

9

Equações Diferenciais

9.1 Equações Diferenciais Parciais

Introdução

Em Física, saber qual é a força em uma equação de movimento usualmente leva a uma equação diferencial. Por isso, quase todas as numerosas partes avançadas da Física Teórica são formuladas em termos de equações diferenciais. Às vezes elas são equações diferenciais ordinárias de uma só variável (abreviadas para **EDOs**). Na maioria das vezes são equações diferenciais parciais (**EDPs**) de duas ou mais variáveis.

Vamos lembrar que, no cálculo, a operação de considerar uma derivada ordinária ou parcial é uma **operação linear** ($\mathcal{L}$),¹

$$\frac{d(a\varphi(x) + b\psi(x))}{dx} = a \frac{d\varphi}{dx} + b \frac{d\psi}{dx},$$

para EDOs que envolvem derivadas de uma única variável x e nenhuma potência quadrática, $(d\psi/dx)^2$, ou de ordens mais altas. De modo semelhante, para derivações parciais,

$$\frac{\partial(a\varphi(x, y) + b\psi(x, y))}{\partial x} = a \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}.$$

Em geral,

$$\mathcal{L}(a\varphi + b\psi) = a\mathcal{L}(\varphi) + b\mathcal{L}(\psi).$$

Assim, EDOs e EDPs aparecem como equações de operador linear,

$$\mathcal{L}\psi = F, \tag{9.1}$$

em que F é uma função (fonte) conhecida de uma variável (para EDOs) ou de mais variáveis (para EDPs), $\mathcal{L}$ é uma combinação linear de derivadas e ψ é a função desconhecida ou solução. Qualquer combinação linear de soluções é novamente uma solução se $F = 0$; este é o **princípio de superposição** para EDPs homogêneas.

Uma vez que a dinâmica de muitos sistemas físicos envolve apenas duas derivadas (por exemplo, aceleração na Mecânica Clássica e o operador de energia cinética, $\sim \nabla^2$, na Mecânica Quântica), equações diferenciais de segunda ordem ocorrem com muita frequência na Física. (As equações de Maxwell e Dirac são de primeira ordem, mas envolvem duas funções desconhecidas. A eliminação de uma dessas funções resulta em uma equação diferencial de segunda ordem para a outra (compare com a Seção 1.9.)

Exemplos de EDPs

Entre as EDPs encontradas com maior frequência estão as seguintes:

1. Equação de Laplace, $\nabla^2 \psi = 0$.

Essa equação muito comum e muito importante ocorre em estudos de

- (a) fenômenos eletromagnéticos, incluindo eletrostática, dielétricos, correntes estáveis e magnetostática,
- (b) hidrodinâmica (escoamento irrotacional de fluido perfeito e ondas superficiais),
- (c) fluxo de calor,
- (d) gravitação.

¹Estamos especialmente interessados em operadores lineares porque na Mecânica Quântica as quantidades físicas são representadas por operadores lineares em um espaço de Hilbert, complexo, de número infinito de dimensões.

2. Equação de Poisson, $\nabla^2 \psi = -\rho/\epsilon_0$.

Em contraste com a equação homogênea de Laplace, a equação de Poisson é não-homogênea com um termo de fonte $-\rho/\epsilon_0$.

3. As equações de onda (Helmholtz) e as equações de difusão independentes de tempo, $\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0$.

Essas equações aparecem em fenômenos tão diversos como

- (a) ondas elásticas em sólidos, incluindo cordas, barras e membranas vibratórias,
- (b) som ou acústica,
- (c) ondas eletromagnéticas,
- (d) reatores nucleares.

4. A equação de difusão dependente de tempo

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

e as formas quadridimensionais correspondentes que envolvem o d'alembertiano, um análogo quadridimensional do laplaciano no espaço de Minkowski,

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

5. A equação de onda dependente de tempo, $\partial^2 \psi = 0$.

6. A equação de potencial escalar, $\partial^2 \psi = \rho/\epsilon_0$.

Assim como a equação de Poisson, essa equação é não-homogênea com um termo de fonte ρ/ϵ_0 .

7. A equação de Klein-Gordon, $\partial^2 \psi = -\mu^2 \psi$, e as equações vetoriais correspondentes, nas quais a função escalar ψ é substituída por uma função vetorial. Outras formas, mais complicadas, são comuns.

8. A equação de onda de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi,$$

para o caso independente de tempo.

9. As equações para ondas elásticas e fluidos viscosos e a equação da telegrafia.

10. Equações diferenciais parciais acopladas de Maxwell para campos elétricos e magnéticos e as de Dirac para funções de onda relativistas de elétron. Para equações de Maxwell, veja a Introdução e também a Seção 1.9.

Algumas técnicas gerais para resolver EDPs de segunda ordem são discutidas nesta seção.

1. Separação de variáveis quando a EDP é subdividida em EDOs que são relacionadas por constantes comuns que aparecem como autovalores de operadores lineares, $\mathcal{L}\psi = l\psi$, usualmente de uma só variável. Esse método guarda uma relação muito próxima com **simetrias da EDP e um grupo de transformações** (veja a Seção 4.2). A equação de Helmholtz, exemplo 3 da lista, tem essa forma, em que o autovalor k^2 pode surgir pela separação do tempo t das variáveis espaciais. Da mesma forma, no exemplo 8 a energia E é o autovalor que surge pela separação de t de $\mathbf{r}$ na equação de Schrödinger. Examinamos isso no Capítulo 10 com mais detalhes. A Seção 9.2 serve como introdução. EDOs podem ser atacadas pelo método de série de potências de Frobenius na Seção 9.5. O método nem sempre funciona, mas, quando funciona, é o método mais simples.
2. Conversão de uma EDP em uma equação integral usando **funções de Green** aplica-se a EDPs **não-homogêneas**, tais como os exemplos 2 e 6 dados acima. Uma introdução à técnica da função de Green é dada na Seção 9.7.
3. Outros métodos analíticos, tais como a utilização de transformadas integrais, são desenvolvidos e aplicados no Capítulo 15.

Ocasionalmente encontramos equações de ordens mais altas. Tanto na teoria do movimento lento de um fluido viscoso quanto na teoria de um corpo elástico, encontramos a equação

$$(\nabla^2)^2 \psi = 0.$$

Felizmente, essas equações de ordens mais altas são relativamente raras e não serão discutidas aqui.

Embora nem tão freqüentes e talvez nem tão importantes como as EDOs de segunda ordem, EDOs de primeira ordem aparecem na Física Teórica e às vezes são etapas intermediárias para EDOs de segunda ordem. As soluções de alguns tipos mais importantes de EDOs de primeira ordem são desenvolvidas na Seção 9.2. EDPs de primeira ordem sempre podem ser reduzidas a EDOs. Esse processo é direto, porém longo, e envolve uma procura de características que são apresentadas resumidamente no texto a seguir; para mais detalhes, referimo-nos à literatura.

Classes de EDPs e Características

EDPs de segunda ordem formam três classes: (i) EDPs elípticas envolvem ∇^2 ou $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2$ (ii) EDPs parabólicas, $a\partial/\partial t + \nabla^2$; (iii) EDPs hiperbólicas, $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$. Esses operadores canônicos aparecem por uma troca de variáveis $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ em um operador linear (para duas variáveis apenas, por simplicidade)

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f, \quad (9.2)$$

que pode ser reduzido para as formas canônicas (i), (ii), (iii) conforme o discriminante $D = ac - b^2 > 0$, $= 0$, ou < 0 . Se $\xi(x, y)$ for determinada pela EDP de primeira ordem, mas não-linear,

$$a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (9.3)$$

então o coeficiente de $\partial^2/\partial \xi^2$ em $\mathcal{L}$ (isto é, Equação (9.3)) é zero. Se η for uma solução independente da mesma Equação (9.3), então o coeficiente de $\partial^2/\partial \eta^2$ também é zero. O operador remanescente, $\partial^2/\partial \xi \partial \eta$, em $\mathcal{L}$ é característico do caso hiperbólico (iii) com $D < 0$ ($a = 0 = c$ leva a $D = -b^2 < 0$), em que a forma quadrática de $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ é fatorada e, portanto, a Equação (9.3) tem duas soluções independentes $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$. No caso elíptico (i) com $D > 0$, as duas soluções ξ, η são conjugadas complexas que, quando substituídas na Equação (9.2), removem a derivada mista de segunda ordem em vez dos outros termos de segunda ordem, resultando na forma canônica (i). No caso parabólico (ii) com $D = 0$, somente $\partial^2/\partial \xi^2$ permanece em $\mathcal{L}$, enquanto os coeficientes das outras derivadas de segunda ordem desaparecem.

Se os coeficientes a, b, c em $\mathcal{L}$ são funções das coordenadas, então essa classificação é apenas local; isto é, seu tipo pode mudar quando as coordenadas variam.

Vamos ilustrar a física subjacente ao **caso hiperbólico** examinando a equação de onda, Equação (9.2) (em 1 + 1 dimensões, por simplicidade)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi = 0.$$

Visto que a Equação (9.3) agora se torna

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} - c \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + c \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0$$

e é fatorada, determinamos a solução de $\partial \xi / \partial t - c \partial \xi / \partial x = 0$. Esta é uma função arbitrária $\xi = F(x + ct)$, e $\xi = G(x - ct)$ resolve $\partial \xi / \partial t + c \partial \xi / \partial x = 0$, o que é imediatamente verificado. Por superposição linear, uma solução geral da equação de onda é $\psi = F(x + ct) + G(x - ct)$. Para funções periódicas F, G reconhecemos as retas $x + ct$ e $x - ct$ como as fases de ondas planas ou frentes de onda, em que nem todas as derivadas de segunda ordem de ψ na equação de onda são bem definidas. Os raios da óptica geométrica são normais a frentes de onda. Assim, as retas que são soluções da Equação (9.3) e recebem o nome de **características** ou às vezes **bicaracterísticas** (para EDPs de segunda ordem) correspondem, na literatura matemática, a frentes de onda da solução da óptica geométrica da equação de onda.

Para o **caso elíptico**, vamos considerar a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

para um potencial ψ de duas variáveis. Aqui, a equação característica,

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - i \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0,$$

tem soluções conjugadas complexas: $\xi = F(x + iy)$ para $\partial \xi / \partial x + i(\partial \xi / \partial y) = 0$ e $\xi = G(x - iy)$ para $\partial \xi / \partial x - i(\partial \xi / \partial y) = 0$. Portanto, uma solução geral da equação de Laplace é $\psi = F(x + iy) + G(x - iy)$, bem como as partes real e imaginária de ψ , que são denominadas funções **harmônicas**, enquanto as soluções polinomiais são denominadas **polinômios harmônicos**.

Em Mecânica Quântica, a forma de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), $\psi = \exp(-iS/\hbar)$, para a solução da equação de Schrödinger, uma EDP parabólica complexa,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

leva à equação de Hamilton-Jacobi da Mecânica Clássica,

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (9.4)$$

no limite de $\hbar \rightarrow 0$. A clássica ação S obedece à equação de Hamilton-Jacobi, que é a análoga da Equação (9.3) da equação de Schrödinger. Substituindo $\nabla\psi = -i\psi\nabla S/\hbar$, $\partial\psi/\partial t = -i\psi(\partial S/\partial t)/\hbar$ na equação de Schrödinger, descartando ψ , o fator global que não desaparece, e tomando o limite da equação resultante, à medida que $\hbar \rightarrow 0$, obtemos, de fato, a Equação (9.4).

Achar soluções de EDPs resolvendo para as características é uma das diversas técnicas gerais. Se o leitor quiser mais exemplos, consulte H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Nova York: Dover (1944); K. E. Gustafson, *Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*, 2ª ed., Nova York: Wiley (1987), nova tiragem, Dover (1998).

Para derivar e apreciar mais o método matemático por trás dessas soluções de EDPs hiperbólicas, parabólicas e elípticas, vamos reconsiderar a EDP (9.2) com coeficientes constantes e, a princípio, $d = e = f = 0$ por simplicidade. De acordo com a forma das soluções de frente de onda, buscamos uma solução $\psi = F(\xi)$ da Equação (9.2) com uma função $\xi = \xi(t, x)$ usando as variáveis t, x em vez de x, y . Então, as derivadas parciais se tornam

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{dF}{d\xi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{dF}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \frac{dF}{d\xi} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \frac{d^2F}{d\xi^2},$$

e

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t} \frac{dF}{d\xi} + \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \frac{dF}{d\xi} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 \frac{d^2F}{d\xi^2},$$

usando a regra da cadeia da diferenciação. Quando ξ depende de x e t **linearmente**, essas derivadas parciais de ψ resultam em um único termo e, como consequência, resolvem nossa EDP (9.2). Por $\xi = \alpha x + \beta t$ linear, obtemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = \alpha\beta \frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{d^2F}{d\xi^2},$$

e nossa EDP (9.2) se torna equivalente à análoga da Equação (9.3),

$$(\alpha^2 a + 2\alpha\beta b + \beta^2 c) \frac{d^2F}{d\xi^2} = 0. \quad (9.5)$$

Uma solução de $\frac{d^2F}{d\xi^2} = 0$ só leva à trivial $\psi = k_1 x + k_2 t + k_3$ com k_i constantes que é linear nas coordenadas e para a qual todas as derivadas de segunda ordem desaparecem. Por outro lado, por $\alpha^2 a + 2\alpha\beta b + \beta^2 c = 0$, obtemos as razões

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c} [-b \pm (b^2 - ac)^{1/2}] \equiv r_{1,2} \quad (9.6)$$

como soluções da Equação (9.5) com $\frac{d^2F}{d\xi^2} \neq 0$ em geral. As retas $\xi_1 = x + r_1 t$ e $\xi_2 = x + r_2 t$ resolverão a EDP (9.2), com $\psi(x, t) = F(\xi_1) + G(\xi_2)$ correspondendo à generalização de nossos exemplos precedentes de EDPs hiperbólica e elíptica.

Para o caso parabólico, em que $b^2 = ac$, há somente uma razão da Equação (9.6), $\beta\alpha = r = -b/c$, e uma (solução, $\psi(x, t) = F(x - bt/c)$). Para achar a segunda solução geral de nossa EDP (9.2), fazemos (solução experimental) o Ansatz $\psi(x, t) = \psi_0(x, t) \cdot G(x - bt/c)$. Substituindo essa expressão na Equação (9.2), encontramos

$$a \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial t} + c \frac{\partial^2\psi_0}{\partial t^2} = 0,$$

para ψ_0 , uma vez que substituir $F \rightarrow G$, G resolve a Equação (9.5) com $d^2G/d\xi^2 \neq 0$ em geral. A solução ψ_0 pode ser qualquer solução de nossa EDP (9.2), incluindo as triviais, como $\psi_0 = x$ e $\psi_0 = t$. Assim, obtemos a **solução parabólica geral**,

$$\psi(x, t) = F\left(x - \frac{b}{c}t\right) + \psi_0(x, t)G\left(x - \frac{b}{c}t\right),$$

com $\psi_0 = x$ ou $\psi_0 = t$, etc.

Com o mesmo Ansatz achamos soluções de nossa EDP (9.2) com um termo de fonte, por exemplo, $f \neq 0$, mas, ainda $d = e = 0$ e a, b, c constantes.

Em seguida determinamos as características, isto é, curvas as derivadas de segunda ordem das solução ψ não são bem definidas. Essas curvas são as frentes de onda ao longo das quais as soluções de nossa EDP hiperbólica (9.2) se propagam. Resolvemos nossa EDP com um termo de fonte $f \neq 0$ e condições de fronteira de Cauchy (veja a Tabela 9.1) adequadas para EDPs hiperbólicas, em que ψ e sua derivada parcial normal $\partial\psi/\partial n$ são especificadas sobre uma curva aberta.

$$\mathcal{C} : x = x(s), \quad t = t(s),$$

sendo o parâmetro s o comprimento sobre $\mathcal{C}$. Então, $d\mathbf{r} = (dx, dt)$ é tangente e $\hat{n} ds = (dt, -dx)$ é normal à curva $\mathcal{C}$, e as derivadas de primeira ordem tangencial e normal são dadas pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \nabla\psi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{dt}{ds}, \\ \frac{d\psi}{dn} &= \nabla\psi \cdot \hat{n} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dt}{ds} - \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

Por essas duas equações lineares, $\partial\psi/\partial t$ e $\partial\psi/\partial x$ podem ser determinadas sobre $\mathcal{C}$, contanto que

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} \\ \frac{dt}{ds} & -\frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = -\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \neq 0.$$

Para as derivadas de segunda ordem usamos novamente a regra da cadeia

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{dt}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}, \quad (9.7a)$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} + \frac{dt}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \quad (9.7b)$$

Por nossa EDP (9.2) e Equações (9.7a,b), que são lineares nas derivadas de segunda ordem, elas não podem ser calculadas quando o determinante desaparece, isto é,

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} \end{vmatrix} = a\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - 2b\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds} + c\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0. \quad (9.8)$$

Pela Equação (9.8), que define as características, constatamos que a razão tangente dx/dt obedece a

$$c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2b\frac{dx}{dt} + a = 0,$$

então,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c} [b \pm (b^2 - ac)^{1/2}]. \quad (9.9)$$

Para os exemplos anteriores de equação de onda hiperbólica (e de potencial elíptico), $b = 0$ e a, c são constantes, portanto as soluções $\xi_i = x + tr_i$ da Equação (9.6) coincidem com as características da Equação (9.9).

EDPs Não-Lineares

EDOs e EDPs não-lineares são uma área importante e de rápido crescimento. Antes já encontramos a mais simples das equações lineares de onda,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

como a EDP de primeira ordem das frentes de onda da equação de onda. A mais simples das equações de onda não-lineares,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (9.10)$$

resulta se a velocidade local de propagação, c , não é constante, mas depende da onda ψ . Quando uma equação não-linear tem uma solução da forma $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, em que $\omega(k)$ varia com k , de modo que $\omega''(k) \neq 0$, então ela é denominada **dispersiva**. Talvez a mais conhecida equação dispersiva não-linear seja a equação de **Korteweg-de Vries**

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0, \quad (9.11)$$

que modela a propagação sem perda de ondas de águas rasas e outros fenômenos. Ela é muito conhecida por suas soluções **sóliton**. Um sóliton é uma onda em movimento que tem a propriedade de persistir durante uma interação com um outro sóliton: após passarem uma pela outra, elas emergem com a mesma forma e com a mesma velocidade e adquirem não mais do que uma mudança de fase. Seja $\psi(\xi = x - ct)$ essa onda em movimento. Quando substituída na Equação (9.11), o resultado é a EDO não-linear

$$(\psi - c) \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d^3 \psi}{d\xi^3} = 0, \quad (9.12)$$

que pode ser integrada para dar

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = c\psi - \frac{\psi^2}{2}. \quad (9.13)$$

Não há nenhuma constante de integração aditiva na Equação (9.13) para garantir que $d^2 \psi / d\xi^2 \rightarrow 0$ com $\psi \rightarrow 0$ para ξ grande, portanto ψ está localizada na característica $\xi = 0$ ou $x = ct$. Multiplicando a Equação (9.13) por $d\psi/d\xi$ e integrando novamente, temos como resultado

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}, \quad (9.14)$$

em que $d\psi/d\xi \rightarrow 0$ para ξ grande. Considerando a raiz da Equação (9.14) e integrando mais uma vez, temos como resultado a solução sóliton

$$\psi(x - ct) = \frac{3c}{\cosh^2(\sqrt{c} \frac{x-ct}{2})}. \quad (9.15)$$

Alguns tópicos não-lineares, por exemplo, a equação logística e a instalação do caos, são novamente abordadas no Capítulo 18. Se o leitor quiser mais detalhes e literatura, consulte J. Guckenheimer, P. Holmes e F. John, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, edição revista, Nova York: Springer-Verlag (1990).

Condições de Contorno

Em geral, quando conhecemos um sistema físico em algum ponto do tempo e a lei que governa o processo físico, então conseguimos prever o desenvolvimento subsequente. Tais valores iniciais são as condições de contorno mais comuns associadas com EDOs e EDPs. Achar soluções que se ajustam a pontos, curvas ou superfícies dadas corresponde a problemas de valor de contorno. Habitualmente as soluções devem satisfazer certas condições de contorno impostas (por exemplo, assintóticas). Essas condições podem assumir três formas:

1. **Condições de contorno de Cauchy.** O valor de uma função e derivada normal especificado sobre o contorno. Em eletrostática isso significaria φ , o potencial, e E_n , a componente normal do campo elétrico.
2. **Condições de contorno de Dirichlet.** O valor de uma função especificado sobre o contorno.
3. **Condições de contorno de Neumann.** A derivada normal (gradiente normal) de uma função especificada sobre o contorno. No caso da eletrostática, isso seria E_n e, portanto, σ , a densidade superficial de carga.

Um resumo da relação entre esses três tipos de condições de contorno e os três tipos de equações parciais diferenciais bidimensionais é dado na Tabela 9.1. Se o leitor se interessar por discussões mais extensas dessas equações diferenciais parciais, pode consultar Morse e Feshbach, Capítulo 6 (veja Leituras Adicionais).

Partes da Tabela 9.1 são simplesmente uma questão de manter consistência interna ou de bom senso. Por exemplo, para a equação de Poisson com uma superfície fechada, as condições de Dirichlet levam a uma solução única, estável. As condições de Neumann, independentes das condições de Dirichlet, levam, da mesma forma, a uma solução única, estável, independente da solução de Dirichlet. Por conseguinte, as condições de contorno de Cauchy (isto é, Dirichlet mais Neumann) poderiam levar a uma inconsistência.

Tabela 9.1

Condições de contorno	Tipo de equação diferencial parcial		
	Elíptica	Hiperbólica	Parabólica
Condições	Laplace, Poisson em (x, y)	Equação de onda em (x, t)	Equação de difusão em (x, t)
Cauchy			
Superfície aberta	Resultados não-físicos (instabilidade)	Solução única, estável	Muito restritiva
Superfície fechada	Muito restritiva	Muito restritiva	Muito restritiva
Dirichlet			
Superfície aberta	Insuficiente	Insuficiente	Solução única, estável , em uma só direção
Superfície fechada	Solução única, estável	Solução não-única	Muito restritiva
Neumann			
Superfície aberta	Insuficiente	Insuficiente	Solução única, estável em uma só direção
Superfície fechada	Solução única, estável	Solução não-única	Muito restritiva

O termo **condições de contorno** inclui como um caso especial o conceito de **condições iniciais**. Por exemplo, especificar a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_0 em algum problema de dinâmica corresponderia às condições de contorno de Cauchy. A única diferença na utilização presente de condições de contorno nesses problemas unidimensionais é que vamos aplicar as condições em **ambas** as extremidades do intervalo permitido da variável.

9.2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

A Física envolve algumas equações diferenciais de primeira ordem. Para não deixar nada de fora (e fazer uma revisão), é bom abordar esse assunto brevemente. Aqui, consideramos equações diferenciais da forma geral

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (9.16)$$

A Equação (9.16) é claramente uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Ela é de **primeira ordem** porque contém somente a derivada de primeira ordem e nenhuma derivada de ordem mais alta. É **ordinária** porque a única derivada, dy/dx , é uma derivada ordinária ou total. A Equação (9.16) pode ser ou não **linear**, embora vamos tratar explicitamente do caso linear mais adiante, Equação (9.25).

Variáveis Separáveis

Freqüentemente a Equação (9.16) terá a forma especial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x)}{Q(y)}. \quad (9.17)$$

Então ela pode ser reescrita como

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0.$$