

11.5 Funções Modificadas de Bessel $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$

A equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

separada em coordenadas cilíndricas circulares, leva à Equação (11.22a), a equação de Bessel. A Equação (11.22a) é satisfeita pelas funções de Bessel e Neumann $J_\nu(k\rho)$ e $N_\nu(k\rho)$ e qualquer combinação linear, tal como as funções de Hankel $H_\nu^{(1)}(k\rho)$ e $H_\nu^{(2)}(k\rho)$. Agora, a equação de Helmholtz descreve a parte espacial de fenômenos de onda. Se, em vez disso, tivermos um problema de difusão, então a equação de Helmholtz é substituída por

$$\nabla^2 \psi - k^2 \psi = 0. \quad (11.108)$$

A análoga da Equação (11.22a) é

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Y_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Y_\nu(k\rho) - (k^2 \rho^2 + \nu^2) Y_\nu(k\rho) = 0. \quad (11.109)$$

A equação de Helmholtz pode ser transformada na equação de difusão pela transformação $k \rightarrow ik$. De modo semelhante, $k \rightarrow ik$ muda a Equação (11.22a) para a Equação (11.109) e mostra que

$$Y_\nu(k\rho) = Z_\nu(ik\rho).$$

As soluções da Equação (11.109) são funções de Bessel de argumento imaginário. Para obter uma solução que é regular na origem, consideramos Z_ν a função regular de Bessel J_ν . É costumeiro (e conveniente) escolher a normalização de modo que

$$Y_\nu(x) = I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix). \quad (11.110)$$

(Aqui, a variável $k\rho$ está sendo substituída por x por simplicidade.) A normalização $i^{-\nu}$ extra cancela os i^ν de cada termo e transforma $I_\nu(x)$ em real. Muitas vezes isso é escrito como

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(xe^{i\pi/2}). \quad (11.111)$$

I_0 e I_1 são mostradas na Figura 11.10.

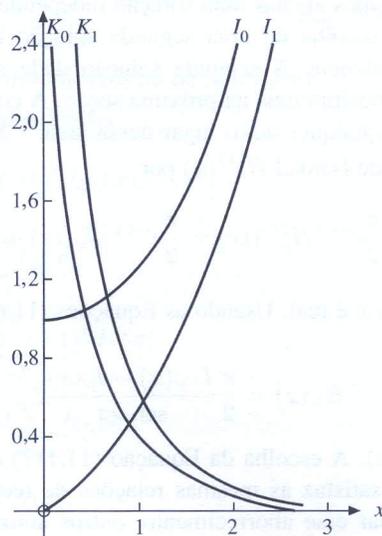


Figura 11.10: Funções modificadas de Bessel.

Forma de Série

Em termos de série infinita, isso equivale a remover o sinal $(-1)^s$ na Equação (11.5) e escrever

$$I_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}, \quad I_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu}. \quad (11.112)$$

Para ν inteiro essa expressão dá como resultado

$$I_n(x) = I_{-n}(x). \quad (11.113)$$

Relações de Recorrência

As relações de recorrência satisfeitas por $I_\nu(x)$ podem ser desenvolvidas pelas expansões de série, mas talvez seja mais fácil trabalhar a partir das relações de recorrência existentes para $J_\nu(x)$. Vamos substituir x por $-ix$ e reescrever a Equação (11.110) como

$$J_\nu(x) = i^\nu I_\nu(-ix). \quad (11.114)$$

Então, a Equação (11.10) se torna

$$i^{\nu-1} I_{\nu-1}(-ix) + i^{\nu+1} I_{\nu+1}(-ix) = \frac{2\nu}{x} i^\nu I_\nu(-ix).$$

Substituindo x por ix , temos a relação de recorrência para $I_\nu(x)$,

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x). \quad (11.115)$$

A Equação (11.12) se transforma em

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \quad (11.116)$$

Essas são as relações de recorrência usadas no Exercício 11.1.14. Vale a pena destacar que, embora duas relações de recorrência, Equações (11.115) e (11.116) ou o Exercício 11.5.7, especifiquem a EDO de segunda ordem, o inverso não é verdadeiro. A EDO não fixa unicamente as relações de recorrência. As Equações (11.115) e (11.116) e o Exercício 11.5.7 dão um exemplo.

Pela Equação (11.113) vê-se que temos apenas uma solução independente quando ν é um inteiro exatamente como nas funções de Bessel J_ν . A escolha de uma segunda solução independente da Equação (11.108) é, em essência, uma questão de conveniência. A segunda solução dada aqui é selecionada com base em seu comportamento assintótico — como mostraremos na próxima seção. A confusão de escolha e notação para essa solução talvez seja maior do que em qualquer outro lugar dessa área.¹⁸ Muitos autores¹⁹ preferem definir uma segunda solução em termos da função de Hankel $H_\nu^{(1)}(x)$ por

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)]. \quad (11.117)$$

O fator $i^{\nu+1}$ torna $K_\nu(x)$ real quando x é real. Usando as Equações (11.60) e (11.110), podemos transformar a Equação (11.117) em²⁰

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}, \quad (11.118)$$

análoga à Equação (11.60) para $N_\nu(x)$. A escolha da Equação (11.117) como definição é um tanto infeliz, no sentido de que a função $K_\nu(x)$ não satisfaz as mesmas relações de recorrência que $I_\nu(x)$ (compare com os Exercícios 11.5.7 e 11.5.8). Para evitar esse aborrecimento, outros autores²¹ incluíram um fator adicional de

¹⁸Encontramos uma discussão e comparação de notações em *Math. Tables Aids Comput.* 1: 207-308 (1944).

¹⁹Watson, Morse ed Feshbach, Jeffreys e Jeffreys (sem o $\pi/2$).

²⁰Para índice inteiro n consideramos o limite $\nu \rightarrow n$.

²¹Whittaker e Watson, veja Leituras Adicionais do Capítulo 13.

$\cos \nu\pi$, o que permite que K_ν satisfaça as mesmas relações de recorrência que as I_ν , mas tem a desvantagem de fazer $K_\nu = 0$ para $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \dots$.

A expansão de série de $K_\nu(x)$ resulta diretamente da forma de série de $H_\nu^{(1)}(ix)$. Os termos de ordem mais baixa são (confrontar as Equações (11.61) e (11.62))

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\ln x - \gamma + \ln 2 + \dots, \\ K_\nu(x) &= 2^{\nu-1}(\nu-1)!x^{-\nu} + \dots \end{aligned} \quad (11.119)$$

Como a função modificada de Bessel I_ν está relacionada à função de Bessel J_ν , tanto quanto \sinh está relacionada a seno, I_ν e a segunda solução K_ν às vezes são denominadas funções hiperbólicas de Bessel. K_0 e K_1 são mostradas na Figura 11.10.

$I_0(x)$ e $K_0(x)$ têm as representações integrais

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x \cos \theta) d\theta, \quad (11.120)$$

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x \sinh t) dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2 + 1)^{1/2}}, \quad x > 0; \quad (11.121)$$

A Equação (11.120) pode ser derivada da Equação (11.30) para $J_0(x)$ ou pode ser considerada um caso especial do Exercício 11.5.4, $\nu = 0$. A representação integral de K_0 , Equação (11.121), é uma transformada de Fourier e pode ser mais bem derivada com transformadas de Fourier, Capítulo 15, ou com funções de Green, Seção 9.7. Uma variedade de outras formas de representações integrais (incluindo $\nu \neq 0$) aparece nos exercícios. Essas representações integrais são úteis no desenvolvimento de formas assintóticas (Seção 11.6) e em conexão com transformadas de Fourier, Capítulo 15.

Para colocar as funções modificadas de Bessel $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ na perspectiva adequada, nós as introduzimos aqui porque:

- Essas funções são soluções da equação modificada de Bessel, uma equação encontrada com muita frequência.
- Elas são necessárias para problemas físicos específicos, tais como os de difusão.
- $K_\nu(x)$ dá uma função de Green, Seção 9.7.
- $K_\nu(x)$ leva a uma determinação conveniente de comportamento assintótico (Seção 11.6).

Exercícios

11.5.1 Mostre que

$$e^{(x/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n,$$

gerando assim funções modificadas de Bessel, $I_n(x)$.

11.5.2 Verifique as seguintes identidades

$$(a) \quad 1 = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}(x),$$

$$(b) \quad e^x = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x),$$

$$(c) \quad e^{-x} = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(x),$$

$$(d) \quad \cosh x = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x),$$

$$(e) \quad \sinh x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x).$$

11.5.3 (a) Pela função geradora do Exercício 11.5.1, mostre que

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \exp[(x/2)(t+1/t)] \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

- (b) Para $n = \nu$, não sendo inteiro, mostre que a representação integral precedente pode ser generalizada para

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[(x/2)(t + 1/t)] \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

O contorno C é o mesmo que o contorno para $J_\nu(x)$, Figura 11.7.

- 11.5.4** Para $\nu > -\frac{1}{2}$, mostre que $I_\nu(z)$ pode ser representada por

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm zp} (1-p^2)^{\nu-1/2} dp \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cosh(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta. \end{aligned}$$

- 11.5.5** Uma cavidade cilíndrica tem raio a e altura l , Figura 11.3. As extremidades, $z = 0$ e l estão em potencial zero. As paredes cilíndricas, $\rho = a$, têm um potencial $V = V(\varphi, z)$.

- (a) Mostre que o potencial eletrostático $\Phi(\rho, \varphi, z)$ tem a forma funcional

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m(k_n \rho) \sin k_n z \cdot (a_{mn} \sin m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi),$$

em que $k_n = n\pi/l$.

- (b) Mostre que os coeficientes a_{mn} e b_{mn} são dados por²²

$$\left. \begin{array}{l} a_{mn} \\ b_{mn} \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi l I_m(k_n a)} \int_0^{2\pi} \int_0^l V(\varphi, z) \sin k_n z \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} dz d\varphi.$$

Sugestão: Expanda $V(\varphi, z)$ como uma série dupla e use a ortogonalidade das funções trigonométricas.

- 11.5.6** Verifique que $K_\nu(x)$ é dada por

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}$$

e, a partir dessa expressão, mostre que

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x).$$

- 11.5.7** Mostre que $K_\nu(x)$ satisfaz as relações de recorrência

$$\begin{aligned} K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x), \\ K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) &= -2K'_\nu(x). \end{aligned}$$

- 11.5.8** Se $\mathcal{K}_\nu = e^{\nu\pi i} K_\nu$, mostre que \mathcal{K}_ν satisfaz as mesmas relações de recorrência que I_ν .

- 11.5.9** Para $\nu > -\frac{1}{2}$ mostre que $K_\nu(z)$ pode ser representada por

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \sinh^{2\nu} t dt, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zp} (p^2 - 1)^{\nu-1/2} dp. \end{aligned}$$

²²Quando $m = 0$, no coeficiente é substituído por 1.