo explicitamente

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 - \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{t},$$

usando a fórmula do binômio

$$\sqrt{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{3}{2}-k)} t^{2k},$$

e fazendo $2k-1=l$, obtemos

$$1 - \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = 1 + \sum_{l=\text{ímpar}}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(l/2 + \frac{3}{2})\Gamma(1-l/2)} t^l,$$

de maneira que

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + l/2)\Gamma(1-l/2)} \quad (l = 1, 3, 5, \dots)$$

e

$$A_l = \frac{1}{a^l} (2l+1)V \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + l/2)\Gamma(1-l/2)} \quad (l = 1, 3, 5, \dots).$$

A série resultante

$$\varphi(r, \theta) = V \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{(2l+1)(\sqrt{\pi}/2)}{\Gamma[(3+l)/2]\Gamma[(2-l)/2]} P_l(\cos \theta)$$

é uniformemente convergente para todos os $r \leq r_1 < a$ (mesmo que r_1 esteja próximo de a , a convergência é lenta) e satisfaz todas as condições do problema.

9.7 AS FUNÇÕES DE BESSEL

O estudo da EDP de Helmholtz no sistema de coordenadas cilíndrico nos conduziu à equação diferencial ordinária de Bessel

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0.$$

O parâmetro m é muito freqüentemente um inteiro (veja a Seção 8.2, Exemplo 1), mas, por vezes, isso não acontece. Estudaremos o caso geral em que m é um número real arbitrário, que pode ser considerado não-negativo. Para enfatizar isso, usaremos o símbolo μ em vez de m .*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Esta é a equação diferencial de Bessel de ordem μ . Suas soluções são conhecidas

*Adotaremos a convenção de representar escalares arbitrários por letras gregas e inteiros (não-negativos) por letras latinas.

como *funções cilíndricas*; entre estas, as mais bem conhecidas são as funções de Bessel.

Observação. Se μ for fixo, então a equação diferencial de Bessel não parecerá ser uma equação característica. Lembre-se, no entanto, que ela pode provir (Seção 9.2) de

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right) R = 0,$$

que é uma equação característica, se procurarmos determinar k^2 a partir das condições de contorno impostas a R . O autovalor foi "suprimido" pela substituição $x = kr$. Estudaremos, em primeiro lugar, as funções cilíndricas como funções de x e, mais tarde, voltaremos ao problema do autovalor para a função $R(r)$.

Considere a solução da equação diferencial de Bessel sob a forma de uma série de Frobenius,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}.$$

Reescreva a equação sob a forma

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \mu^2)y = 0,$$

e substitua na série. A equação indicial será

$$a_0(s^2 - \mu^2) = 0$$

e fornecerá as raízes $s = +\mu$ e $s = -\mu$. A fórmula de recorrência

$$a_n = -\frac{1}{(s+\mu+n)(s-\mu+n)} a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

reduz-se à fórmula

$$a_n = -\frac{1}{(2\mu+n)n} a_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

no caso em que $s = \mu$, e daí seguem-se todos os coeficientes pares, a partir de a_0 . Para coeficientes ímpares, a equação para a_1 será

$$a_1[(s+1)^2 - \mu^2] = a_1(2\mu+1) = 0;$$

isso exige que $a_1 = 0$, o que, por sua vez, implica que todos os coeficientes ímpares se anulam. A solução é uma função par de x , multiplicada por x^μ . Por conveniência, faça $n = 2k$; então

$$a_{2k} = -\frac{1}{2^2 k(\mu+k)} a_{2k-2} \quad (k \geq 1).$$

Aplique esta fórmula k vezes para exprimir a_{2k} em função de a_0 :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} k! (\mu+1)(\mu+2) \cdots (\mu+k)} a_0.$$

É costume, e conveniente, padronizar as soluções escolhendo

$$a_0 = \frac{1}{2^\mu \Gamma(1 + \mu)}.$$

Use, agora, $\Gamma(\mu + 1)(\mu + 1)(\mu + 2) \dots (\mu + k) = \Gamma(\mu + k + 1)$ e obtenha uma série explícita para a solução $y_1(x)$, que é representada por $J_\mu(x)$ e chamada de *função de Bessel de ordem μ* (da primeira espécie):

$$J_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\mu + k + 1) 2^{\mu+2k}} x^{\mu+2k}.$$

A série converge para todos os valores de x , não importa qual o valor de μ (pelo teste da razão). Se μ for um inteiro ($\mu = m$), então $J_\mu(x)$ é unívoca, e a série acima é uma série de Maclaurin. Se μ não for um inteiro, então $J_\mu(x)$ possuirá um ponto de ramificação na origem. Os ramos de $J_\mu(x)$ são determinados pelos ramos de x^μ e sua quantidade pode ser finita (μ racional) ou infinita (μ irracional). É interessante observar que se fizermos μ variar continuamente, então $J_\mu(x)$ será uma *função contínua de μ* para qualquer x fixo não-nulo* (uma série uniformemente convergente de funções contínuas).

Considere agora a segunda solução da equação de Bessel. A raiz $s = -\mu$ fornecerá

$$a_1[(s + 1)^2 - \mu^2] = a_1(1 - 2\mu) = 0,$$

Juntamente com

$$a_n = -\frac{1}{n(n - 2\mu)} a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Vemos, imediatamente, que surgirão algumas dificuldades quando (a) μ é um inteiro, e (b) μ é um *meio-inteiro*.† No entanto, consideremos em primeiro lugar o caso em que μ não é nenhum dos dois casos acima. Segue-se, então, que $a_1 = 0$ e todos os coeficientes ímpares se anulam, enquanto que todos os coeficientes pares ficam bem definidos pela fórmula de recorrência, dando origem a uma solução que possui a mesma forma que $J_\mu(x)$, com a diferença de que μ será substituído por $-\mu$. Esta solução é chamada de *função de Bessel (de primeira espécie) de ordem $-\mu$* :

$$J_{-\mu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k - \mu + 1) 2^{2k-\mu}} x^{2k-\mu}.$$

Pode-se mostrar que $J_{-\mu}(x)$ é linearmente independente de $J_\mu(x)$ (os termos líderes são x^μ e $x^{-\mu}$, respectivamente) e a solução geral da equação de Bessel será

$$y(x) = c_1 J_\mu(x) + c_2 J_{-\mu}(x) \quad (\mu \neq \text{inteiro}, \mu \neq \text{meio-inteiro}).$$

Considere agora o caso em que μ é um meio inteiro. Então, 2μ será um inteiro ímpar. A fórmula de recorrência define todos os coeficientes pares em termos de a_0 , exatamente como antes. No entanto, não funcionará para os coeficientes ímpares: Enquanto que $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2\mu-2}$ devem ser nulos, isso não é necessariamente verdadeiro para $a_{2\mu}$ (Se $\mu = 1/2$, o fenômeno aparece imediatamente com a_1). No entanto, não há nada

*Poderíamos ter escrito $J(\mu, x)$, mas $J_\mu(x)$ é tradicional.

†Ou seja, $1/2, 3/2, 5/2, \dots$. Rigorosamente falando, deveríamos dizer "metade de um inteiro ímpar", mas a terminologia acima é muito comum entre os físicos.

que nos impeça de fazer $a_{2\mu} = 0$ por *nossa própria escolha*. Se isso for feito, então todos os coeficientes ímpares subseqüentes deverão ser nulos e poderemos definir $J_{-\mu}(x)$ exatamente pela mesma fórmula de antes. A vantagem óbvia desta escolha é que $J_{-\mu}(x)$ permanece uma função contínua de μ , quando μ passa por um valor meio-inteiro. É ainda verdade que $J_{-\mu}(x)$ é linearmente independente de $J_\mu(x)$ e ainda temos a solução geral

$$y(x) = c_1 J_\mu(x) + c_2 J_{-\mu}(x) \quad (\mu = \text{meio-inteiro}).$$

Finalmente, suponha que μ seja um inteiro. Tentamos, mais uma vez, preservar a continuidade de $J_{-\mu}(x)$ com relação a μ . Podemos eliminar todos os coeficientes ímpares como acima, mas teremos dificuldades para definir o coeficiente a_0 . A razão é que $\Gamma(-\mu + 1) = \infty$ sempre que μ é um inteiro positivo.*

Naturalmente, poderíamos respeitar a fórmula de a_0 , que implica

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k - \mu + 1) 2^{2k-\mu}},$$

desde que adotemos a convenção lógica de que $a_{2k} = 0$ para $k < \mu$ [pois $\Gamma(k - \mu + 1)$ possui um pólo]. Este recurso preservará a fórmula para $J_{-\mu}(x)$ juntamente com a continuidade de $J_{-\mu}(x)$ com relação a μ , mas a soma deverá agora, em verdade, principiar com $k = m$.†

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k - m + 1) 2^{2k-m}} x^{-m+2k}.$$

Mudando a variável do somatório por $k = k' + m$, obtemos

$$J_{-m}(x) = \sum_{k'=0}^{\infty} (-1)^{m+k'} \frac{1}{k'! \Gamma(k' + m + 1) 2^{2k'+m}} x^{m+2k'}.$$

No entanto, isso nada mais é do que $(-1)^m J_m(x)$. Concluimos que, em nossa tentativa de preservar a continuidade de $J_{-\mu}(x)$, perdemos infelizmente a independência linear das soluções $J_\mu(x)$ e $J_{-\mu}(x)$.

Este comportamento se deve ao fato de que, quando as raízes da equação indicial diferem por um inteiro, uma das soluções da equação diferencial de Bessel pode possuir singularidades logarítmicas (veja a Seção 3.5, Exemplo 4). Com efeito, para o caso $\mu = m = \text{inteiro}$, a segunda solução pode ser procurada (e obtida) sob a forma

$$y_2(x) = \log x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{s+n} + \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{r+p}.$$

Dependendo da padronização, tais soluções são conhecidas como *funções de Bessel da segunda espécie*, representadas por $Y_m(x)$, ou *funções de Neumann*, representadas por $N_m(x)$.‡ Adiamos o tratamento destas soluções para uma seção posterior; por enquanto, acharemos algumas das propriedades das funções $J_\mu(x)$.

Segue-se, da série de Frobenius para $J_\mu(x)$, que

$$J_\mu(x) = x^\mu f(x),$$

*Se $\mu = 0$, então $J_\mu(x)$ será idêntico a $J_{-\mu}(x)$, e deveremos procurar a segunda solução de outra maneira.

†Fazemos agora $\mu = m$, de acordo com nossa convenção sobre letras gregas e latinas.

‡Alguns autores, contudo, usam o símbolo $Y_m(x)$ para representar as funções de Neumann.

em que $f(x)$ é uma função par analítica, que não se anula na origem. Portanto, $J_\mu(0) = 0$, exceto se $\mu = 0$, caso em que $J_0(0) = 1$.

A derivada de $f(x)$ será

$$f'(x) = \left(\frac{J_\mu(x)}{x^\mu} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k-1)! \Gamma(k+\mu+1) 2^{2k+\mu}} x^{2k-1}$$

e poderá ser relacionada com $J_{\mu+1}(x)$: Substitua k por $k+1$ e verifique que

$$f'(x) = -\frac{J_{\mu+1}(x)}{x^\mu},$$

o que deduz uma fórmula útil:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\mu(x)}{x^\mu} \right] = -\frac{J_{\mu+1}(x)}{x^\mu} \quad (\mu \geq 0).$$

Semelhantemente, não é difícil verificar que

$$\frac{d}{dx} [x^\mu J_\mu(x)] = x^\mu J_{\mu-1}(x) \quad (\mu \geq 1).$$

Combinando estas duas relações, deduzimos as fórmulas de recorrência

$$J_{\mu+1}(x) + J_{\mu-1}(x) = \frac{2\mu}{x} J_\mu(x)$$

$$J_{\mu+1}(x) - J_{\mu-1}(x) = -2 \frac{dJ_\mu(x)}{dx} \quad (\mu \geq 1).$$

Fica agora claro que muitas outras relações de recorrência, incluindo a fórmula de diferenciação e as operações de elevar e baixar ordem podem ser deduzidas para as funções de Bessel.[†] A relação

$$\frac{J_{\mu+1}(x)}{x^\mu} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\mu(x)}{x^\mu} \right] \quad (\mu \geq 0)$$

nos permite deduzir uma fórmula interessante que exprime $J_m(x)$ em função de $J_0(x)$ [ou, em geral, $J_\mu(x)$ em termos de $J_{\mu-k}(x)$]. Dividindo a equação acima por x , obtemos

$$\frac{J_{\mu+1}(x)}{x^{\mu+1}} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\frac{J_\mu(x)}{x^\mu} \right],$$

que mostra o que devemos fazer com $J_\mu(x)/x^\mu$ a fim de obter uma razão semelhante de ordem imediatamente superior, ou seja $J_{\mu+1}(x)/x^{\mu+1}$. Começando com $\mu = 0$ e aplicando esta regra m vezes, obtemos

$$\frac{J_m(x)}{x^m} = \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m [J_0(x)], \quad \text{ou} \quad J_m(x) = x^m \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m J_0(x),$$

[†]Observe que são válidas para todos os valores de μ e não estão ligadas a nenhum problema de autovalores. O mesmo acontece com as soluções da equação de Legendre, embora as demonstrações da Seção 8.5 tenham sido aplicadas somente para l = inteiro (devido ao uso da função geradora).

que significa que o operador diferencial $-(1/x)(d/dx)$ deve ser aplicado m vezes a $J_0(x)$, e o resultado multiplicado por x^m para obtermos $J_m(x)$. Observe a semelhança com a fórmula de Rodrigues para $P_l(x)$, onde o operador diferencial mais simples, d/dx , é aplicado l vezes.

Para funções de Bessel de ordem inteira, existe também uma função geradora da forma

$$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} t^m J_m(x) \quad (t \neq 0).$$

Observe que, neste caso, a série da direita não é uma série de Maclaurin, mas sim uma série de Laurent em t . A fórmula acima é freqüentemente escrita sob a forma (faça $t = e^{i\theta}$)

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} J_m(x),$$

onde a série do lado direito é agora uma série de Fourier (complexa) da função $e^{ix \sin \theta}$.

Para discutir as propriedades de ortogonalidade das funções de Bessel, voltaremos à separação da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas (Seção 9.2). Por simplicidade, suponha que $\varphi(r, \theta, z)$ independe de z . Então, $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ separa-se em

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \lambda_2 \Theta = 0$$

e

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 r + \frac{\lambda_2}{r} \right) R = 0.$$

Na maioria dos casos, $\lambda_2 = -m^2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), de maneira que $R(r)$ satisfaz

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{m^2}{r} \right) R = 0.$$

Se as condições de contorno forem impostas sobre $R(r)$, então esta equação tornar-se-á uma equação de autovalor com autovalor k^2 (observe que supusemos m^2 já determinado). Esta é uma equação do tipo de Sturm-Liouville. Algumas das condições físicas mais comuns exigirão que

- a) para $r = 0$, $R(r)$ seja finita, e
- b) para $r = a$, $R(r)$ deve satisfazer

$$R(a) = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{ou} \quad \frac{dR}{dr} \Big|_{r=a} = 0 \quad (\text{Neumann}),$$

ou

$$AR + B \frac{dR}{dr} \Big|_{r=a} = 0 \quad (\text{condições de contorno intermediárias}).$$

Da discussão da Seção 9.3, segue-se que as condições (a) e (b) garantem a ortogonalidade das funções $R_k(r)$ (com peso r) no intervalo $0 \leq r \leq a$.

Em termos de funções de Bessel, as condições de contorno acima implicam que somente a solução $J_m(kr)$ será admissível [$N_m(kr)$ não é finita quando $r = 0$] e o parâmetro k deve ser obtido de

$$J_m(ka) = 0,$$

$$kJ'_m(ka) = 0, \quad \text{onde } J'_m(x) = (d/dx)J_m(x),$$

ou

$$AJ_m(ka) + BkJ'_m(ka) = 0.$$

Todas as funções de Bessel (de primeira espécie) têm caráter oscilatório e possuem uma quantidade infinita de raízes. Represente as raízes não-triviais* de $J_m(x)$ por α_{mn} ($n = 1, 2, 3, \dots$). Elas estão listadas nas tabelas de funções de Bessel. Os valores de k apropriados às condições de Dirichlet são, então,

$$k_{mn} = \alpha_{mn}/a \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Para obter as condições de Neumann, devemos resolver a equação (observe que $k \neq 0$)

$$\frac{d}{dx} J_m(x) \Big|_{x=ka} = 0.$$

As raízes de $J'_m(x)$ estão também tabeladas. Representando-as por β_{mn} , obtemos

$$k_{mn} = \beta_{mn}/a \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots).$$

Para as condições de contorno intermediárias, não podemos esperar que as raízes da equação

$$AJ_m(ka) + BkJ'_m(ka) = 0$$

estejam, em geral, tabeladas, pois A e B são arbitrárias, mas podem ser calculadas, se necessário, pela análise numérica.

Desta maneira, em todos os três casos considerados, obtemos um conjunto infinito de funções características mutuamente ortogonais

$$R_k(r) = J_m(k_{mn}r)$$

e esperamos ser capazes⁺ de desenvolver qualquer função (razoavelmente bem comportada) $f(r)$ por meio da série

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(k_{mn}r),$$

chamada *série de Fourier-Bessel de ordem m* . Para obter os coeficientes a_n , podemos multiplicar ambos os lados por $rJ_m(k_{mn}r)$ e integrar com relação a r de 0 a a ; por ortogonalidade

$$\int_0^a f(r) r J_m(k_{mn}r) dr = a_n \int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr,$$

de maneira que

$$a_n = \frac{\int_0^a f(r) r J_m(k_{mn}r) dr}{\int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr}.$$

* $x = 0$ é sempre uma raiz de $J_m(x)$ [exceto quando $m = 0$, caso em que $J_0(0) = 1$]. Esta raiz não possui interesse no caso das condições de Dirichlet.

⁺Por analogia com o caso das séries de Fourier e de Fourier-Legendre.

É conveniente calcular, de uma vez por todas, a integral de normalização

$$N_n = \int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr.$$

Com esta finalidade, recordemo-nos da equação

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r} R = -k^2 r R.$$

Substituímos $R(r)$ por $J_m(kr)$ e a escrevemos duas vezes, uma com $k = k_{mn}$, de maneira que $J_m(k_{mn}r)$ satisfaça as condições de contorno, e a segunda vez para k arbitrário, de maneira que $J_m(kr)$ não necessita satisfazer as condições de contorno:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} J_m(k_{mn}r) \right] - \frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) = -k_{mn}^2 r J_m(k_{mn}r),$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} J_m(kr) \right] - \frac{m^2}{r} J_m(kr) = -k^2 r J_m(kr).$$

Multiplicamos agora as equações por $J_m(kr)$ e por $J_m(k_{mn}r)$, respectivamente, subtraímos e integramos sobre $(0, a)$. Empregando a integração por partes do lado esquerdo, obtemos

$$r J_m(kr) \frac{d}{dr} J_m(k_{mn}r) - r J_m(k_{mn}r) \frac{d}{dr} J_m(kr) \Big|_0^a = (k^2 - k_{mn}^2) \int_0^a r J_m(k_{mn}r) J_m(kr) dr.$$

Suponha agora que as condições de contorno são condições de Dirichlet. Esta relação se reduz, então, a

$$a J_m(ka) k_{mn} J'_m(k_{mn}a) = (k^2 - k_{mn}^2) \int_0^a r J_m(k_{mn}r) J_m(kr) dr.$$

que é ainda válida para todo k . Diferenciando esta expressão com relação a k ,* obtemos

$$\begin{aligned} a a J'_m(ka) k_{mn} J'_m(k_{mn}a) &= 2k \int_0^a r J_m(k_{mn}r) J_m(kr) dr \\ &+ (k^2 - k_{mn}^2) \int_0^a r J_m(k_{mn}r) r J'_m(kr) dr. \end{aligned}$$

Faça agora $k \rightarrow k_{mn}$. O último termo se anula e obtemos

$$\int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J'_m(k_{mn}a)]^2,$$

que é a integral de normalização desejada para as condições de Dirichlet. Outras condições de contorno podem ser tratadas de maneira semelhante.

A integral de normalização acima (para as condições de Dirichlet) pode ser posta sob forma mais apropriada para cálculos efetivos. [As tabelas das funções de Bessel

*As funções $J_m(kr)$ são analíticas com relação ao parâmetro k .

em geral não fornecem as derivadas de $J_m(x)$. A partir das relações de recorrência página 362, segue-se também que†

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_\mu(x)}{dx} &= J_{\mu-1}(x) - \frac{\mu}{x} J_\mu(x) \\ \frac{dJ_\mu(x)}{dx} &= -J_{\mu+1}(x) + \frac{\mu}{x} J_\mu(x) \end{aligned} \right\} \quad (\mu \geq 1).$$

Por conseguinte se α é uma raiz de $J_\mu(x)$, teremos

$$\frac{dJ_\mu(\alpha)}{dx} = J_{\mu-1}(\alpha) = -J_{\mu+1}(\alpha)$$

de maneira que o integral de normalização pode ser escrito como

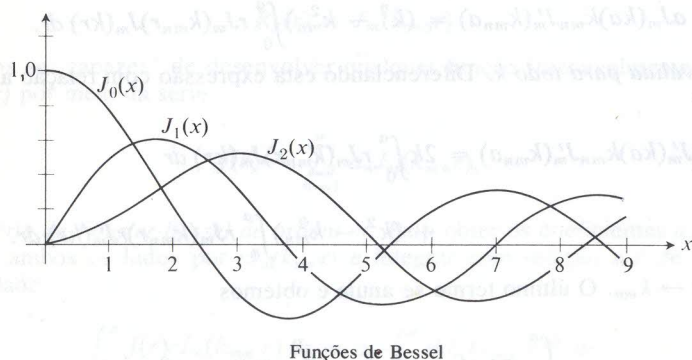
$$\int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_{mn}a)]^2,$$

onde k_{mn} é a raiz de $J_m(ka) = 0$.

Várias funções de Bessel de ordens inteiros estão representadas na Fig. 9.2.

Exemplo 1. *Vibrações livres de uma membrana circular.* Já foi mostrado, na Seção 8.8, que as vibrações livres de uma membrana retangular são descritas pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \left(c^2 = \frac{T}{\mu} \right).$$



Funções de Bessel

Fig. 9.2 Funções de Bessel.

A dedução é válida para uma membrana de qualquer forma, mas para uma membrana circular deveríamos usar o sistema de coordenadas polares, de maneira que a equação se torna

†Estas são as fórmulas de diferenciação para as funções de Bessel.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Consideraremos uma membrana engastada em seu contorno, de maneira que $u(r, 0; t)$ satisfaça a condição de contorno de Dirichlet:

$$u(a, \theta; t) = 0,$$

em que a é o raio da membrana. As condições iniciais consistem em especificar os deslocamentos transversos e as velocidades, quando $t = 0$:

$$u(r, \theta; 0) = u_0(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta; 0) = v_0(r, \theta).$$

Fazemos $u = R\Theta T$ e separamos as variáveis:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda c^2 T, \quad \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \lambda_1 \Theta,$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(-\lambda + \frac{\lambda_1}{r^2} \right) R = 0.$$

As funções $T(t)$ são trigonométricas ou exponenciais. Rejeitamos as últimas, baseados em considerações físicas, de maneira que $\lambda \leq 0$.* Fazemos $\lambda = -k^2$ e $kc = \omega$. Em vez de usarmos funções trigonométricas reais, podemos representar $T(t)$ sob a forma

$$T_\omega(t) = e^{-i\omega t}$$

com a convenção de que ω pode ser ou positivo ou negativo. Esta forma é muito compacta e incorpora tanto $\cos \omega t$ como $\sin \omega t$. Além disso, o raciocínio usual de periodicidade exige que

$$\lambda_1 = -m^2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

conduzindo às funções†

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta.$$

A equação radial será agora

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Sua solução geral será†

$$R(r) = C_1 J_m(kr) + C_2 N_m(kr).$$

*De qualquer maneira, pode-se mostrar que as condições de contorno não podem ser satisfeitas se $\lambda > 0$.

†Parece que não há vantagem em usar a representação complexa $e^{\pm im\theta}$, pois surgirão, mais tarde, alguns problemas notacionais.

†As funções de Neumann $N_m(x)$ foram mencionadas na p. 361.

Como as funções de Neumann $N_m(x)$ não são finitas no ponto $x = 0$, devem ser rejeitadas (escolhendo $C_2 = 0$). A condição de contorno em $r = a$ exige que

$$J_m(ka) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Esta equação determina os autovalores k do problema. Em função dos zeros das funções de Bessel, temos

$$k_{mn} = \alpha_{mn}/a \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots).$$

As primeiras quatro raízes das cinco primeiras equações de Bessel são dadas na Tabela 9.1.

Podemos agora escrever a solução completa de nosso problema sob a forma de uma série dupla. Como a solução deve ser real, os coeficientes com $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$

Tabela 9.1

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = 0$	2,404	5,520	8,654	11,792
$m = 1$	3,832	7,016	10,173	13,323
$m = 2$	5,135	8,417	11,620	14,796
$m = 3$	6,379	9,760	13,017	16,224
$m = 4$	7,586	11,064	14,373	17,616

devem ser um o conjugado complexo do outro, e teremos

$$u(r, \theta; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) [(A_{mn} e^{i\omega_{mn}t} + \bar{A}_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}) \cos m\theta + (B_{mn} e^{i\omega_{mn}t} + \bar{B}_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}) \sin m\theta],$$

onde $\omega_{mn} = ck_{mn} = \alpha_{mn}(c/a)$. Os coeficientes A_{mn} e B_{mn} seguem-se, então, das condições iniciais. Faça $t = 0$. Então,

$$u_0(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) [(A_{mn} + \bar{A}_{mn}) \cos m\theta + (B_{mn} + \bar{B}_{mn}) \sin m\theta].$$

Esta expressão é, evidentemente, uma série de Fourier-Bessel em r , e igualmente uma série de Fourier em θ . A fim de determinar $A_{m'n'}$, multiplicamos ambos os lados por

$$r J_{m'}\left(\alpha_{m'n'} \frac{r}{a}\right) \cos m'\theta$$

e integramos com relação a r de 0 a a , e com relação a θ de 0 a 2π . Devido à ortogonalidade das funções trigonométricas, somente sobreviverão, do lado direito, os termos em cosseno com $m = m'$, com a constante de normalização

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m'\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{se } m' \neq 0, \\ 2\pi & \text{if } m' = 0. \end{cases}$$

Além disso, devido à ortogonalidade das funções de Bessel, somente os termos com $n = n'$ sobreviverão do lado direito, com a constante de normalização

$$\int_0^a r \left[J_{m'}\left(\alpha_{m'n'} \frac{r}{a}\right) \right]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J_{m'+1}(\alpha_{m'n'})]^2.$$

Por conseguinte, obtemos a expressão

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} u_0(r, \theta) \cos m\theta \cdot r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta = \frac{\pi a^2}{2} [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 (A_{mn} + \bar{A}_{mn}) \quad (\text{se } m \neq 0)$$

e uma expressão semelhante com um fator 2 adicional do lado direito, se $m = 0$.

Vemos que A_{mn} ainda não está totalmente determinado (somente sua parte real segue-se da fórmula acima). Isso não é inesperado, pois não usamos a segunda condição inicial. Diferenciando $u(r, \theta; t)$ em relação a t e fazendo então $t = 0$, obtemos

$$v_0(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) i\omega_{mn} [(A_{mn} - \bar{A}_{mn}) \cos m\theta + (B_{mn} - \bar{B}_{mn}) \sin m\theta].$$

Pela mesma técnica anterior, podemos deduzir que

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} v_0(r, \theta) \cos m\theta \cdot r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta = i \frac{\pi a^2}{2} \omega_{mn} [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 (A_{mn} - \bar{A}_{mn}) \quad (\text{se } m \neq 0),$$

e semelhantemente para $m = 0$ (com o fator 2). Os coeficientes A_{mn} podem ser calculados e descritos pelas fórmulas

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left[u_0(r, \theta) - \frac{i}{\omega_{mn}} v_0(r, \theta) \right] \cos m\theta \cdot r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \quad (m \neq 0),$$

$$A_{0n} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left[u_0(r, \theta) - \frac{i}{\omega_{0n}} v_0(r, \theta) \right] r J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) dr d\theta}{2\pi a^2 [J_1(\alpha_{0n})]^2} \quad (m = 0),$$

em que $\omega_{mn} = ck_{mn} = \alpha_{mn}(c/a)$, para todo m .

Os coeficientes B_{mn} são calculados de maneira semelhante. É fácil verificar que é necessário somente substituir $\cos m\theta$ por $\sin m\theta$ na fórmula de A_{mn} (observe que o caso $m = 0$ está agora ausente).

Talvez sejam convenientes algumas palavras sobre a interpretação física dos resultados. As frequências

$$\omega_{mn} = \alpha_{mn}(c/a) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots)$$

são as *freqüências naturais* da membrana e cada termo da série dupla representa um *modo natural de vibração*.[†] Cada freqüência possui dois modos correspondentes, um com $\cos m\theta$ e o outro $\sin m\theta$, exibindo degenerescência *dupla*. As exceções são os casos em que $m = 0$, representando os modos que possuem simetria radial. Eles são *não-degenerados*.[‡]

Os modos naturais possuem suas configurações características de linhas nodais (compare com a Seção 8.8, p. 321). Algumas destas configurações estão esboçadas a seguir (Fig. 9.3) e suas freqüências estão dadas em função da freqüência fundamental $\omega_{01} \cong 2,40(c/a)$.

Os modos naturais de vibração formam uma ferramenta muito conveniente para a análise de movimento arbitrário de uma membrana. Suponha, por exemplo, que a distribuição inicial dos deslocamentos e das velocidades exibe simetria radial§

$$u_0 = u_0(r), \quad v_0 = v_0(r).$$

Segue-se, então, das fórmulas para A_{mn} e para B_{mn} que somente os termos com $m = 0$ estarão presentes na solução, que pode agora ser representada por uma série simples (de Fourier-Bessel):

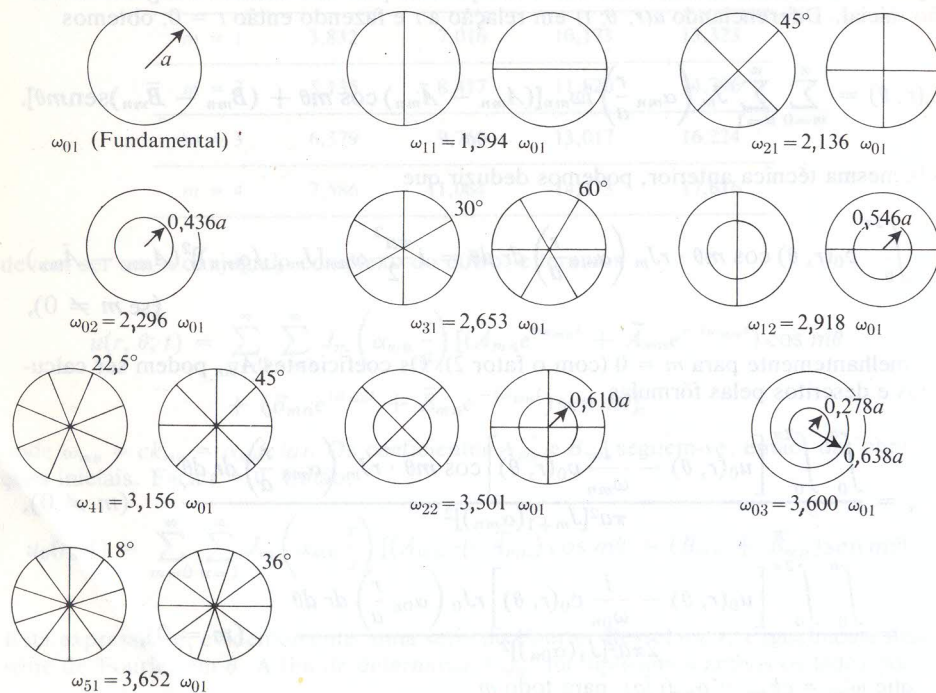


Fig. 9.3

[†]Muito freqüentemente chamado de *modo normal de vibração*.

[‡]Falando mais rigorosamente, as *freqüências* (autovalores) ω_{0n} são não-degenerados.

§Ou invariância com relação a rotações, em uma linguagem mais sofisticada.

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) [A_{0n} e^{i\omega_{0n}t} + \bar{A}_{0n} e^{-i\omega_{0n}t}].$$

Em geral, um modo dado estará ausente da série dupla para $u(r, \theta; t)$ desde que as distribuições iniciais $u_0(r, \theta)$ e $v_0(r, \theta)$ sejam *ortogonais* ao modo correspondente. Em outras palavras, os modos que não estarão presentes no estado de movimento inicial (dado por u_0 e por v_0) não serão “excitados” em nenhum instante posterior. Na linguagem da física, os modos são “independentes entre si”, no sentido em que não há troca de energia entre modos individuais.

Exemplo 2. A superfície lateral de um cilindro de aço muito longo, de raio $b = 10$ cm é mantida a uma temperatura constante $u_1 = 100^\circ\text{C}$. Inicialmente, o cilindro está à temperatura uniforme $u_0 = 500^\circ\text{C}$. Deseja-se calcular a temperatura no centro do cilindro e a taxa segundo a qual o cilindro perde calor em $\text{cal/cm} \cdot \text{s}$ (por unidade de comprimento) no instante $t = 4$ minutos.

Solução. Aproxime a solução considerando um cilindro infinito. A temperatura no interior será uma função somente de r e de t , e deverá satisfazer a EDP (em coordenadas cilíndricas)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

sujeita à condição de contorno $u(b, t) = u_1$ e à condição inicial $u(r, 0) = u_0$.

Para o aço, $a^2 = k/c\rho = 0,126 \text{ cm}^2/\text{s}$ (veja a Seção 8.4). De acordo com o método de separação de variáveis, procuramos soluções da EDP da forma

$$u(r, t) = R(r)T(t).$$

Então

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r R = 0, \quad \frac{dT}{dt} = -a^2 \lambda T.$$

A constante de separação λ deveria ser determinada a partir das condições de contorno aplicadas à função $R(r)$. Surge uma complicação devida ao fato de que a condição de contorno é *não-homogênea*. Esperamos poder construir nossa solução na forma de uma série

$$u(r, t) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} R_{\lambda}(r) T_{\lambda}(t)$$

(em relação aos valores permissíveis de λ), mas ainda não está claro que condição deveríamos impor a cada função *individual* $R_{\lambda}(r)$.

Felizmente, o problema desfaz-se devido ao fato de que $u_1 = \text{constante}$ é *também* uma solução da EDP e podemos escrever

$$u(r, t) = u_1 + \sum_{\lambda} A_{\lambda} R_{\lambda}(r) T_{\lambda}(t),$$

exigindo agora que *todos* os $R_{\lambda}(r)$ se anulem em $r = b$. Isso assegura que toda a série se anulará em $r = b$ e que a solução $u(r, t)$ satisfará a condição de contorno

[†]A distribuição inicial de temperaturas possui simetria axial.

$$u(b, t) = u_1.$$

Após termos fixado as condições de contorno, podemos ter esperanças em determinar os A_n , de tal maneira que a condição inicial seja satisfeita e de que o problema possa ser resolvido.

Observação. Uma outra maneira de encarar esta idéia é perceber que podemos deslocar a origem da escala de temperaturas sem afetar a validade das equações da condução do calor. Em vez de usarmos a escala centígrada, podemos usar uma nova escala com o "zero" em 100° centígrados. Podemos, então, resolver o problema na nova escala e, ao fim, voltarmos à escala centígrada.

A equação de $T(t)$, juntamente com a segunda lei da termodinâmica, exige que λ seja não-negativo. Para $\lambda = 0$, a equação radial

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda R = 0$$

possui a solução $R_0 = A_0 + B_0 \log r$, que não é aceitável, pois $B_0 \log r$ não é finito quando $r = 0$, e A_0 não se anula em $r = b$.* Consequentemente, $\lambda > 0$. Fazendo $\lambda = k^2$, $x = kr$, e reduzindo a equação radial à equação diferencial de Bessel de ordem zero, temos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

onde $y(x) = R(r)$. A solução relevante é $J_0(x)$ [$N_0(x)$ não é finita quando $r = 0$], e os autovalores seguem-se da condição de Dirichlet

$$J_0(kb) = 0,$$

fornecendo

$$\lambda_n = k_{0n}^2 = \frac{\alpha_{0n}^2}{b^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Achando $T(t)$ por meio desta equação, obtemos a série

$$u(r, t) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{b}\right) e^{-(\alpha_{0n}^2/b^2)t}.$$

Resta-nos satisfazer a condição inicial

$$u_0 = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{b}\right).$$

Isso é uma série de Fourier-Bessel (de ordem zero) para a função

$$f(r) = u_0 - u_1 = \text{const.}$$

*A solução $R(r) = \text{constante}$, que multiplica $T(t) = \text{constante}$, fornece a solução constante da EDP. Já temos uma, $u = u_1 = \text{constante}$, e não necessitamos de nenhuma outra.

Portanto

$$A_n = \frac{2(u_0 - u_1) \int_0^b J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{b}\right) r dr}{b^2 [J_1(\alpha_{0n})]^2}.$$

A integral

$$\int_0^b J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{b}\right) r dr = \frac{b^2}{\alpha_{0n}^2} \int_0^{\alpha_{0n}} J_0(z) z dz$$

pode ser calculada explicitamente. Uma maneira de calculá-la é utilizar a fórmula (veja a página 362)

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x).$$

Isso fornece imediatamente $\int_0^x J_0(z) z dz = x J_1(x)$ de maneira que

$$A_n = \frac{2(u_0 - u_1)}{\alpha_{0n} J_1(\alpha_{0n})},$$

e a solução será

$$u(r, t) = u_1 + 2(u_0 - u_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_{0n} r/b) e^{-(\alpha_{0n}^2/b^2)t}}{\alpha_{0n} J_1(\alpha_{0n})}.$$

Usando $J_0(0) = 1$, achamos que a temperatura no centro do cilindro é dada por

$$u(0, t) = u_1 + 2(u_0 - u_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha_{0n}^2/b^2)t}}{\alpha_{0n} J_1(\alpha_{0n})}.$$

Esta série converge muito rapidamente para t grande. As tabelas das funções de Bessel* fornecem

$$\alpha_{01} \cong 2,40, \quad \alpha_{02} \cong 5,52,$$

e

$$J_1(2,40) \cong 0,52, \quad J_1(5,52) \cong -0,34.$$

Evidentemente, a razão dos dois primeiros termos da série fica determinada pelo fator

$$\exp \left[- \frac{(\alpha_{02}^2 - \alpha_{01}^2) a^2}{b^2} t \right].$$

O expoente é

$$\frac{(5,52^2 - 2,40^2) \times 0,126 \times 4 \times 60}{10^2} \cong 7,5.$$

*Por exemplo, Jahnke e Emde, *Tables of Higher Functions*.

Como $e^{-7.5} \cong 0,0005$, segue-se que o segundo termo pode ser desprezado. Se $t = 4$ min, o primeiro termo fornece

$$\frac{\alpha_{01}^2 a^2 t}{b^2} = \frac{2,40^2 \times 0,126 \times 4 \times 60}{100} \cong 1,75,$$

de maneira que a temperatura procurada é

$$u = 100 + 2 \times 400 \times \frac{e^{-1,75}}{2,4 \times 0,52} = 212^\circ\text{C}.$$

A taxa de variação do fluxo de calor (por unidade de área e unidade de tempo) em um ponto qualquer é dada pela densidade de corrente térmica (veja a p. 302)

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } u,$$

onde k = condutividade térmica = $0,11 \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$, no caso do aço.

No nosso caso, $\text{grad } u$ no ponto $r = b$ será normal à superfície, e $|\text{grad } u| = \partial u / \partial r$. Usando $J'_0(x) = -J_1(x)$, obtemos, da série para u :

$$q|_{r=b} = \frac{2k(u_0 - u_1)}{b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha_{0n}^2 a^2 / b^2)t}.$$

Multiplicando por $2\pi b$, obtemos a perda de calor por unidade de comprimento do cilindro:

$$Q = 4\pi k(u_0 - u_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha_{0n}^2 a^2 / b^2)t}.$$

É mais uma vez óbvio que somente necessitamos considerar o primeiro termo desta série, fornecendo

$$Q = 4\pi \times 0,11 \times 400 \times e^{-1,75} = 96 \text{ cal/cm} \cdot \text{s}.$$

9.8 FUNÇÕES DE LEGENDRE ASSOCIADAS E HARMÔNICAS ESFÉRICAS

A equação de onda

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

pode ser separada no sistema de coordenadas esféricas, dando origem às quatro equações diferenciais ordinárias seguintes (veja a Seção 9.1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} - \lambda c^2 T &= 0, & \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} - \lambda_1 \Phi &= 0, \\ \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(-\sin \theta \lambda_2 + \frac{\lambda_1}{\sin \theta} \right) \Theta &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (-\lambda r^2 + \lambda_2) R &= 0. \end{aligned}$$