

Mostre que isso é igual a

$$\frac{1}{\alpha_{0n}} \int_0^{\alpha_{0n}} J_0(y) dy.$$

A avaliação numérica desta última forma, em vez da primeira, é mais rápida e também mais exata. *Nota:* Para $\rho/a = 0,0$ e $z/l = 0,5$ a convergência é lenta, sendo que 20 termos dão apenas 98,4 em vez de 100.

Valor de verificação. Para $\rho/a = 0,4$ e $z/l = 0,3$, $\psi = 24,558$.

11.3 Funções de Neumann e Funções de Bessel da Segunda Espécie

Pela teoria das EDO, sabe-se que a equação de Bessel tem duas soluções independentes. De fato, para ordem ν não-inteira já encontramos duas soluções e as denominamos $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$, usando a série infinita (Equação (11.5)). O problema é que, quando ν é inteiro, a Equação (11.8) vale e temos só uma solução independente. Uma segunda solução pode ser desenvolvida pelos métodos da Seção 9.6, o que resulta em uma segunda solução bastante boa da equação de Bessel, mas não é a forma padrão.

Definição e Forma de Série

Como uma abordagem alternativa, tomamos a combinação linear particular de $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (11.60)$$

Essa é a função de Neumann (Figura 11.5).¹⁵ Para ν não-inteiro, $N_\nu(x)$, claramente satisfaz a equação de Bessel, porque é uma combinação linear de soluções conhecidas $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$. Substituindo a série de potências da Equação (11.6) por $n \rightarrow \nu$ (dado no Exercício 11.1.7), temos como resultado

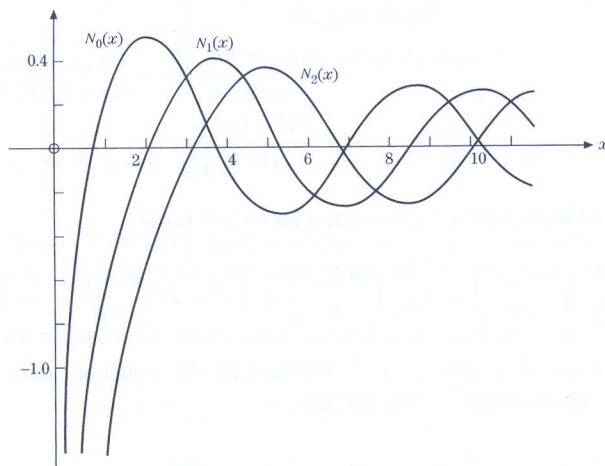


Figura 11.5: Funções de Neumann $N_0(x)$, $N_1(x)$, e $N_2(x)$.

$$N_\nu(x) = -\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots,^{16} \quad (11.61)$$

para $\nu > 0$. Contudo, para ν inteiro, $\nu = n$, a Equação (11.8) se aplica e a Equação (11.60)¹⁶ torna-se indeterminada. A definição de $N_\nu(x)$ foi escolhida deliberadamente por essa propriedade de indeterminação. Novamente substituindo a série de potências e avaliando $N_\nu(x)$ para $\nu \rightarrow 0$ pela regra de l'Hôpital para formas indeterminadas, obtemos o valor limitador

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2), \quad (11.62)$$

¹⁵Em AMS-55 (veja nota de rodapé 4 no Capítulo 5 ou Leituras Adicionais do Capítulo 8 para essa referência); na maioria das tabelas matemáticas, ela é rotulada $Y_\nu(x)$.

¹⁶Note que essa forma limitadora se aplica a valores inteiros e não-inteiros do índice ν .

para $n = 0$ e $x \rightarrow 0$, usando

$$\nu!(-\nu)! = \frac{\pi\nu}{\sin \pi\nu} \quad (11.63)$$

da Equação (8.32). O primeiro e o terceiro termos na Equação (11.62) vêm da utilização de $(d/d\nu)(x/2)^\nu = (x/2)^\nu \ln(x/2)$, enquanto γ vem de $(d/d\nu)\nu!$ para $\nu \rightarrow 0$ usando as Equações (8.38) e (8.40). De modo semelhante, para $n > 0$, obtemos

$$N_n(x) = -\frac{1}{\pi}(n-1)! \left(\frac{2}{x}\right)^n + \cdots + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots \quad (11.64)$$

As Equações (11.62) e (11.64) exibem a dependência logarítmica que era de esperar. Isso, é claro, verifica a independência de J_n e N_n .

Outras Formas

Como acontece com todas as outras funções de Bessel, $N_\nu(x)$ tem representações integrais. Para $N_0(x)$ temos

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh t) dt = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2 - 1)^{1/2}} dt, \quad x > 0.$$

Essas formas podem ser derivadas como a parte imaginária das representações de Hankel do Exercício 11.4.7. A última forma é uma transformada de Fourier de co-seno.

Para verificar que $N_\nu(x)$, nossa função de Neumann (Figura 11.5) ou função de Bessel da segunda espécie realmente satisfaz a equação de Bessel para n inteiro, podemos continuar como segue. A regra de L'Hôpital aplicada à Equação (11.60) resulta em

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{(d/d\nu)[\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{(d/d\nu)\sin \nu\pi} \Big|_{\nu=n} \\ &= \frac{-\pi \sin n\pi J_n(x) + [\cos n\pi \partial J_\nu / \partial \nu - \partial J_{-\nu} / \partial \nu]_{\nu=n}}{\pi \cos n\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\nu=n}. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Diferenciando a equação de Bessel para $J_{\pm\nu}(x)$ em relação a ν , temos

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} \right) + x \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} \right) + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} = 2\nu J_{\pm\nu}. \quad (11.66)$$

Multiplicando a equação para $J_{-\nu}$ por $(-1)^\nu$, subtraindo da equação para J_ν (como sugerido pela Equação (11.65)) e considerando o limite $\nu \rightarrow n$, obtemos

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} N_n + x \frac{d}{dx} N_n + (x^2 - n^2) N_n = \frac{2n}{\pi} [J_n - (-1)^n J_{-n}]. \quad (11.67)$$

Para $\nu = n$, inteiro, o lado direito desaparece pela Equação (11.8) e $N_n(x)$ é considerada uma solução da equação de Bessel. Por conseguinte, a solução mais geral para qualquer ν pode ser escrita como

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x). \quad (11.68)$$

Pelas Equações (11.62) e (11.64) vemos que N_n diverge, ao menos de forma logarítmica. Qualquer condição de contorno que exija que a solução seja finita na origem (como em nossa membrana circular vibratória, Seção 11.1, automaticamente exclui $N_n(x)$. Ao contrário, na ausência de tal requisito, $N_n(x)$ deve ser considerada.

Até certo ponto, a definição da função de Neumann $N_n(x)$ é arbitrária. As Equações (11.62) e (11.64) contêm termos da forma $a_n J_n(x)$. Claramente, qualquer valor finito da constante a_n ainda nos daria uma segunda solução da equação de Bessel. Por que a_n teria o valor particular implícito nas Equações (11.62) e (11.64)? A resposta envolve a dependência assintótica desenvolvida na Seção 11.6. Se J_n corresponder a uma onda co-senoidal, então N_n corresponde a uma onda senoidal. Essa simples e conveniente relação de fase assintótica é uma consequência da mistura particular de J_n em N_n .

Relações de Recorrência

Substituindo a Equação (11.60) por $N_\nu(x)$ (ν não-inteiro) nas relações de recorrência (Equações (11.10) e (11.12)) por $J_n(x)$, vemos imediatamente que $N_\nu(x)$ satisfaz essas mesmas relações de recorrência. Na verdade, isso constitui uma outra prova de que N_ν é uma solução. A que o inverso não é necessariamente verdadeiro. As soluções não precisam satisfazer as mesmas relações de recorrência. Um exemplo desse tipo de confusão aparece na Seção 11.5.

Fórmulas Wronskianas

Pela Seção 9.6 e Exercício 10.1.4 temos a fórmula wronskiana¹⁷ para soluções da equação de Bessel,

$$u_\nu(x)v'_\nu(x) - u'_\nu(x)v_\nu(x) = \frac{A_\nu}{x}, \quad (11.69)$$

na qual A_ν é um parâmetro que depende de considerar as funções particulares de Bessel $u_\nu(x)$ e $v_\nu(x)$. A_ν é uma constante no sentido de que é independente de x . Considere o caso especial

$$u_\nu(x) = J_\nu(x), \quad v_\nu(x) = J_{-\nu}(x), \quad (11.70)$$

$$J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} = \frac{A_\nu}{x}. \quad (11.71)$$

Visto que A_ν é uma constante, ela pode ser identificada em qualquer ponto conveniente, tal como $x = 0$. Usando os primeiros termos nas expansões de série (Equações (11.5) e (11.6)), obtemos

$$\begin{aligned} J_\nu &\rightarrow \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, & J_{-\nu} &\rightarrow \frac{2^\nu x^{-\nu}}{(-\nu)!} \\ J'_\nu &\rightarrow \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \nu!}, & J'_{-\nu} &\rightarrow -\frac{\nu 2^\nu x^{-\nu-1}}{(-\nu)!}. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Substituindo na Equação (11.69), temos

$$J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x) = \frac{-2\nu}{x\nu!(-\nu)!} = -\frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x}, \quad (11.73)$$

usando a Equação (8.32). Note que A_ν se anula para ν inteiro, como deve, uma vez que o wronskiano não ser nulo é um teste da independência das duas soluções. Pela Equação (11.73), fica claro que J_n e J_{-n} são linearmente dependentes.

Usando nossas relações de recorrência, podemos imediatamente desenvolver um grande número de formas alternativas, entre elas

$$J_\nu J_{-\nu+1} + J_{-\nu} J_{\nu-1} = \frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x}, \quad (11.74)$$

$$J_\nu J_{-\nu-1} + J_{-\nu} J_{\nu+1} = -\frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x}, \quad (11.75)$$

$$J_\nu N'_\nu - J'_\nu N_\nu = \frac{2}{\pi x}, \quad (11.76)$$

$$J_\nu N_{\nu+1} - J_{\nu+1} N_\nu = -\frac{2}{\pi x}. \quad (11.77)$$

Muitas mais serão encontradas nas referências apresentadas no final do capítulo.

Lembre-se de que no Capítulo 9 os wronskianos eram de grande valor sob dois aspectos: (1) para estabelecer a independência linear ou a dependência linear de soluções equações diferenciais e (2) para desenvolver uma forma integral de uma segunda solução. Aqui, as formas específicas das combinações de funções de Bessel wronskianas e derivadas de wronskianos são úteis primordialmente para ilustrar o comportamento geral das várias funções de Bessel. Wronskianos são muito úteis para verificar tabelas de funções de Bessel. Na Seção 10.5 os wronskianos apareciam em conexão com funções de Green.

¹⁷Esse resultado depende de $P(x)$, da Seção 9.5, ser igual a $p'(x)/p(x)$, o coeficiente correspondente da forma auto-adjunta da Seção 10.1.

Exemplo 11.3.1 GUIAS DE ONDA COAXIAIS

Estamos interessados em uma onda eletromagnética confinada entre as superfícies condutoras cilíndricas concêntricas $\rho = a$ e $\rho = b$. Grande parte da matemática é elaborada na Seção 9.3 e no Exemplo 11.1.2. Para ir da onda estacionária desses exemplos para a onda progressiva, que é o caso aqui, fazemos $A = iB$, $A = a_{mn}$, $B = b_{mn}$ na Equação (11.40a) e obtemos

$$E_z = \sum_{m,n} b_{mn} J_m(\gamma \rho) e^{\pm im\varphi} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (11.78)$$

Propriedades adicionais das componentes da onda eletromagnética no guia de onda cilíndrico simples são exploradas nos Exercícios 11.3.8 e 11.3.9. Para o guia de onda coaxial é preciso uma generalização. A origem, $\rho = 0$, agora é excluída ($0 < a \leq \rho \leq b$). Daí, a função de Neumann $N_m(\gamma \rho)$ pode não ser excluída. $E_z(\rho, \varphi, z, t)$ se torna

$$E_z = \sum_{m,n} [b_{mn} J_m(\gamma \rho) + c_{mn} N_m(\gamma \rho)] e^{\pm im\varphi} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (11.79)$$

Com a condição

$$H_z = 0, \quad (11.80)$$

temos as equações básicas para uma onda TM (modo transversal magnético).

O campo elétrico (tangencial) deve desaparecer nas superfícies condutoras (condição de contorno de Dirichlet), ou

$$b_{mn} J_m(\gamma a) + c_{mn} N_m(\gamma a) = 0, \quad (11.81)$$

$$b_{mn} J_m(\gamma b) + c_{mn} N_m(\gamma b) = 0. \quad (11.82)$$

Essas equações transcendentais podem ser resolvidas para $\gamma(\gamma_{mn})$ e a razão c_{mn}/b_{mn} . Pelo Exemplo 11.1.2,

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2. \quad (11.83)$$

Uma vez que k^2 deve ser positiva para uma onda real, a frequência mínima que será propagada (nesse modo TM) é

$$\omega = \gamma c, \quad (11.84)$$

com γ fixado pelas condições de contorno, Equações (11.81) e (11.82). Essa é a frequência de corte do guia de onda.

Também há um modo TE (transversal elétrico), com $E_z = 0$ e H_z dado pela Equação (11.79). Então, temos condições de contorno de Neumann em vez das Equações (11.81) e (11.82). Por fim, para o guia coaxial (não para o guia cilíndrico simples, $a = 0$), um TEM (modo transversal eletromagnético), $E_z = H_z = 0$, é possível. Isso corresponde a uma onda plana, como em espaço livre.

Incluimos os casos mais simples (nenhuma função de Neumann, condições de contorno mais simples) de um guia de onda circular nos Exercícios 11.3.8 e 11.3.9.

Para concluir essa discussão de funções de Neumann, introduzimos a função de Neumann $N_\nu(x)$ pelas seguintes razões:

1. É uma segunda solução, independente, da equação de Bessel, que completa a solução geral.
2. É requerida para problemas físicos específicos, tais como ondas eletromagnéticas em cabos coaxiais e teoria de espalhamento da Mecânica Quântica.
3. Leva à função de Green para a equação de Bessel (Seções 9.7 e 10.5).
4. Leva diretamente a duas funções de Hankel (Seção 11.4). ■

Exercícios

11.3.1 Prove que as funções de Neumann N_n (sendo n inteiro) satisfazem as relações de recorrência

$$N_{n-1}(x) + N_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} N_n(x),$$

$$N_{n-1}(x) - N_{n+1}(x) = 2N'_n(x).$$

Sugestão: Essas relações podem ser provadas diferenciando as relações de recorrência para J_ν ou usando a forma de limite de N_ν , mas **não** dividindo tudo por zero.

11.3.2 Mostre que

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x).$$

11.3.3 Mostre que

$$N'_0(x) = -N_1(x).$$

11.3.4 Se Y e Z são duas soluções quaisquer da equação de Bessel, mostre que

$$Y_\nu(x)Z'_\nu(x) - Y'_\nu(x)Z_\nu(x) = \frac{A_\nu}{x},$$

na qual A_ν pode depender de ν mas é independente de x . Esse é um caso especial do Exercício 10.1.4.

11.3.5 Verifique as fórmulas wronskianas

$$J_\nu(x)J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x)J_{\nu-1}(x) = \frac{2\sin \nu\pi}{\pi x},$$

$$J_\nu(x)N'_\nu(x) - J'_\nu(x)N_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

11.3.6 Como alternativa a deixar que x se aproxime de zero na avaliação da constante wronskiana, podemos invocar a unicidade de séries de potências (Seção 5.7). Então, o coeficiente de x^{-1} na expansão de série de $u_\nu(x)v'_\nu(x) - u'_\nu(x)v_\nu(x)$ é A_ν . Mostre por expansão de série que cada um dos coeficientes de x^0 e x^1 de $J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x)$ é zero.

11.3.7 (a) Por diferenciação e substituição na EDO de Bessel, mostre que

$$\int_0^\infty \cos(x \cosh t) dt$$

é uma solução.

Sugestão: Você pode rearranjar a integral final como

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} \{x \sin(x \cosh t) \sinh t\} dt.$$

(b) Mostre que

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh t) dt$$

é linearmente independente de $J_0(x)$.

11.3.8 Um guia de onda cilíndrico tem raio r_0 . Ache as componentes que não desaparecem dos campos elétrico e magnético para

(a) TM_{01} , onda transversal magnética ($H_z = H_\rho = E_\phi = 0$),

(b) TE_{01} , onda transversal elétrica ($E_z = E_\rho = H_\phi = 0$).

Os índices 01 indicam que a componente longitudinal (E_z ou H_z) envolve J_0 e a condição de contorno é satisfeita pelo primeiro zero de J_0 ou J'_0 .

Sugestão: Todas as componentes da onda têm o mesmo fator: $\exp i(kz - \omega t)$.

11.3.9 Para um dado modo de oscilação, a frequência mínima que será passada por um guia de onda cilíndrico circular (raio r_0) é

$$\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_c},$$

na qual λ_c é fixado pela condição de contorno

$$J_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \quad \text{para modo } TM_{nm},$$

$$J'_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \quad \text{para modo } TE_{nm}.$$

O índice n denota a ordem da função de Bessel e m indica o zero usado. Ache esse comprimento de onda de corte λ_c para os três modos TM e os três modos TE que tenham os mais longos comprimentos de onda de corte. Explique seus resultados em termos do gráfico de J_0, J_1 e J_2 (Figura 11.1).