

LOM3253 Física Matemática 2017 – S2

Parte 2. Funções de variável complexa

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Subconjuntos no plano complexo

Definição 2 1. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, o conjunto

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$$

é chamado de disco aberto centrado em z_0 e de raio $r > 0$.

2. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, o conjunto

$$D[z_0, r] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$$

é chamado de disco fechado centrado em z_0 e de raio $r > 0$.

3. Um ponto $z_0 \in X \subset \mathbb{C}$ é chamado ponto interior de X se existir $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset X$.

4. Dizemos que $X \subset \mathbb{C}$ é aberto se todo $x \in X$ é ponto interior de X .

5. Dizemos que $X \subset \mathbb{C}$ é fechado se o seu complementar for aberto.

6. A fronteira de $X \subset \mathbb{C}$, denotada por ∂X , é formada por todo ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que z não é ponto interior de X e z também não é ponto interior do complementar de X . Equivalentemente, $z \in \partial X$ se e somente se para todo $r > 0$, existem $z_1 \in X$ e z_2 no complementar de X tal que $z_1, z_2 \in D(z, r)$.

Exemplo 12 O disco aberto é um exemplo de conjunto aberto, bem como uma reunião qualquer de discos abertos.

Exemplo 13 O disco fechado é um exemplo de conjunto fechado, bem como uma intersecção qualquer de discos fechados.

Geometria Analítica no plano complexo

Exemplo 14 Considere a equação geral da reta no plano cartesiano dada por $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$. Enfatizamos que as constantes a, b e c são números reais e que um ponto que está sobre esta reta tem coordenadas reais. Mostre que a esta equação pode ser escrita na forma

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta = 0$$

onde $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Lembre que $2x = z + \bar{z}$ e $2iy = z - \bar{z}$. Com isto, vemos que um ponto $z = x + iy$ está sobre a reta dada se e somente se

$$a \frac{z + \bar{z}}{2} + b \frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{a - bi}{2} z + \frac{a + bi}{2} \bar{z} + c = 0,$$

que está na forma desejada. □

Exemplo 15 Mostre que o círculo $C(z_o, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_o| = r\}$ pode ser escrito como

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta = 0$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Temos

$$|z - z_o| = r \Leftrightarrow |z - z_o|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_o) \overline{(z - z_o)} = r^2 \Leftrightarrow (z - z_o)(\bar{z} - \bar{z}_o) = r^2$$

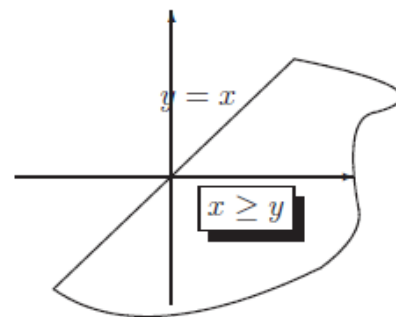
$$\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z}_o z - z_o \bar{z} + |z_o|^2 - r^2 = 0,$$

que está na forma desejada.

Geometria Analítica no plano complexo

Exercício 4 Descreva geometricamente o conjunto $R = \{z \in \mathbb{C}; \Re z \geq \Im(z+1)\}$.

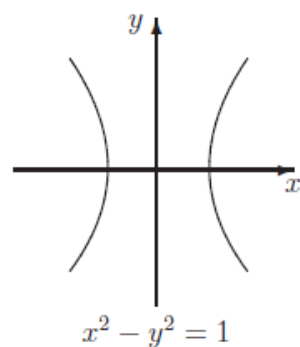
Colocando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $x = \Re z$ e $y = \Im(z+1)$ e, assim, $z \in R$ se e somente se $x \geq y$. Desta forma, R representa o semiplano fechado determinado pela reta $z = y$ que contém o ponto $(1, 0)$.



Exercício 5 Descreva geometricamente o conjunto $R = \{z \in \mathbb{C}; \Re z^2 = 1\}$.

Colocando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $\Re z^2 = x^2 - y^2$ e, portanto,

$$\Re z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1, \quad \text{que representa uma hipérbole.}$$



Exercício 6 Descreva geometricamente o conjunto $R = \{z \in \mathbb{C}; \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 2\}$.

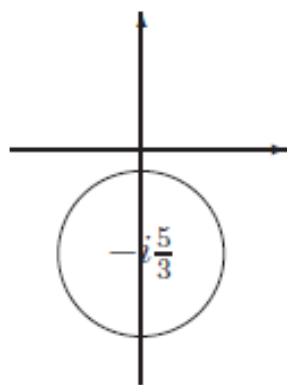
Colocando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $z \in R$ se e somente se

$$|z - i| = 2|z + i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4x^2 + 4(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9},$$

isto é, $\mathcal{R} = C(-i\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, o círculo centrado em $-i\frac{5}{3}$ com raio $\frac{4}{3}$.



Algumas funções elementares complexas (de variável complexa)

Seja D um subconjunto de $\mathbb{C}$. Uma função f a valores complexos sobre D é uma relação que a cada $z \in D$ associa um único elemento de $\mathbb{C}$, denotado por $f(z)$. Usaremos a notação $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, para representar uma função definida em D que toma valores em $\mathbb{C}$. As funções

$$z \mapsto \Re f(z) \quad \text{e} \quad z \mapsto \Im f(z)$$

são chamadas de partes real e imaginária de f , respectivamente. Usando a identificação $z = x + iy = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, podemos definir as funções $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(x, y) = \Re f(x + iy) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \Im f(x + iy).$$

Note que u e v são funções de duas variáveis a valores reais.

Exemplo 16 Fixados $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, definimos

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

que é chamada de função polinomial. Os números $a_0, \dots, a_n$ são chamados de coeficientes de f .

Exercício 7 Mostre que se f é uma função polinomial com coeficientes reais então $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Em particular, $f(z_0) = 0$ se e somente se $f(\overline{z_0}) = 0$.

Exemplo 17 Seja $f(z) = z^2 - 3iz - 2$. Note que $f(i) = -1 + 3 - 2 = 0$ mas $f(\overline{i}) = f(-i) = -1 - 3 - 2 = -6 \neq 0$.

Algumas funções elementares complexas (de variável complexa)

Exemplo 18 Se p e q são funções polinomiais, definimos a função racional $h(z) = p(z)/q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $q(z) \neq 0$. Mais adiante veremos que para cada função polinomial, digamos q , existe somente um número finito de números complexos satisfazendo $q(z) = 0$.

Exercício 8 Seja $f(z) = 1/z$ definida para $z \neq 0$. Encontre as partes real e imaginária de f .

Colocando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Assim, as partes real e imaginária são dadas, respectivamente, por

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Exercício 9 Seja

$$h(z) = (1 + i) \frac{z - i}{z + 1}, \quad z \neq -1.$$

Mostre que imagem do conjunto $S = \{\cos \theta + i \sin \theta, -\pi < \theta < \pi\}$ é o eixo real.

Note que S é o círculo centrado na origem de raio um do qual foi excluído o número -1 . Para $-\pi < \theta < \pi$ temos

$$\begin{aligned} h(\cos \theta + i \sin \theta) &= (1 + i) \frac{\cos \theta + i(\sin \theta - 1)}{1 + \cos \theta + i \sin \theta} \\ &= (1 + i) \frac{\cos \theta + i(\sin \theta - 1)}{1 + \cos \theta + i \sin \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} \\ &= (1 + i) \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta + i(-1 + \sin \theta - \cos \theta)}{2(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{2(1 + \cos \theta)} (1 + i)(1 - i) = \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além do mais, usando L'Hospital para função de variável real, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^+} \frac{-\sin \theta - \cos \theta}{-\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^+} (1 + \cotg \theta) = -\infty$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{-\sin \theta - \cos \theta}{-\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} (1 + \cotg \theta) = +\infty$$

e como $\varphi(\theta) = h(\cos \theta + i \sin \theta)$, é uma função contínua de $-\pi < \theta < \pi$, vemos que a imagem de S pela função h é todo o eixo real. $\square$

Função exponencial de variável complexa

Prova:

Definição 3 Definimos a função exponencial por

$$\exp z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y), \quad \text{onde } x = \Re z, y = \Im z.$$

Proposição 8 Mostre que

1. $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $|\exp z| = e^{\Re z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$; em particular $\exp z \neq 0$;
3. $(\exp z)^n = \exp(nz)$ para $z \in \mathbb{C}$ e n inteiro;
4. $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$;
5. Se z é real então

$$\exp z = e^z, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad e$$
$$\operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

1. Escrevendo $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, e utilizando a fórmula para o produto (veja 6), obtemos

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\ &= [e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)] [e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)] = \exp z_1 \exp z_2; \end{aligned}$$

2. basta notar que $|\cos y + i \operatorname{sen} y| = 1$ e $e^{\Re z} > 0$;
3. como $\exp z \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} (\exp z)^n &= (e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y))^n = e^{nx} (\cos(ny) + i \operatorname{sen}(ny)) \\ &= \exp(nx + iny) = \exp(nz); \end{aligned}$$

4. escrevendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{\exp z} &= \overline{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)} \\ &= e^x (\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^x (\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)) = \exp(x - iy) = \exp \bar{z}. \end{aligned}$$

5. Se z é real então $\Im z = 0$, $z = \Re z$ e pela definição de exponencial, temos

$$\exp z = e^{\Re z} (\cos(\Im z) + i \operatorname{sen}(\Im z)) = e^z (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^z.$$

Como z é real também temos $\Re(iz) = \Re(-iz) = 0$ e $\Im(iz) = z = -\Im(-iz)$. Assim

$$\begin{cases} \exp(iz) = \cos z + i \operatorname{sen} z \\ \exp(-iz) = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos z - i \operatorname{sen} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\ \operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}. \end{cases}$$

Funções de variável complexa

Definição 4

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Proposição 9 Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

1. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, onde $x = \Re z$ e $y = \Im z$;

2. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, onde $x = \Re z$ e $y = \Im z$;

3. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, onde $x = \Re z$ e $y = \Im z$;

4. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, onde $x = \Re z$ e $y = \Im z$;

5. $\cos z = 0$ se e somente se $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

6. $\sin z = 0$ se e somente se $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

7. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;

8. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$;

9. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$;

10. $\cos(-z) = \cos z$;

11. $\sin(-z) = -\sin z$;

12. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

13. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$;

14. $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$;

15. $\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \cos z_1$;

16. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$;

17. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

Funções de variável complexa

Definição 6 *As funções complexas seno e cosseno hiperbólicos são definidas por:*

$$\sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \quad e \quad \cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}.$$

Deixamos como exercício a verificação da seguinte

Proposição 10 *Temos*

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
2. $|\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \sin^2 y$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$;
4. $\cosh z = 0$ se e somente se $z = \frac{2k+1}{2}\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$;
5. $\sinh z = 0$ se e somente se $z = k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Funções de variável complexa – limite e continuidade

Definição 7 *Sejam $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_o \in \mathbb{C}$. Dizemos que existe o limite de f em z_o se existir $L \in \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$z \in D, 0 < |z - z_o| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Deixamos como exercício a verificação de que se existir $L \in \mathbb{C}$ satisfazendo a definição acima, ele é o único. Neste caso, usaremos a notação

$$L = \lim_{z \rightarrow z_o} f(z).$$

Geometricamente, a existência do limite de f em z_o significa que dado qualquer disco C centrado em L , é possível encontrar um outro disco centrado em z_o cujos pontos distintos de z_o e que estão em D são mandados por f em C .

Funções de variável complexa – limite e continuidade

Exemplo 21 *Verifique que*

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} \alpha = \alpha, \alpha \text{ constante} \quad (ii) \lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0 \quad (iii) \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \overline{z_0} \quad (iv) \lim_{z \rightarrow z_0} |z| = |z_0|$$

Seja $\varepsilon > 0$.

- (i) Tome $\delta > 0$ qualquer e daí $|\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$.
- (ii) Tome $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $|z - z_0| < \delta$ temos $|z - z_0| < \delta = \varepsilon$.
- (iii) Tome $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $|z - z_0| < \delta$ temos $|\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon$.
- (iv) Tome $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $|z - z_0| < \delta$ temos $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \delta = \varepsilon$. $\square$

Proposição 11 *Sejam f, g funções tais que existem $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$. Temos*

1. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \beta \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

2.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

3. Se $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

2. Coloque $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e $M = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$. Usando a definição de limite, tome $\delta_1 > 0$ tal que $|f(z) - L| < 1$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta_1$. Segue que

$$|f(z)| \leq |f(z) - L| + |L| < 1 + |L| \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

Usando a definição de limite, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_2.$$

Também, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$|g(z) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_3.$$

Coloque $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Se $0 < |z - z_0| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - LM| &= |f(z)(g(z) - M) + M(f(z) - L)| \leq |f(z)||g(z) - M| + |M||f(z) - L| \\ &\leq (1 + |L|)\frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} + |M|\frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Funções de variável complexa – limite e continuidade

Exemplo 22 Como já vimos que $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$ segue da proposição anterior que se $f(z)$ é uma função polinomial que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Além do mais, se g é também polinomial com $g(z_0) \neq 0$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}.$$

Exercício 10 Encontre, se possível, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$.

Note que sobre se $z \neq 0$ é real temos $\frac{\bar{z}}{z} = 1$ e se $z \neq 0$ é imaginário puro temos $\frac{\bar{z}}{z} = -1$. Como todo disco centrado na origem possui números real e imaginário puro, concluímos, pela unicidade do limite, que não existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$. $\square$

Proposição 12 Sejam $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, u e v as partes real e imaginária de f e $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. A fim de exista o limite de f em z_0 é necessário e suficiente que existam os limites de u e v em (x_0, y_0) . Em caso afirmativo, vale

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y).$$

Exemplo 23 Utilizando a proposição acima e observando as partes real e imaginária das funções exponencial, seno e cosseno, vemos que se $z_0 \in \mathbb{C}$ então

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} \exp z = \exp z_0 \quad (ii) \lim_{z \rightarrow z_0} \sin z = \sin z_0 \quad (iii) \lim_{z \rightarrow z_0} \cos z = \cos z_0.$$

Funções de variável complexa – limite e continuidade

Definição 8 *Sejam $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_o \in D$. Dizemos que f é contínua em z_o se*

$$\lim_{z \rightarrow z_o} f(z) = f(z_o).$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todos os pontos de D .

Observação 6 *Segue da proposição 11 que se f e g são contínuas em z_o então para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ que $\alpha f + \beta g$ é contínua em z_o . Além do mais, o produto fg é contínuo em z_o e o mesmo vale para f/g desde que $g(z_o) \neq 0$.*

Observação 7 *Segue da proposição 12 que uma condição necessária e suficiente para que f seja contínua é que as suas partes real e imaginária sejam contínuas.*

Exemplo 24 *A função $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ é contínua para todo $z \neq 0$.*

Basta notar que se $z_o \neq 0$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_o} \bar{z}}{\lim_{z \rightarrow z_o} z} = \frac{\bar{z}_o}{z_o} = f(z_o).$$

Proposição 13 *Sejam $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se f é contínua em $z_o \in D$ e g é contínua em $\zeta_o = f(z_o)$ então a composta $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ também é contínua em z_o .*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de g em ζ_o , existe δ_1 tal que

$$|g(\zeta) - g(\zeta_o)| = |g(\zeta) - g(f(z_o))| < \varepsilon \quad \text{sempre que } |\zeta - \zeta_o| < \delta_1. \quad (8.1)$$

Por outro lado, existe $\delta > 0$ então

$$|f(z) - \zeta_o| = |f(z) - f(z_o)| < \delta_1 \quad \text{sempre que } |z - z_o| < \delta.$$

Combinando a desigualdade acima com 8.1, obtemos que

$$|g(f(z)) - g(f(z_o))| < \varepsilon \quad \text{sempre que } |z - z_o| < \delta.$$

Funções de variável complexa – derivação

Definição 9 *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$. Dizemos que f é derivável em z_0 se o seguinte limite existir*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ou equivalentemente, caso exista

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Em caso afirmativo, escreveremos

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

e diremos que $f'(z_0)$ é a derivada de f em z_0 .

Observação 10 *Note que $f'(z_0)$ é a derivada de f em $z_0 \in D$ se e somente se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \quad \text{sempre que } |z - z_0| < \delta,$$

ou equivalentemente,

$$|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h| \leq \varepsilon |h| \quad \text{sempre que } |h| < \delta.$$

Proposição 14 *Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em $z_0 \in D$ então f é contínua em z_0 .*

Funções de variável complexa – derivação

Proposição 14 Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em $z_0 \in D$ então f é contínua em z_0 .

Prova: Note que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Proposição 15 Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $z_0 \in D$ e $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$. Se f e g são deriváveis em z_0 então

1. $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

2. $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;

3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$, desde que $g(z_0) \neq 0$.

Exemplo 25 Mostre que $f(z) = \alpha z + \beta$ é derivável para qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f'(z) = \alpha$.

Temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha z + \beta - (\alpha z_0 + \beta)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z - z_0)}{z - z_0} = \alpha.$$

Exemplo 27 Se $f_n(z) = z^n$ $n \in \mathbb{N}$ então $f'_n(z) = nz^{n-1}$.

De fato, do exemplo 26 obtemos $f'_1(z) = 1$ e por indução, se assumirmos que $f'_{n-1}(z) = (n-1)z^{n-2}$ então pela proposição anterior,

$$f'_n(z) = (z \cdot z^{n-1})' = 1 \cdot z^{n-1} + z \cdot (n-1)z^{n-2} = nz^{n-1}.$$

□

Exemplo 28 Se $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ então $f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1}$.

Exemplo 29 Se $g_n(z) = z^{-n}$ $n \in \mathbb{N}$ então $g'_n(z) = -nz^{-n-1}$ para todo $z \neq 0$.

Funções de variável complexa – derivação

Teorema 1 *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $z_o = x_o + iy_o \in D$, $x_o, y_o \in \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $u(x, y) = \Re f(z)$ e $v(x, y) = \Im f(z)$. Se f é derivável em z_o então existem as derivadas parciais de u e v em (x_o, y_o) e elas satisfazem*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o). \quad (9.1)$$

Além do mais,

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o). \quad (9.2)$$

Observação 11 *As equações 9.1 são chamadas de equações de Cauchy-Riemann. Embora a parte real e a parte imaginária de uma função f devam satisfazer estas equações para que exista a derivada de f , a simples verificação de 9.1 não é garantia da existência de f' como mostra o seguinte exemplo.*

Exemplo 30 *A função*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

não é derivável em $z = 0$ mas as suas partes real e imaginária satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$.

Funções de variável complexa, derivação

Exemplo 31 A função exponencial é derivável em qualquer $z \in \mathbb{C}$ e $\exp'(z) = \exp z$.

Como $u(x, y) = \Re \exp z = e^x \cos y$ e $v(x, y) = \Im \exp z = e^x \sin y$ são funções de classe C^1 , para mostrar que a exponencial é derivável, resta mostrar que elas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Além do mais,

$$\exp'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \exp(x + iy) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp z.$$

□

Exemplo 32 Temos $\operatorname{sen}' z = \cos z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Pelo item 2 da proposição 9 temos que $u(x, y) = \Re \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y$ e $v(x, y) = \cos x \sinh y$ são de classe C^1 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, pois

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} x \cosh y) = \cos x \cosh y = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sinh y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x \cosh y) = \operatorname{sen} x \sinh y = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sinh y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Além do mais,

$$\operatorname{sen}'(z) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y = \cos z$$

pelo item 1 da proposição 9.

□

Exercício 11 Mostre que $\cos' z = -\operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Funções analíticas de variável complexa

Definição 10 *Sejam D um aberto, $z_0 \in D$ e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é analítica em z_0 se f for derivável em todos os pontos de algum disco aberto centrado em z_0 . Dizemos que f é analítica em D se f for analítica em todos os pontos de D .*

Uma função analítica em $\mathbb{C}$ é chamada de função inteira.

Observação 14 *Usa-se também o termo holomorfa como sinônimo de função analítica.*

Exemplo 33 *As funções polinomiais, exponencial, seno e cosseno (trigonométricos ou hiperbólicos) são exemplos de funções inteiras, pois são deriváveis em todo ponto de $\mathbb{C}$.*

Exemplo 34 *Como toda função polinomial possui apenas um número finito de zeros, podemos ver que as funções racionais são analíticas em todos os pontos onde estão definidas.*

Exemplo 35 *A função $f(z) = |z|^2$ só é derivável na origem. Logo, não é analítica em nenhum ponto.*

Proposição 17 *Se f e g são analíticas em z_0 então as seguintes funções também o são:*

1. $\alpha f + \beta g$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
2. fg
3. f/g desde que $g(z_0) \neq 0$.

Funções analíticas de variável complexa

Proposição 18 (Regra da Cadeia) *Sejam $D, \Omega \subset \mathbb{C}$ abertos, $f : D \rightarrow \Omega$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se f é analítica em D e g é analítica em Ω então a composta $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ também é analítica em D e vale*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0), \quad \text{para todo } z_0 \in D.$$

As funções analíticas possuem uma propriedade geométrica bem interessante como pode ser vista no teorema a seguir.

Teorema 3 *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma analítica tal que $f'(z) \neq 0$. Sejam $u = \Re f$ e $v = \Im f$. Então as curvas de nível de u e v se cruzam ortogonalmente.*

Prova: Como $f' \neq 0$ então os vetores gradientes ∇u e ∇v são não nulos e por um resultado de Cálculo II, temos que ∇u e ∇v são ortogonais às curvas de nível de u e de v , respectivamente. Porém, pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Assim,

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\rangle = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Funções analíticas de variável complexa

Exemplo 36 Considere $f(z) = z^2$, $z \neq 0$. Como $f'(z) = 2z \neq 0$ vemos que as curvas $u(x, y) = \Re f(z) = x^2 - y^2 = c_1$ e $v(x, y) = \Im f(z) = 2xy = c_2$ se cruzam ortogonalmente. Note que estas curvas são hipérbolas.

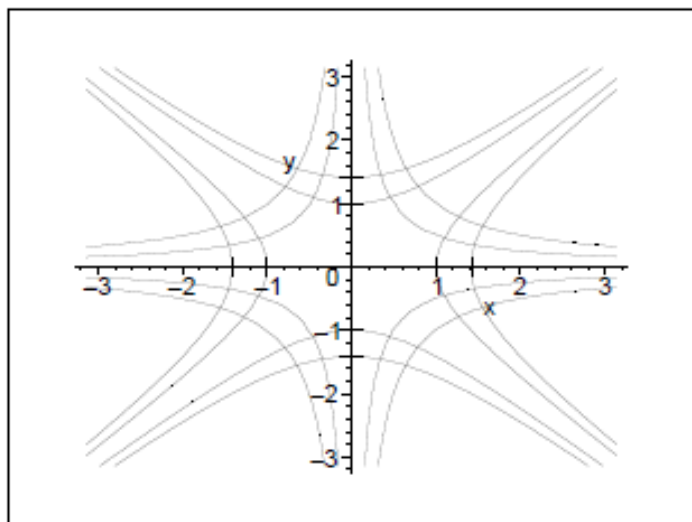


Figura 10.1: $x^2 - y^2 = c_1$ e $2xy = c_2$

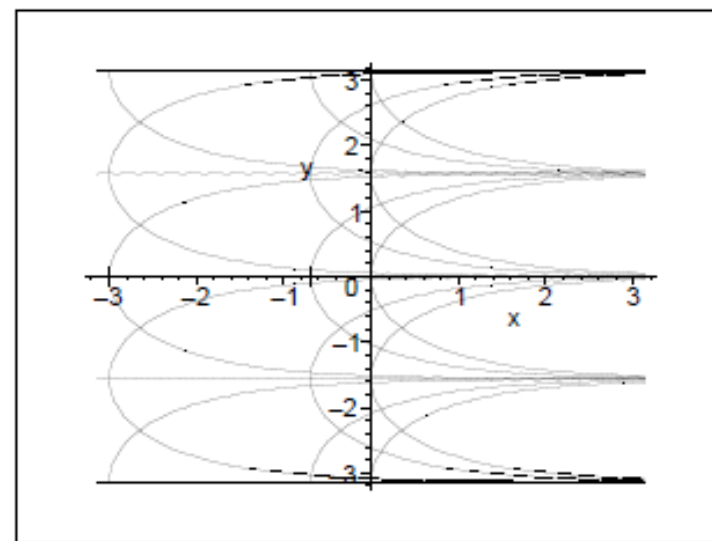


Figura 10.2: $e^x \cos y = c_1$ e $e^x \sin y = c_2$

Exemplo 37 Considere $f(z) = e^z$. Como $f'(z) = e^z \neq 0$ vemos que as curvas $u(x, y) = \Re f(z) = e^x \cos y = c_1$ e $v(x, y) = \Im f(z) = e^x \sin y = c_2$ se cruzam ortogonalmente.

Funções de variável complexa - exercícios

1. Calcule os limites:

a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+z} - \sqrt{2}}{2z}$

2. Determine as derivadas:

a) $f(z) = \frac{z-2i}{2z+i}$

b) $f(z) = (z - i\sqrt{3})^2 (2iz + 1)^3$

3. Demonstre:

a) $\sin iz = i \sinh z$

b) $\cos iz = \cosh z$

Funções multivalentes: raíz n -ésima

Como veremos a situação no complexo terá de ser tratada de modo diferente. O primeiro aspecto a ser observado é que a equação $z^n = z_o$ sempre possui solução e, na verdade, se $z_o \neq 0$, ela possui n soluções distintas. Esta ocorrência de soluções se assemelha ao caso real em que n é par, quando fizemos uma escolha sobre qual raiz seria escolhida. No entanto, a escolha aqui deveria ser feita entre as n soluções existentes.

O outro aspecto a ser considerado decorre do modo como expressamos as raízes n -ésimas na forma polar. Relembrando, se expressarmos $z_o = r_o e^{i\theta_o}$ então as n raízes n -ésimas de z_o são dadas por

$$u_k = \sqrt[n]{r_o} \left(\cos \left(\frac{\theta_o + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_o + 2k\pi}{n} \right) \right) = \sqrt[n]{r_o} e^{i(\theta_o + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (11.1)$$

Fixemos por enquanto uma destas raízes e a denotemos por $\sqrt[n]{z}$. Como a expressão

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$$

envolve θ , o argumento de z , devemos verificar se ela não se altera quando o argumento é trocado por $\theta + 2m\pi$, pois esta mudança não altera o número complexo z . Isto claramente não ocorre pois

$$\sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \neq \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2m\pi + 2k\pi)/n}$$

Funções multivalentes: raiz n -ésima

se m não for um múltiplo de n . Para se ver livre deste inconveniente podemos limitar a variação do argumento de z tomando, por exemplo, $-\pi < \theta \leq \pi$. A fim de simplificar a notação, vamos escolher a raiz correspondente a $k = 0$ na equação 11.1. Note que se z_o é um número real negativo então duas maneiras de representá-lo na forma polar com são $|z_o|e^{-i\pi}$ e $|z_o|e^{i\pi}$. Embora a primeira destas representações não esteja dentro do que impusemos para a variação de θ , ela pode se escrita como

$$|z_o|e^{-i\pi} = \lim_{\theta \rightarrow -\pi+} |z_o|e^{i\theta}.$$

Assim,

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi+} \sqrt[n]{|z_o|e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{-i\frac{\pi}{n}}$$

enquanto que $\sqrt[n]{z_o} = \sqrt[n]{|z_o|e^{i\pi}} = \sqrt[n]{|z_o|}e^{i\frac{\pi}{n}}$. Desta forma, a escolha que fizemos deixa descontínua a função raiz n -ésima nos pontos $z \in \mathbb{R}$, $z < 0$. Na verdade, qualquer outra escolha para k em 11.1 produziria o mesmo efeito. Além do mais, se a restrição no argumento fosse determinada pela variação $\theta_o < \theta \leq \theta_o + 2\pi$, onde $\theta_o \in \mathbb{R}$, a nova definição de raiz n -ésima apresentaria descontinuidade no raio $\{re^{i\theta_o}; r > 0\}$.

Funções multivalentes: raiz n -ésima

Antes de apresentarmos a definição definitiva do que pretendemos dizer por *função raiz n -ésima* note que os únicos valores possíveis para $\sqrt[n]{e^{i\theta/n}}$ quando θ varia são aqueles apresentados em 11.1, com $\theta = \theta_o$ e $r = r_o$. Geometricamente, tomando $z \in \mathbb{C}$, escolhemos um de seus argumentos e após isto, rotacionamos os pontos do plano no sentido anti-horário por um ângulo de 2π . Com isto, a imagem do ponto z pela rotação coincide consigo próprio, porém a expressão $\sqrt[n]{e^{i\theta/n}}$ passará para $\sqrt[n]{e^{i(\theta+2\pi)/n}}$. Aplicando mais uma rotação como a anterior obtemos o novo valor de $\sqrt[n]{e^{i(+4\pi+\theta)/n}}$. Desta maneira, após n destas rotações o resultado será $\sqrt[n]{e^{i(2\pi n+\theta)/n}}$ que é igual a $\sqrt[n]{e^{i\theta/n}}$.

Definimos a *função multivalente* raiz n -ésima, $\sqrt[n]{}$, como sendo a relação que a cada z associa *todas* as n raízes dadas como em 11.1. Vale a pena salientar que uma função multivalente não é uma função no estrito senso da definição de função, já que associa a um elemento do seu domínio mais de um valor.

Funções multivalentes: raiz n -ésima

Considere agora a função

$$R_k(z) = R_k(re^{i\theta}) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad \theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$$

que coincide com um dos valores possíveis para a raiz n -ésima. As suas partes real e imaginária são dadas, respectivamente, por

$$U(r, \theta) = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{e} \quad V(r, \theta) = \sqrt[n]{r} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

são funções de classe C^1 para $r > 0$ e satisfazem

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{1}{r} \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{1}{r} \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}(r, \theta)$$

que são as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. Logo, R_k é analítica e é chamada de um *ramo* da função (multivalente) raiz n -ésima e também é denotado por $\sqrt[n]{}$. Quando tomamos $\theta_o = 0$ e $k = 0$ o ramo é chamado de ramo principal.

Funções multivalentes: logaritmo

Vamos definir o logaritmo de um número complexo z , $\log z$, através da relação

$$w = \log z \Leftrightarrow z = \exp w.$$

Note que $\log z$ não é definido quando $z = 0$, pois já vimos que a função exponencial nunca se anula. Outra observação pertinente é que como a exponencial complexa é uma função periódica de período igual a $2\pi i$ ($\exp(z + 2\pi i) = \exp z$), a expressão $z = \exp w$ não define w de maneira única a partir de z . Com efeito, se para um dado z encontrarmos w tal que $z = \exp w$ então para todo $k \in \mathbb{Z}$ os números $w_k = w + 2k\pi i$ também satisfazem $z = \exp w_k$. Desta maneira, o logaritmo também deve ser definido como uma função multivalente.

Representando $z \neq 0$ na forma polar $re^{i\theta}$ e se w for um dos valores de $\log z$ então

$$z = \exp w \Leftrightarrow re^{i\theta} = \exp w \Leftrightarrow e^{\Re w} = r \quad \text{e} \quad \Im w = \theta + 2k\pi,$$

ou seja, a parte real de w é o logaritmo real de $r = |z|$ e a sua parte imaginária é um argumento qualquer de z . Assim,

$$\log z = \log |z| + i \arg z \tag{11.2}$$

onde o logaritmo que aparece no lado direito da igualdade acima é o logaritmo (natural ou neperiano) real.

Note que o argumento da variável z é também uma função multivalente e, assim, devemos encarar a expressão 11.2 como uma igualdade de conjuntos, ou seja, para cada $z \neq 0$, $\log z$ representa todos os números complexos da forma $\log |z| + i(\arg_o z + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\arg_o z$ é um argumento de z_o fixado.

Funções multivalentes: logaritmo

Exemplo 40 Calcule $\log i$.

Temos

$$\log i = \log |i| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \log 1 + i \frac{4k+1}{2} \pi = i \frac{4k+1}{2} \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 41 Calcule $\log z$ se $\Im z = 0$, $z \neq 0$.

Temos $z = |z|$ se $z > 0$ ou $z = |z|e^{i\pi}$ se $z < 0$. No primeiro caso

$$\log z = \log |z| + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

e no segundo,

$$\log z = \log |z| + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

Funções multivalentes: logaritmo

Quando restringimos a variação do argumento em um intervalo $(\theta_o, \theta_o + 2\pi]$, vemos que a representação 11.2 fica definida de maneira única para todo $z \neq 0$. Porém, como no caso da raiz n -ésima a função deixa de ser contínua sobre os pontos do raio $R_o = \{re^{i\theta_o}; r \geq 0\}$. No entanto, se considerarmos a restrição do argumento ao intervalo aberto $(\theta_o, \theta_o + 2\pi)$ vemos que as partes real e imaginária do logaritmo são dadas na forma polar por $U(r, \theta) = \log r$ e $V(r, \theta) = \theta$, respectivamente. Como já vimos no exercício 12, estas funções são de classe C^1 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann na forma polar e, portanto, a função logaritmo quando restringirmos o argumento da variável a um intervalo do tipo $(\theta_o, \theta_o + 2\pi)$ é analítica em todo o plano menos o raio R_o . Cada uma destas restrições é chamada de um ramo da função multivalente logaritmo. No caso em que tomarmos $\theta_o = -\pi$, diremos que o ramo tomado é o ramo principal e o denotaremos por Log .

Funções multivalentes: logaritmo

Exemplo 42 *Seja $f(z) = \log z$ um ramo do logaritmo. Calcule $\log' z$.*

Se $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$ então, tomando $\log z = \log r + i\theta$ e usando 9.4, obtemos

$$\log' z = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \log r + i \frac{\partial}{\partial r} \theta \right) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

□

Exemplo 43 *Calcule $\text{Log}(1 + i)$.*

Escrevendo $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, obtemos de imediato que

$$\text{Log}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

□

Proposição 20 *Se z_1 e z_2 são não nulos então as seguintes igualdades de conjuntos são válidas:*

1. $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$;
2. $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$.

Funções multivalentes: Potência

Se $z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z).$$

Dependendo do expoente α a função $z \mapsto z^\alpha$ é multivalente. No entanto, quando $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ a definição acima coincide com aquela que já havíamos dado para z^n . De fato, se $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, temos

$$\begin{aligned}\exp(n \log z) &= \exp(n(\log r + i(\theta + 2k\pi))) = \exp(n \log r) \exp(in(\theta + 2k\pi)) \\ &= \exp(\log r^n) \exp(in\theta) \exp(2kn\pi i) = r^n e^{in\theta} = (re^{i\theta})^n = z^n,\end{aligned}$$

que é independente de $k \in \mathbb{Z}$.

Quando $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, a definição acima também coincide com a da função multivalente raiz n -ésima. De fato,

$$\begin{aligned}z^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) = \exp\left(\frac{1}{n} (\log r + i(\theta + 2k\pi))\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \log r\right) \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \exp\left(\log r^{\frac{1}{n}}\right) \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{z}.\end{aligned}$$

Note que em geral quando tomamos um ramo do logaritmo a função $f(z) = z^\alpha$ com esta restrição é chamada também de ramo. Note ainda que este ramo é uma função analítica pois é composição de duas funções analíticas. No caso de tomarmos o ramo principal do logaritmo, o ramo da função potência também será chamado de principal.

Funções multivalentes: Potência

Exemplo 44 *Seja $f(z) = z^\alpha$ um ramo da função potência. Calcule $f'(z)$.*

Fixe um ramo do logaritmo com $r > 0$ e $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$, dado por $\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$. Podemos usar a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp(\alpha \log(z)) \alpha \log' z = \exp(\alpha \log(z)) \alpha \frac{1}{z} = \alpha \frac{\exp(\alpha \log z)}{\exp(\log z)} \\ &= \alpha \exp(\alpha \log z - \log z) = \alpha \exp((\alpha - 1) \log z) = \alpha z^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

onde deve ser entendido que $z^{\alpha-1}$ é o ramo da função multivalente $z \mapsto z^{\alpha-1}$ com $r > 0$ e $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$.

Exemplo 45 *Encontre todos os valores de i^i .*

Temos

$$i^i = \exp(i \log i) = \exp\left(i \left(\log|i| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{4k+1}{2}\pi\right) = e^{-\frac{4k+1}{2}\pi}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Note que todos os valores de i^i são reais. □

Funções multivalentes: Potência

Observação 15 *Algumas propriedades algébricas que são válidas para potenciação real perdem a veracidade no caso complexo. Vejamos duas delas.*

1. *Não é verdade que sempre que $z \neq 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se $z^{\alpha+\beta} = z^{\alpha}z^{\beta}$, nem mesmo no sentido de igualdade de conjuntos. Basta tomar $z = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e os dois valores distintos para $z^{\frac{1}{2}}$ um igual a -1 e o outro igual a 1 . Daí $1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1^1 = 1$ mas $1^{\frac{1}{2}}1^{\frac{1}{2}} = (-1)1 = -1$.*
2. *Não é verdade que sempre que $z \neq 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se $(z^{\alpha})^{\beta} = z^{\alpha\beta}$, nem mesmo no sentido de igualdade de conjuntos. Basta tomar $\alpha = p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, e $\beta = \frac{1}{np}$, $n \in \mathbb{N}$ e daí vemos que $(z^p)^{\frac{1}{np}}$ representa np números distintos enquanto que $z^{p\frac{1}{np}} = z^{\frac{1}{n}}$ representa apenas n números distintos.*

No entanto vale a seguinte propriedade cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 21 *Se z_1 e z_2 são não nulos e $\alpha \in \mathbb{C}$ então vale a seguinte igualdade de conjuntos*

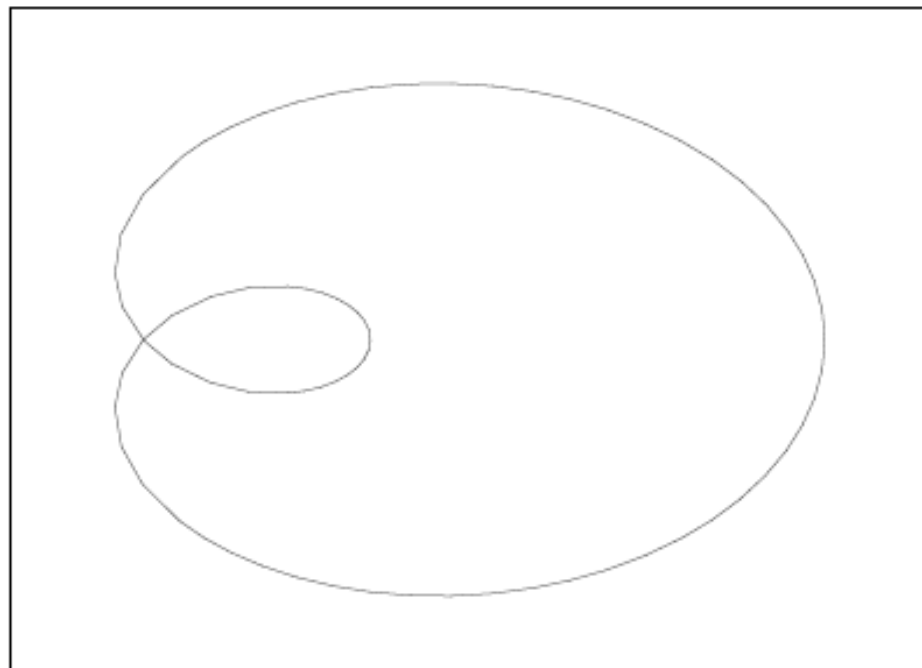
$$(z_1 z_2)^{\alpha} = z_1^{\alpha} z_2^{\alpha}.$$

Curvas no plano complexo

Definição 13 Uma curva no plano complexo é uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, isto é, as funções de uma variável real $\Re\gamma, \Im\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas. Dizemos que a curva é simples se $a \leq t < s \leq b$ implicar em $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, a menos que $t = a$ e $s = b$. Dizemos que a curva é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemplo 46 $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ representa o círculo unitário centrado na origem. Esta curva é simples e fechada.

Exemplo 47 A cardióide $\gamma(\theta) = (\frac{1}{2} + \cos \theta)e^{i\theta} = (\frac{1}{2} + \cos \theta) \cos \theta + i(\frac{1}{2} + \cos \theta) \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é exemplo de uma curva fechada que não é simples.



Curvas no plano complexo

Exemplo 48 $\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$, $0 \leq t \leq 1$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$, representa o segmento no plano complexo cujas extremidades são z_0 e z_1 . Note que esta curva é simples mas não é fechada.

Definição 14 Considere uma curva $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$, $a \leq t \leq b$. Dizemos que γ é suave se as funções de valores reais $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possuem derivada contínua. O vetor $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ é chamado de vetor velocidade ou tangente à curva γ em $\gamma(t)$. Se $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $a \leq t \leq b$, dizemos que γ é uma curva regular.

Exemplo 49 Todas as curvas dos exemplos anteriores são exemplos de curvas suaves e regulares. Vejamos mais especificamente o exemplo 47. Neste caso temos

$$\gamma'(\theta) = -\operatorname{sen} \theta e^{i\theta} + i \left(\frac{1}{2} + \cos \theta \right) e^{i\theta} = e^{i\theta} \left(-\operatorname{sen} \theta + i \left(\frac{1}{2} + \cos \theta \right) \right).$$

Como $e^{i\theta} \neq 0$, vemos que $\gamma'(\theta) = 0$ se e somente se $-\operatorname{sen} \theta + i(\frac{1}{2} + \cos \theta) = 0$, ou seja, $\operatorname{sen} \theta = 0$ e $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, o que é impossível. Logo, $\gamma'(\theta) \neq 0$ para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Curvas no plano complexo

Exemplo 50 Considere a curva $\gamma(t) = t^3 + it^2$, $-1 \leq t \leq 1$. Esta curva é suave mas como $\gamma'(0) = 0$, não é regular.

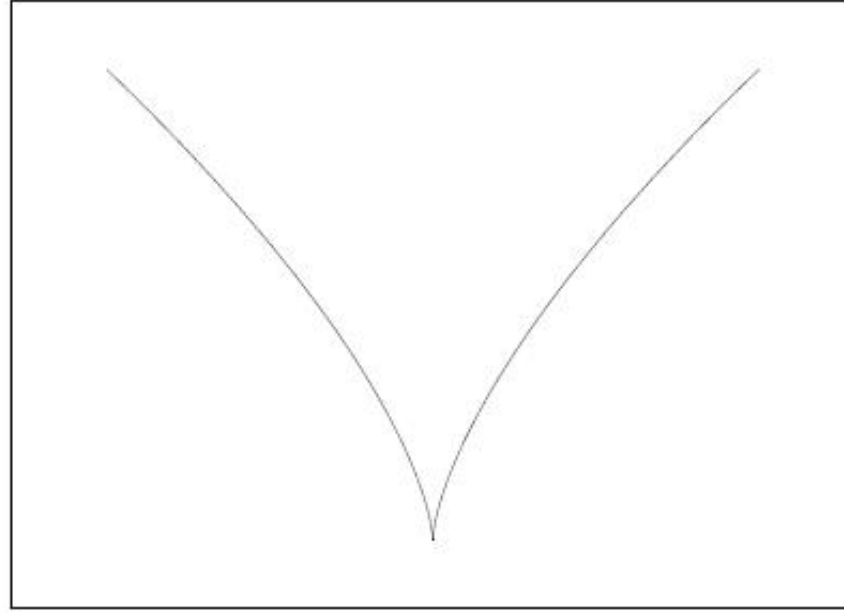


Figura 12.2: Curva não regular

Definição 15 O traço de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é a imagem desta curva.

Observação 16 Muitas vezes usaremos a palavra curva significando, na verdade, o seu traço.

Exemplo 51 As curvas $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\tilde{\gamma}(t) = e^{2it}$, $0 \leq t \leq \pi$ possuem o mesmo traço. Qual?

Curvas no plano complexo

O exemplo anterior serve para ilustrar que o mesmo traço pode ser percorrido de formas diferentes. No entanto, naquele exemplo, temos $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2t)$, $0 \leq t \leq \pi$ e percebemos que o que ocorreu foi uma mudança de parâmetro da curva γ . Isto sugere o seguinte:

Definição 16 *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva suave. Seja $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma função suave cuja inversa $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$ também é suave. Diremos que φ é uma mudança de parâmetro e $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$, $c \leq t \leq d$ é uma reparametrização da curva γ .*

Observação 17 *Se $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é uma mudança de parâmetro então temos $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in [c, d]$ ou $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$. No primeiro caso, $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$; já no segundo, $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$.*

Exemplo 52 *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva suave. Considere $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dada por $\varphi(t) = a + b - t$. Vê-se que φ é uma mudança de parâmetro e $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, $a \leq t \leq b$ é uma reparametrização de γ . Note que essa mudança de parâmetro inverte a ordem sobre a qual o traço de γ é percorrido.*

Exemplo 53 *Considere $\gamma(t) = \cos t + i2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. O traço desta curva é uma elipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ que é percorrido no sentido anti-horário. Fazendo-se a mudança do exemplo 52 obtemos $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(0 + 2\pi - t) = \gamma(2\pi - t) = \cos(2\pi - t) + i2 \sin(2\pi - t) = \cos t - i2 \sin t$ que representa a mesma elipse, porém percorrida no sentido horário.*

Curvas no plano complexo

Às vezes nos deparamos com traços de curvas que são mais facilmente parametrizáveis por partes, ou seja, sabemos parametrizar partes de um traço da curva e queremos, a partir daí, parametrizar todo o traço. Neste caso, precisamos saber como proceder para colar estes pedaços (arcos) da curva. Vejamos como fazer. Considere duas curvas $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.

Definimos $\gamma : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{se } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t + c - b), & \text{se } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases} \quad (12.1)$$

Note que a condição $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ assegura a continuidade de γ . No entanto, mesmo que γ_1 e γ_2 sejam suaves, podemos ter que não exista a derivada de γ em $t = b$. Observe que o traço de γ é a reunião dos traços de γ_1 e γ_2 .

Definição 17 A curva γ dada por 12.1 é chamada de justaposição das curvas γ_1 e γ_2 .

Definição 18 Sejam $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}, j = 1, \dots, n$, curvas suaves tais que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \dots, \gamma_{n-1}(b_{n-1}) = \gamma_n(a_n)$. A justaposição das curvas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ é chamada de caminho.

Observação 18 As definições de caminhos fechados e simples são análogas às definições usadas para curvas.

Definição 19 Um contorno é um caminho fechado e simples.

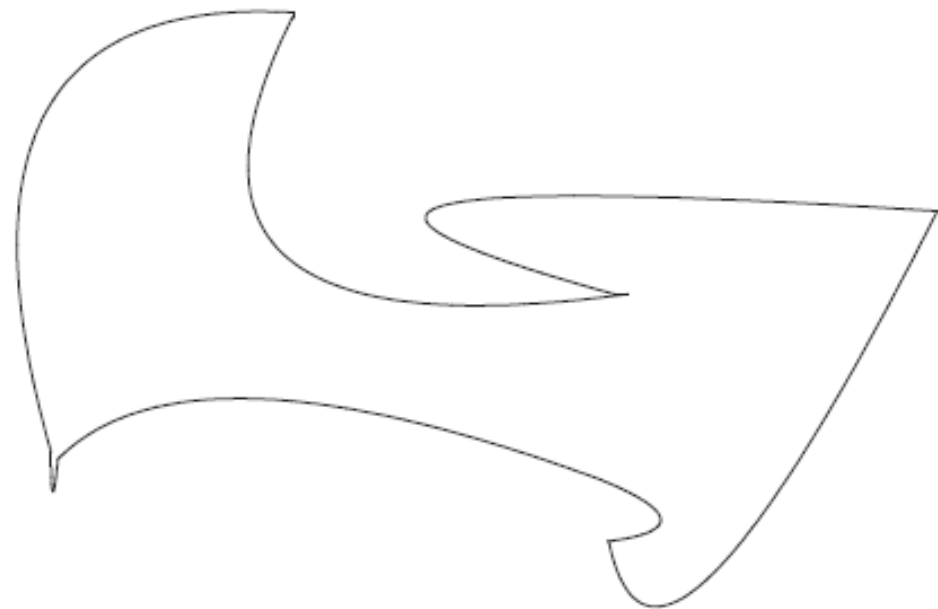
Curvas no plano complexo

Exemplo 54 A justaposição das curvas $\gamma_1(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma_2(t) = 1 + it$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma_3(t) = 1 - t + i(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$, é o caminho cujo traço representa o triângulo de vértices 0 , 1 e $1+i$. Este caminho é exemplo de um contorno.

Teorema 4 Todo contorno γ divide o plano em duas regiões conexas disjuntas X_1 e X_2 com as seguintes propriedades:

1. $\partial X_1 = \partial X_2 = \text{traço de } \gamma$;
2. X_1 é limitada;
3. X_2 é ilimitada;

A região X_1 é chamada de interior da curva γ .



Integração de funções complexas

Definição 20 *Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva (contínua) com $u(t) = \Re g(t)$ e $v(t) = \Im g(t)$. A integral de g sobre $[a, b]$ é definida por*

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Observação 19 $\Re \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \Re g(t) dt$ e $\Im \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \Im g(t) dt$.

Proposição 22 *Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ são contínuas e $\alpha \in \mathbb{C}$ então*

1. $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt;$

2. $\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt;$

3. $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$

Integração de funções complexas

Definição 21 *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de linha de f sobre a curva γ é definida por*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Note que $g(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ é uma curva contínua se f e γ são como na definição acima. Se colocarmos $u = \Re f$, $v = \Im f$, $x = \Re \gamma$ e $y = \Im \gamma$ então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)] dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + i \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt = \\ &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy, \end{aligned}$$

onde as últimas integrais são integrais de linha como visto em Cálculo III.

Integração de funções complexas

Proposição 23 Se $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são contínuas e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é suave então

$$\int_{\gamma} [\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)] dz = \alpha_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz, \quad \text{onde } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Prova: Colocando $u_j = \Re f_j$, $v_j = \Im f_j$, $\beta_j = \Re \alpha_j$ e $\delta_j = \Im \alpha_j$, $j = 1, 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 &= (\beta_1 + i\delta_1)(u_1 + iv_1) + (\beta_2 + i\delta_2)(u_2 + iv_2) = \\ &= \beta_1 u_1 - \delta_1 v_1 + \beta_2 u_2 - \delta_2 v_2 + i(\beta_1 v_1 + \delta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \delta_2 u_2). \end{aligned}$$

Assim, usando as propriedades de integral de linha como visto em Cálculo III,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)] dz &= \int_{\gamma} [\beta_1 u_1 - \delta_1 v_1 + \beta_2 u_2 - \delta_2 v_2] dx - [\beta_1 v_1 + \delta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \delta_2 u_2] dy + \\ &\quad + i \int_{\gamma} [\beta_1 v_1 + \delta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \delta_2 u_2] dx + [\beta_1 u_1 - \delta_1 v_1 + \beta_2 u_2 - \delta_2 v_2] dy = \\ &= (\beta_1 + i\delta_1) \int_{\gamma} u_1 dx - v_1 dy + i \int_{\gamma} v_1 dx + u_1 dy + (\beta_2 + i\delta_2) \int_{\gamma} u_2 dx - v_2 dy + i \int_{\gamma} v_2 dx + u_2 dy = \\ &= \alpha_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz. \end{aligned}$$

Integração de funções complexas

Proposição 24 *Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, e $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ curva suave. Se $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é uma mudança de parâmetro e γ_2 é a reparametrização de γ_1 obtida através de φ então*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma_2} f(z) dz, & \text{se } \varphi \text{ é crescente,} \\ -\int_{\gamma_2} f(z) dz, & \text{se } \varphi \text{ é decrescente.} \end{cases}$$

Prova: Provaremos apenas o caso em que φ é decrescente. O outro caso é deixado como exercício.

Como $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$, temos $\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Como φ é decrescente, $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$. Assim, fazendo a mudança $\tau = \varphi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) dt = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \\ &= \int_b^a f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau) d\tau = -\int_a^b f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau) d\tau = -\int_{\gamma_1} f(z) dz \end{aligned}$$

Prova:

Integração de funções complexas

Exemplo 55 Se $n \in \mathbb{Z}$, calcule

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz,$$

onde $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $R > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Observe que o traço de γ é o círculo centrado em z_0 de raio R . A função $f(z) = (z - z_0)^n$ é contínua (mesmo quando n é negativo) em $\Omega = \mathbb{C} \setminus 0$. Como $\gamma'(t) = Rie^{it}$ e $z - z_0 = Re^{it}$, temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} [Re^{it}]^n Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} R^{n+1} ie^{i(n+1)t} dt.$$

Se $n = -1$ então a integral acima se reduz a $\int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$.

Se $n \neq -1$ então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} R^{n+1} i [\cos((n+1)t) + i \operatorname{sen}((n+1)t)] dt = \\ &= R^{n+1} i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt - R^{n+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}((n+1)t) dt = \\ &= R^{n+1} i \left. \frac{\operatorname{sen}((n+1)t)}{n+1} \right|_0^{2\pi} + R^{n+1} \left. \frac{\cos((n+1)t)}{n+1} \right|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\gamma_1} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1, \\ 0 & \text{se } n \neq -1. \end{cases}$$

Integração de funções complexas

Exemplo 56 Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ onde $\gamma(t) = 2 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Veja que $\frac{1}{z} = (z - 0)^{-1}$ mas o centro de γ é o número 2 (o raio é 1), ou seja, este exemplo não é um caso particular do exemplo anterior.

Assim $\frac{1}{z}$ é contínua numa região contendo o traço de γ .

Sabemos que qualquer ramo do logaritmo satisfaz $(\log z)' = \frac{1}{z}$. Como a curva sobre a qual estamos integrando fica no semiplano $x > 0$, tomaremos um ramo do logaritmo denotado por $\log$, pela restrição $-\pi < \theta < \pi$. Desta forma, a função $\varphi(t) = \log(2 + e^{it}), 0 \leq t \leq 2\pi$ é bem definida e suave.

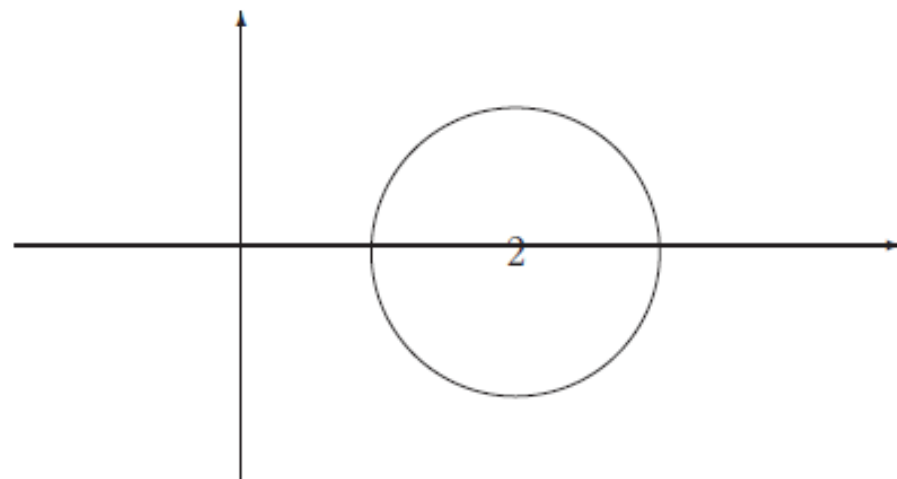
Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2 + e^{it}} i e^{it} = \frac{i e^{it}}{2 + e^{it}}.$$

Deste modo,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{2 + e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \varphi'(t) dt =$$

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = \log(2 + e^{2\pi i}) - \log(2 + e^{0i}) = \log 3 - \log 3 = 0.$$



Integração de funções complexas

Definição 22 Se $\gamma[a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ é um caminho formado pela justaposição das curvas suaves $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, definimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Observação 20 A propriedade enunciada na proposição 23 continua válida para caminhos.

Exemplo 57 Calcule $\int_{\gamma} z dz$ onde o traço de γ é o triângulo de vértices 0, 1 e i percorrido no sentido anti-horário.

Parametrizando cada um dos lados do triângulos por

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t, 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_2(t) &= 1 - t + it, 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_3(t) &= (1 - t)i, 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} z dz &= \int_0^1 (1 - t + it)(-1 + i) dt = \int_0^1 (t - 1 - t) dt + i \int_0^1 (1 - t - t) dt \\ &= - \int_0^1 dt + i \int_0^1 (1 - 2t) dt = -1 + i(t - t^2) \Big|_0^1 = -1 \end{aligned}$$

obtemos

$$\int_{\gamma_3} z dz = \int_0^1 (1 - t)i(-i) dt = \int_0^1 (1 - t) dt = t - \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Deste modo,

$$\int_{\gamma_1} z dz = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz + \int_{\gamma_3} z dz = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0.$$

Integração de funções complexas

Definição 23 Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma curva suave, definimos o comprimento de γ por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Se γ é um caminho obtido pela justaposição das curvas suaves $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, definimos o seu comprimento por

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^n \ell(\gamma_j).$$

Exemplo 58 Encontre o comprimento da cardióide $\gamma(t) = (1 + \cos t)e^{it}$.

Temos,

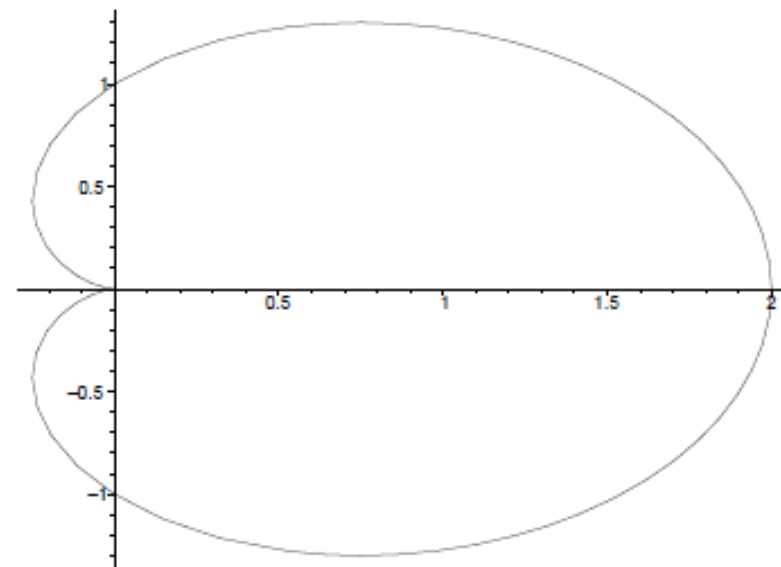
$$\gamma'(t) = -\operatorname{sen} t e^{it} + i(1 + \cos t)e^{it} = e^{it}(-\operatorname{sen} t + i(1 + \cos t))$$

e

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + (1 + \cos t)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos t}.$$

Assim, devido à simetria da cardióide,

$$\ell(\gamma) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt =$$



$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{(1 + \cos t)(1 - \cos t)}{1 - \cos t}} dt = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 t}}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \cos t} dt = 4\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} \Big|_0^{\pi} = \\ &= 4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 0) = 8. \end{aligned}$$

Integração de funções complexas

Proposição 25 Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ é um caminho e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \ell(\gamma),$$

onde γ^* é o traço de γ .

Em particular, se $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \Omega$ então,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma).$$

Exemplo 59 Utilize a proposição 25 para obter uma estimativa da integral $\int_{\gamma} z^n dz$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $\gamma(t) = Re^{it}$, $R > 0$, $0 \leq t \leq \pi$.

Precisamos saber o comprimento da curva e o máximo de $|z^n|$ sobre o seu traço. Ora, o comprimento é πR e para todo $0 \leq t \leq \pi$, temos $|(Re^{it})^n| = R^n |e^{int}| = R^n$. Assim,

$$\left| \int_{\gamma} z^n dz \right| \leq R^n \pi R = \pi R^{n+1}.$$

Exemplo 60 Idem para

Observe que se $n \leq -2$ então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} z^n dz = 0.$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz, \text{ onde } \gamma(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad R > 1.$$

Sobre o traço de γ , a função $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ pode ser majorada como segue:

$$|f(\gamma(t))| = |f(Re^{it})| = \frac{1}{|R^4 e^{4it} + 1|} \leq \frac{1}{||R^4 e^{4it}| - 1|} = \frac{1}{|R^4 - 1|} = \frac{1}{R^4 - 1}$$

Teorema de Cauchy-Goursat

Teorema 5 (Teorema de Green) *Sejam γ um contorno orientado no sentido anti-horário e R o seu interior. Se P e Q são funções de classe C^1 definidas em $\bar{R}$ então*

$$\int_{\gamma} Pdx + \int_{\gamma} Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Observação 21 $\bar{R} = R \cup \partial R$

Teorema 6 (Teorema de Cauchy-Goursat) *Sejam γ e R como no enunciado do Teorema de Green. Se f é uma função analítica definida em um aberto contendo $\bar{R}$ então*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Prova: A demonstração que faremos será somente no caso em que f é de classe C^1 . Esta parte é devida a Cauchy. A parte sem a hipótese de f ser de classe C^1 é bem mais elaborada e é creditada a Goursat.

Coloque $u = \Re f$ e $v = \Im f$. Aplicando o teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx - udy = \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= - \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0 \end{aligned}$$

pois, pelas equações de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Teorema de Cauchy-Goursat

Exemplo 61 Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz$ onde $\gamma = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como o contorno γ delimita a região $R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $f(z) = \frac{1}{z-2}$ é claramente analítica em $\bar{R} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = 0$$

Exemplo 62 Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz$ onde $\gamma = 2 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Note que, agora, a função f não está definida em toda a região delimitada por γ . Basta observar que $2 \in \{z \in \mathbb{C}; |z-2| \leq 1\}$.

Desta maneira, o teorema de Cauchy-Goursat não se aplica. Devemos, assim, calcular a integral usando apenas a definição. Temos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

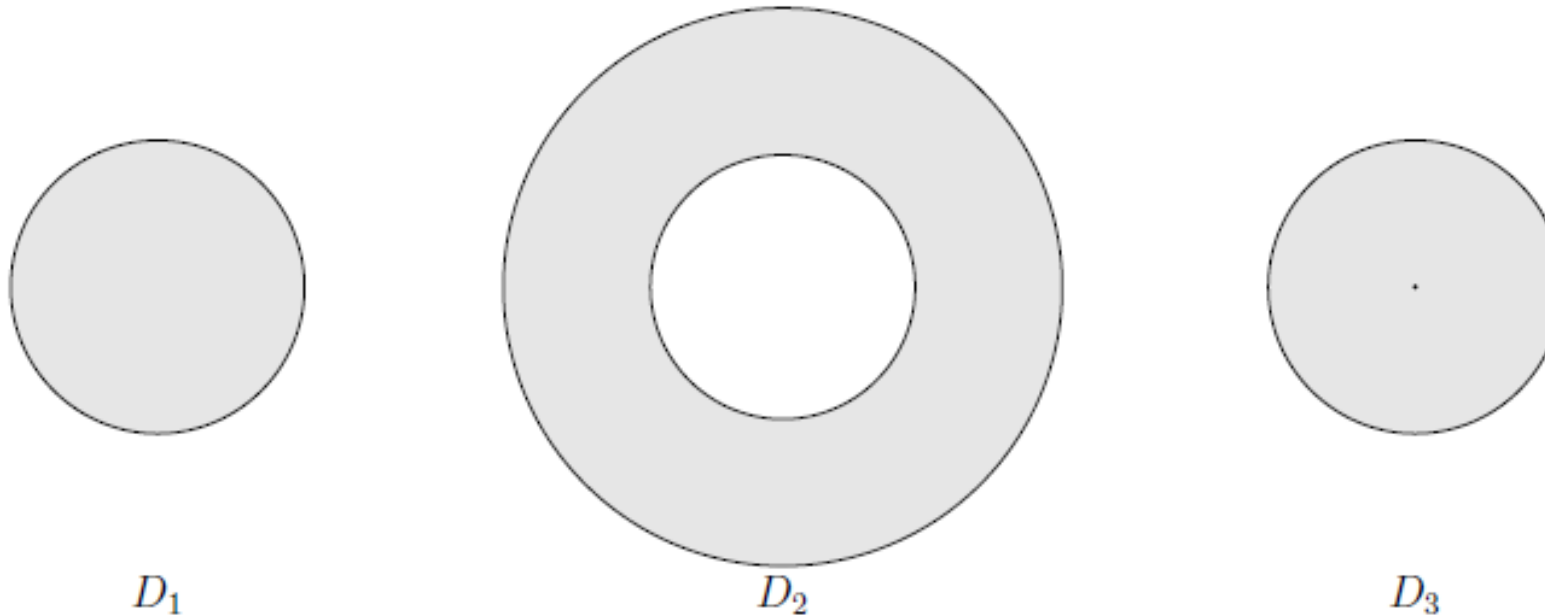
O teorema de Cauchy-Goursat se aplica a regiões mais gerais do que aquelas dadas por interior de contornos. Mais precisamente, ele continua válido para regiões simplesmente conexas, que passamos a definir.

Teorema de Cauchy-Goursat

Observação 22 Grosso modo, um conjunto simplesmente conexo não apresenta buracos.

Exemplo 63 Considere os conjuntos:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 3\} \quad e \quad D_3 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}.$$



Todos os três conjuntos são abertos e conexos. No entanto, somente D_1 é simplesmente conexo. Observe que embora o contorno $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ esteja contido em D_2 , os seu interior, $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\}$ não está. O mesmo acontece em D_3 com o contorno $\gamma_2(t) = \frac{1}{2}e^{it}$.

Teorema de Cauchy-Goursat

Exemplo 64 *O plano complexo é simplesmente conexo.*

Com esta nova linguagem, temos:

Teorema 7 *(Teorema de Cauchy-Goursat) Seja D um conjunto simplesmente conexo. Se f é analítica em D então para qualquer contorno γ contido em D temos*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Exemplo 65 *Se $n \in \mathbb{N}$ então $\int_{\gamma} z^n dz = 0$, para qualquer contorno γ . Em particular, tomando-se $n = 2$ vemos que*

$$\int_{\gamma} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int_{\gamma} 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

para qualquer contorno.

Independência de caminho

Definição 25 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que a integral de f independe do caminho se para quaisquer dois caminhos γ_1 e $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ tais que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ tem-se*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Observação 23 *Se a integral de f independe do caminho, usaremos a notação*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

para designar a integral de f ao longo de qualquer caminho contido em Ω que una os pontos z_0 a z_1 , nesta ordem.

Teorema 8 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. São equivalentes:*

- (i) $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para qualquer caminho fechado contido em Ω ;*
- (ii) A integral de f independe do caminho.*

Independência de caminho

Observação 24 *O teorema de Cauchy-Goursat (veja 7) continua válido se a integral for feita sobre caminhos fechados (lembre que um contorno é um caminho fechado simples).*

Juntando a observação acima e o teorema 8 obtemos:

Teorema 9 *Seja Ω um conjunto simplesmente conexo. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica então a integral de f independe do caminho.*

Exemplo 66 *Calcule $\int_{\gamma} e^z dz$ onde γ é uma poligonal que liga o ponto $z = 0$ a $z = i$.*

Como $f(z) = e^z$ é uma função inteira podemos substituir a poligonal por qualquer outro caminho que ligue $z = 0$ a $z = i$.

Por exemplo, $\gamma_1(t) = it$, $0 \leq t \leq 1$. Temos:

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_0^1 e^{it} i dt = e^{it} \Big|_0^1 = e^i - 1.$$

Primitiva

Definição 26 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma primitiva de f se $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Teorema 10 *Se Ω é um conjunto simplesmente conexo e f é uma função analítica em Ω então, fixado $z_0 \in \Omega$, a função*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega$$

é uma primitiva de f .

Corolário 5 *Sejam Ω um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então, fixado $z_0 \in \Omega$ a função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega$$

é analítica.

Prova: Pelo teorema anterior, a derivada de F existe em todo Ω (e é igual a f). Logo, F é analítica em Ω .

Primitiva

Proposição 26 *Sejam Ω um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se F e G são primitivas de f então a diferença entre F e G é constante. Em particular, dado $z_0 \in \Omega$ existe $C \in \mathbb{C}$ tal que*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C.$$

Prova: Seja $H : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $H(z) = F(z) - G(z)$.

Como $H'(z) = F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0$ e Ω é conexo, segue de 19 que $H(z)$ é constante.

Quanto à outra conclusão, basta lembrar que

$$z \mapsto \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

é primitiva de f . Portanto, $F(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = C$ para alguma constante C . Além do mais, tomando $z = z_0$, vemos que $C = F(z_0)$.

Observação 25 *Segue do Teorema 10 e da Proposição 26 que toda primitiva de uma função analítica definida em um conjunto simplesmente conexo é da forma $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C$, para algum $z_0 \in \Omega$ e algum $C \in \mathbb{C}$.*

Proposição 27 *Sejam Ω um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se F é uma primitiva de f e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é um caminho então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Primitiva

Exemplo 67 Calcule $\int_{\gamma} e^{z^2} z dz$ onde $\gamma(t) = (1 + \cos t)e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Como $\frac{d}{dz}(\frac{1}{2}e^{z^2}) = e^{z^2} z$, temos que $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$ é uma primitiva de $f(z) = e^{z^2} z$.

Assim,

$$\int_{\gamma} e^{z^2} z dz = \frac{1}{2}e^{z^2} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(\pi)} = \frac{1}{2}e^{z^2} \Big|_2^0 = \frac{1 - e^4}{2}.$$

Exemplo 68 Seja Ω um conjunto simplesmente conexo que não contém a origem. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho então

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a)). \quad (15.2)$$

Em particular se γ é fechada, $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$.

Isto segue do fato que a função $\log z$ é uma primitiva de $\frac{1}{z}$ definida no conjunto simplesmente conexo Ω . Porém, se Ω contiver a origem, a fórmula 15.2 deixa de ser válida. Basta lembrar que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Fórmula de Cauchy

Teorema 11 (Fórmula de Cauchy) *Sejam Ω um conjunto simplesmente conexo, γ um contorno contido em Ω orientado no sentido anti-horário. Se f é uma função analítica em Ω então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (16.1)$$

para todo z_0 contido no interior de γ .

Exemplo 71 *Se γ é um contorno que contém z_0 no seu interior e percorrido no sentido anti-horário então tomando $f(z) = 1$ na fórmula de Cauchy, obtemos um resultado que já nos é familiar:*

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz, \text{ isto é, } \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

Exemplo 72 *Seja γ é um contorno que contém z_0 no seu interior. Calcule $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz$, γ percorrido no sentido anti-horário. Basta tomar $f(z) = \cos z$ e $z_0 = 0$ na fórmula de Cauchy. Obtemos*

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$

Fórmula de Cauchy

Teorema 12 (Fórmula de Cauchy para derivadas) *Sejam Ω , γ , f e z_0 como no teorema 16.1. Então f possui todas as derivadas em z_0 e a n -ésima derivada é dada por*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (16.3)$$

onde γ é percorrido no sentido anti-horário.

Corolário 6 *Toda função analítica é de classe C^∞ .*

Prova: Dados $n \in \mathbb{N}$ e f analítica, segue do teorema anterior que $f^{(n+1)}$ existe em todo o domínio de f . Conseqüentemente, a função $f^{(n)}$ é contínua (por ser derivável). ■

Corolário 7 *A derivada de uma função analítica é também analítica.*

Exemplo 74 *Seja γ um contorno que envolve a origem. A integral $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ pode ser calculada usando-se a fórmula 16.3 com $f(z) = 1$ e $z_0 = 0$, obtendo*

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i 0 = 0.$$

Integração de funções complexas

Teorema 13 (Morera) *Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e Ω simplesmente conexo. Se a integral de f independe do caminho ou, equivalentemente, a integral de f se anula sobre qualquer caminho fechado contido em Ω , então f é analítica.*

Teorema 14 (Liouville) *Se f é uma função inteira e limitada então f é constante.*

Prova: Seja M tal que $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Tomando $\gamma(t) = z + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, temos

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma^*} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \ell(\gamma)$$

mas $\ell(\gamma) = 2\pi R$ e para $\zeta \in \gamma^*$, isto é, $|\zeta - z| = R$, temos

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} = \frac{|f(\zeta)|}{R^2} \leq \frac{M}{R^2}.$$

Logo,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R},$$

que tende a zero quando R tende a $+\infty$.

Desta forma, $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Segue daí que $f(z)$ é constante.

Teorema 15 (Teorema fundamental da álgebra) *Todo polinômio não constante possui uma raiz em $\mathbb{C}$.*

Funções complexas - exercícios

6.1.10 Usando as identidades

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

estabelecidas por comparação de séries de potências, mostre que

$$(a) \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y,$$

$$(b) |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \sinh^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

Isso demonstra que podemos ter $|\operatorname{sen} z|, |\cos z| > 1$ no plano complexo.

6.1.11 Pelas identidades nos Exercícios 6.1.9 e 6.1.10, mostre que

$$(a) \sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y,$$

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \operatorname{sen} y,$$

$$(b) |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \operatorname{sen}^2 y, \quad |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \operatorname{sen}^2 y.$$

6.1.12 Prove que

$$(a) |\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{sen} x| \quad (b) |\cos z| \geq |\cos x|.$$

Funções complexas - exercícios

6.1.13 Mostre que a função exponencial e^z é periódica com um período imaginário puro de $2\pi i$.

6.1.14 Mostre que

$$(a) \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\sinh x + i \operatorname{sen} y}{\cosh x + \cos y}, \quad (b) \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\sinh x - i \operatorname{sen} y}{\cosh x - \cos y}.$$

6.1.15 Ache todos os zeros de

$$(a) \operatorname{sen} z, \quad (b) \cos z, \quad (c) \sinh z, \quad (d) \cosh z.$$

6.1.16 Mostre que

$$\begin{aligned} (a) \operatorname{sen}^{-1} z &= -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}), & (d) \sinh^{-1} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ (b) \cos^{-1} z &= -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), & (e) \cosh^{-1} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ (c) \operatorname{tg}^{-1} z &= \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i + z}{i - z} \right), & (f) \operatorname{tg}^{-1} z &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right). \end{aligned}$$

Sugestão: 1. Expresse as funções trigonométrica e hiperbólica em termos de exponenciais.
2. Resolva para a exponencial e então para o expoente.

Funções complexas - exercícios

6.1.17 Na teoria quântica da fotoionização, encontramos a identidade

$$\left(\frac{ia - 1}{ia + 1}\right)^{ib} = \exp(-2b \cot^{-1} a),$$

na qual a e b são reais. Verifique essa identidade.

6.1.18 Uma onda de luz plana de frequência angular ω é representada por

$$e^{i\omega(t-nx/c)}.$$

Em uma certa substância, o índice real simples de refração n é substituído pela quantidade complexa $n - ik$. Qual é o efeito de k sobre a onda? A que k corresponde em termos físicos? A generalização de uma quantidade da forma real para a forma complexa ocorre com frequência na física. Exemplos abrangem desde o módulo complexo de Young de materiais viscoelásticos até o potencial (óptico) complexo da “bola de cristal nublada” do modelo do núcleo atômico.

Funções complexas - exercícios

6.2.1 As funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de uma função analítica $w(z)$.

(a) Admitindo que as derivadas requeridas existem, mostre que

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Soluções da equação de Laplace, tais como $u(x, y)$ e $v(x, y)$, são denominadas **funções harmônicas**.

(b) Mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

e dê uma interpretação geométrica.

Sugestão: A técnica da Seção 1.6 permite que você construa vetores normais às curvas $u(x, y) = c_i$ e $v(x, y) = c_j$.

6.2.2 Mostre se a função $f(z) = \Re(z) = x$ é analítica ou não.

Funções complexas - exercícios

6.2.5 Ache a função analítica

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

se (a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, (b) $v(x, y) = e^{-y} \sin x$.

6.2.6 Se há alguma região comum na qual $w_1 = u(x, y) + iv(x, y)$ e $w_2 = w_1^* = u(x, y) - iv(x, y)$ são ambas analíticas, prove que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são constantes.

6.2.7 A função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica. Mostre que $f^*(z^*)$ também é analítica.

6.2.8 Usando $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Phi(r, \theta)}$, na qual $R(r, \theta)$ e $\Phi(r, \theta)$ são funções reais diferenciáveis de r e θ , mostre que as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares se tornam

$$(a) \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (b) \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Sugestão: Estabeleça a derivada primeiro com δz e em seguida com δz tangencial.

6.2.9 Como uma extensão do Exercício 6.2.8, mostre que $\Phi(r, \theta)$ satisfaz a equação de Laplace em coordenadas polares. A Equação (2.35) (sem o termo final e igualada a zero) é o laplaciano em coordenadas polares.

Funções complexas - exercícios

6.2.10 O escoamento bidimensional de fluido irrotacional é convenientemente descrito por um potencial complexo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Denominamos a parte real, $u(x, y)$, velocidade potencial, e a parte imaginária, $v(x, y)$, função corrente. A velocidade do fluido $\mathbf{V}$ é dada por $\mathbf{V} = \nabla u$. Se $f(z)$ é analítica,

- (a) Mostre que $df/dz = V_x - iV_y$;
- (b) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (nenhuma fonte, nenhum mergulho);
- (c) Mostre que $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ (escoamento irrotacional, não-turbulento).

6.2.11 Uma prova da desigualdade de Schwarz (Seção 10.4) envolve minimizar uma expressão,

$$f = \psi_{aa} + \lambda\psi_{ab} + \lambda^*\psi_{ab}^* + \lambda\lambda^*\psi_{bb} \geq 0.$$

Os ψ são integrais de produtos de funções; ψ_{aa} e ψ_{bb} são reais, ψ_{ab} é complexa e λ é um parâmetro complexo.

6.4.1 Mostre que

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

em que o contorno C circunda o ponto $z = z_0$ em um sentido positivo (anti-horário). O expoente n é um inteiro. Veja também a Equação (6.27a). O cálculo de resíduos, Capítulo 7, é baseado nesse resultado.

Funções complexas - exercícios

6.4.2 Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1} dz, \quad m \text{ e } n \text{ inteiros}$$

(com o contorno circundando a origem uma vez, em sentido anti-horário) é uma representação do δ_{mn} .

6.4.3 Resolva o Exercício 6.3.4 separando o integrando em frações parciais e então aplicando o teorema integral de Cauchy para regiões multiplamente conectadas.

Nota: Frações parciais são explicadas na Seção 15.8 em conexão com as transformadas de Laplace.

6.4.4 Avalie

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1},$$

em que C é o círculo $|z| = 2$.

6.4.5 Admitindo que $f(z)$ é analítica sobre e dentro de um contorno fechado C e que o ponto z_0 está dentro de C , mostre que

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Funções harmônicas

Considere $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, uma função analítica. Sabemos que f é de classe C^∞ , isto é, possui derivadas de qualquer ordem em Ω . Segue daí que as funções $u = \Re f$ e $v = \Im f$ também são de classe C^∞ em Ω .

Como f é analítica, u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{em } \Omega.$$

Derivando a primeira das equações acima com relação a x e a segunda com relação a y , obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{em } \Omega.$$

Somando-se ambas as equações,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

pois v tem derivadas parciais de segunda ordem contínua.

Vemos, assim, que u satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

A equação acima é chamada de equação de Laplace e uma função de classe C^2 que a satisfaça é dita harmônica.

Funções harmônicas

Exercício 14 *Prove que $v = \Im f$, f analítica, é também uma função harmônica.*

Exemplo 76 *As funções*

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2 = \Re z^2, \quad u_2(x, y) = e^x \cos y = \Re e^z \quad e \quad u_3(x, y) = \cosh y \cos x = \Re \cos z$$

são exemplos de funções harmônicas em $\mathbb{C}$.

Exemplo 77 *Não existe função analítica cuja parte real seja $u(x, y) = x^2 + y^2$. Pois, se existisse, u deveria ser harmônico, porém,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 4 \neq 0$$

Como vimos, toda parte real de uma função analítica é harmônica.

O próximo teorema diz que se u for harmônica em uma região simplesmente conexa então u é a parte real de alguma função analítica.

Funções harmônicas

Teorema 16 *Sejam Ω um conjunto simplesmente conexo e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Então existe uma função analítica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $u = \Re f$.*

Observação 27 *A função f do teorema acima é dada por*

$$f(z) = \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz - C,$$

Exercício 15 *Verifique que se u e Ω são como no teorema acima e se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é tal que $\gamma(a) = (z_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x, y)$, então*

$$\int_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz = u(x, y) - u(x_0, y_0) + i \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Definição 27 *Seja Ω um aberto. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções harmônicas em Ω .*

Funções harmônicas

Exemplo 80 *Seja Ω um conjunto simplesmente conexo que contenha a origem. Se R é tal que $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ esteja contida em Ω então, para todo a tal que $|a| < R$ temos*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|z - a|^2} u(z) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} - a|^2} u(Re^{it}) dt \quad (17.1)$$

Exemplo 81 *Tomando $u = 1$, vemos que se $|a| < R$*

$$\int_0^{2\pi} \frac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} - a|^2} dt = 2\pi.$$

Ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|Re^{it} - a|^2} dt = \frac{2\pi}{R^2 - |a|^2}.$$

Observação 28 *Observe que pela fórmula 17.1, o valor de u no interior do disco $z; |z| \leq R$ só depende dos valores de u na fronteira deste mesmo disco.*

Sequências e séries

Definição 28 Considere uma sequência de números complexos (z_n) , isto é, uma aplicação que para cada $n \in \mathbb{N}$ associa um único número complexo z_n . Dizemos que z_n é convergente se existir $z \in \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{sempre que } n \geq n_o.$$

Proposição 28 Se z_n é convergente então existe um único número complexo z satisfazendo a definição acima.

Observação 29 Se z_n é convergente e se z é o único número complexo que satisfaz a definição 28, dizemos que z é o limite da sequência z_n e denotaremos por

$$z_n \rightarrow z \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Observação 30 Geometricamente, o fato de $z_n \rightarrow z$ significa que por menor que seja o disco centrado em z_o , sempre será possível encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ de modo que z_n pertença a este disco para todo $n \geq n_o$. Em geral, quanto menor o disco, maior será n_o .

Sequências e séries

Observação 31 *Se uma sequência não for convergente, diremos que ela é divergente.*

Deixamos como exercício as provas das seguintes proposições:

Proposição 29 *Se $z_n \rightarrow z$ e $w_n \rightarrow w$ então*

- i) $z_n + w_n \rightarrow z + w$;*
- ii) $\lambda z_n \rightarrow \lambda z$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;*
- iii) existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, a sequência z_n é limitada.*

Proposição 30 *Seja z_n uma sequência em $\mathbb{C}$. Sejam $x_n = \Re z_n$ e $y_n = \Im z_n$. Então z_n é convergente se e somente se as sequências de números reais x_n e y_n convergem. Em caso afirmativo, temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Sequências e séries

Exemplo 82 *Analise a convergência das seguintes seqüências:*

$$z_n = \frac{i}{n}, \quad w_n = i^n \quad e \quad \zeta_n = \frac{1}{n} + in.$$

Como $\Re z_n = 0 \rightarrow 0$ e $\Im z_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, a proposição 30 nos diz que z_n é convergente e seu limite é zero.

Note que $\Re w_{2k} = \Re i^{2k} = (-1)^k$ não é convergente. Logo, pela proposição 30, a seqüência w_n também não converge.

Quanto à última seqüência, vemos que ela não é limitada, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|\zeta_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + n^2} \geq \sqrt{n^2} = n.$$

Logo, pelo terceiro item da proposição 29, ζ_n não pode ser convergente. □

Sequências e séries

Definição 29 *Seja z_n uma sequência em $\mathbb{C}$. Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente se a sequência $s_n = z_0 + \cdots + z_n$ for convergente. Ou seja, se existir $S \in \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| S - \sum_{j=0}^n z_j \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

Neste caso, denotamos S por $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Observação 32 *A sequência z_n que dá origem à série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é chamada de termo geral desta série.*

Seguem das proposições 29 e 30 as seguintes proposições:

Proposição 31 *Se $S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $T = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ então*

$$i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T;$$

$$ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda z_n = \lambda S, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sequências e séries

Proposição 32 *Sejam $z_n = x_n + iy_n$, $x_n = \Re z_n$ e $y_n = \Im z_n$. Então a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge se e somente se as séries de números reais $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergem. Neste caso,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Também temos

Proposição 33 *Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente então $z_n \rightarrow 0$.*

Prova: Coloque $x_n = \Re z_n$ e $y_n = \Im z_n$. Pela proposição 32, as séries de números reais $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergem. Portanto, por um resultado de Cálculo II, temos $x_n, y_n \rightarrow 0$, isto é, $z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0$.

Sequências e séries

Exemplo 83 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}$ não é convergente pois $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \frac{i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmônica). No entanto, temos $\frac{i}{n} \rightarrow 0$.

Observação 33 O exemplo acima mostra que a condição $z_n \rightarrow 0$ não é suficiente para que a série formada por z_n seja convergente. No entanto, a proposição 33 nos diz que esta condição ($z_n \rightarrow 0$) é necessária para a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, isto é, se o limite de z_n não existir ou se convergir para um número diferente de zero então a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ será divergente.

Exemplo 84 Pela proposição 32, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3}$ é convergente, pois as séries de números reais $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \frac{n+i}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \frac{n+i}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ são ambas convergentes.

Definição 30 Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ for convergente.

Exemplo 85 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ é absolutamente convergente. Basta notar que a série de números reais $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Proposição 34 Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é absolutamente então ela também é convergente.

Séries de potências

Definição 31 *Sejam $z_o \in \mathbb{C}$ e a_n uma seqüência de números complexos. A cada $z \in \mathbb{C}$ coloque $z_n = a_n(z - z_o)^n$. A série dada por $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ é chamada de série de potências. O número complexo z_o é chamado de centro da série de potências.*

Definição 32 *Dizemos que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ converge uniformemente em um conjunto $D \subset \mathbb{C}$ se existir uma função S em D tal que dado $\varepsilon > 0$ existir $n_o \in \mathbb{N}$ satisfazendo*

$$\left| S(z) - \sum_{j=0}^n a_j(z - z_o)^j \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

Observação 34 *É claro que se a série converge uniformemente em D então, para $z \in D$ temos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ converge para $S(z)$.*

Observação 35 *Note que embora as definições de convergência e de convergência uniforme sejam bastante semelhantes, nesta última é possível escolher, para cada $\varepsilon > 0$, um mesmo n_o que sirva para todo $z \in D$. Na definição de convergência, o n_o pode variar de acordo com o ponto z .*

Séries de potências

Proposição 35 *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ um série de potências tal que para todo n tenhamos $|a_n(z - z_o)^n| \leq b_n$ para todo $z \in D$, onde $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente. Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ é uniformemente convergente em D .*

Teorema 17 *Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ então ocorre uma e somente uma das seguintes situações:*

- i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ só converge em $z = z_o$;*
- ii) existe $r > 0$ tal que se $|z - z_o| < r$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ converge absolutamente e se $0 \leq r' < r$, a convergência é uniforme no disco fechado $\overline{D_{r'}} = \{z; |z - z_o| \leq r'\}$.
Além do mais, se $|z - z_o| > r$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ diverge;*
- iii) a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ e uniformemente em todo disco fechado $\overline{D_{r'}} = \{z; |z - z_o| \leq r'\}$.*

Observação 36 *O número r que aparece em ii) da proposição acima é chamado de raio de convergência da série. Estendemos este conceito para dizer que em i) o raio de convergência é zero e em iii) é infinito.*

Observação 37 *O segundo item do teorema anterior nada afirma sobre a convergência da série sobre o círculo $|z - z_o| = r$.*

Séries de potências

Proposição 36 *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Se o limite da seqüência $\sqrt[n]{|a_n|}$ converge então o raio de convergência da série acima será dado por r onde

$$r = \begin{cases} 0, & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0; \\ \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{se } 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty. \end{cases}$$

Exemplo 88 *Encontre os raios de convergências das seguintes séries:*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n 2^n z^n;$

a) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 2$, vemos que o raio de convergência é $1/2$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n;$

b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, vemos que o raio de convergência é zero.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}.$

c) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, vemos que o raio de convergência é infinito.

Séries de potências

Teorema 18 *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

uma série de potências cujo raio de convergência r seja diferente de zero.

Então f é contínua no disco $D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$.

Teorema 19 (Integração termo a termo) *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

uma série de potências cujo raio de convergência r seja diferente de zero. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho cujo traço esteja contido em $D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$ então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} (z - z_o)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} [(\gamma(b) - z_o)^{n+1} - (\gamma(a) - z_o)^{n+1}].$$

Em particular, se γ é um caminho fechado, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Séries de potências

Corolário 8 *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

uma série de potências cujo raio de convergência r seja diferente de zero.

Então f é analítica no disco $D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$.

Teorema 20 (Derivação termo a termo) *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

uma série de potências cujo raio de convergência r seja diferente de zero.

Então a derivada k -ésima de f num ponto $z \in D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$ é dada por

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1) \cdots (j-k+1) a_j (z - z_o)^{j-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} (z - z_o)^n$$

e o raio de convergência da série acima também é r .

Exemplo 91 *Podemos aplicar a série da derivada de*

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

para obter várias outras representações de funções em série de potências.

De fato, derivando a expressão acima obtemos

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Derivando mais uma vez,

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n, \quad |z| < 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Prosseguindo o processo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^k} &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1) \cdots (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n, \quad |z| < 1, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Séries de Taylor

Teorema 21 (Série de Taylor) *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida em um aberto Ω . Se $z_o \in \Omega$ e $r > 0$ é tal que $D_r = \{z; |z - z_o| < r\} \subset \Omega$ então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n, \quad \text{para todo } z \in D_r.$$

Observação 38 *Note que se f é inteira, isto é, $\Omega = \mathbb{C}$, então o raio de convergência da série de Taylor de f é infinito pois $D_r \subset \mathbb{C}$ para todo $r > 0$.*

Observação 39 *Nos referiremos à série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n$ como a série de Taylor de f centrada em z_o .*

Exercício 16 *Prove o seguinte:*

Se uma função analítica definida em um disco centrado em z_o é representada por uma série de potências centrada em z_o , então esta série é a série de Taylor de f centrada em z_o .

Observação 40 *Quando $z_o = 0$ a série de Taylor também é conhecida como série de MacLaurin.*

Séries de Taylor

Exemplo 93 Encontre a expansão em série de MacLaurin da função $f(z) = e^z$.

Como para todo $n = 0, 1, \dots$, temos $f^{(n)}(z) = e^z$, vemos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

que é válida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 95 Encontre a expansão em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$ do ramo da função $f(z) = \sqrt{z}$ com $\sqrt{1} = 1$ e $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$.

$$\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2(n-1))!}{4^n n! (n-1)!} (z-1)^n, \quad z \in D_1 = \{z; |z-1| < 1\}.$$

Zeros de função analítica

Teorema 22 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida em um aberto Ω . Se $z_o \in \Omega$ é tal que todas as derivadas de f se anulam em z_o então f se anula identicamente em todo um disco aberto centrado em z_o .*

Prova: Seja D_r um disco centrado em z_o contido em Ω . Pela série de Taylor, para todo $z \in D_r$ temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n.$$

Mas como $f^{(n)}(z_o) = 0$ para todo n , segue da fórmula acima que $f(z) = 0$ para todo $z \in D_r$. ■

Observação 41 *Se Ω é conexo e f satisfaz as hipóteses do teorema acima, pode-se mostrar que f é identicamente nula.*

Zeros de função analítica

Corolário 9 *Se z_0 é um zero isolado de uma função analítica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ então pelo menos uma das derivadas de f se anula em z_0 .*

Observação 42 *Considere a função de uma variável real a valores reais dada por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Pode-se verificar que todas as derivadas de f existem e em $x = 0$ elas se anulam. No entanto, f não é identicamente nula.*

Teorema 23 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida em um aberto Ω . Se $z_0 \in \Omega$ é tal $f(z_0) = 0$ e nem todas as derivadas de f se anulam em z_0 então z_0 é um zero isolado de f , isto é, em algum disco centrado em z_0 não existe nenhum outro zero de f .*

Corolário 10 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida em um aberto Ω . Se $z_0 \in \Omega$ é um zero isolado de f então existe um inteiro positivo n e uma função analítica g definida em um disco aberto D centrado em z_0 satisfazendo*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \text{ para todo } z \in D.$$

Zeros de função analítica

Definição 33 *Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida em um aberto e $z_o \in \Omega$ um zero isolado de f . O número n do corolário acima é chamado de ordem do zero z_o .*

Exemplo 96 *A função $f(z) = 1 - |z|^2 = 1 - x^2 - y^2$ não é analítica pois os seus zeros não são isolados. Note que os zeros de f representam o círculo centrado na origem de raio 1.*

Exemplo 97 *$z_o = 0$ é um zero de ordem dois da função $f(z) = 1 - \cos z$. Basta ver que $f(0) = 1 - \cos 0 = 0$, $f'(0) = \sin 0 = 0$, $f''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$.*

Note também que

$$\begin{aligned} 1 - \cos z &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2(k-1)} \\ &= z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} z^{2k} = z^2 g(z), \end{aligned}$$

onde $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} z^{2k}$ é analítica e $g(0) = -\frac{1}{2}$.

Série de Laurent

Teorema 24 (Série de Laurent) *Seja f analítica em $A_{r,R} = \{z, r < |z - z_o| < R\}$. Então, para todo $z \in A_{r,R}$*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e

$$\gamma(t) = z_o + s_o e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad r < s_o < R.$$

Observação 43 *O círculo centrado em z_o e de raio s_o que aparece no enunciado do teorema anterior pode ser substituído por qualquer outro contorno contido em $A_{r,R}$ que contenha z_o no seu interior.*

Série de Laurent

Corolário 11 *Se f é como no teorema anterior (veja 24) e γ é um contorno em $A_{r,R}$ contendo z_o no seu interior, então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1},$$

onde a_{-1} é o coeficiente do termo $(z - z_o)^{-1}$ da série de Laurent de f centrada em z_o .

Observação 44 *Mais adiante veremos um resultado mais geral do corolário acima.*

Observação 45 *A série de Laurent de uma função f definida em $A_{r,R}$ é única, isto é, se*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_o)^n, \quad z \in A_{r,R}$$

então $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Série de Laurent

Exemplo 100 *Encontre a série de Laurent de*

$$f(z) = z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

em torno da origem.

Como

$$\operatorname{sen} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}, \quad w \in \mathbb{C},$$

temos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n-1}, \quad z \neq 0$$

e daí,

$$z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n+2} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} z^{-2k} = z^2 - \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} z^{-2k}. \quad (20.5)$$

Exemplo 101 Calcule

$$\int_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Segue do corolário 11 que

$$\int_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i a_{-1}$$

onde a_{-1} é o resíduo de f em $z_0 = 0$.

Mas, de 20.5 temos $a_{-1} = 0$. Assim,

$$\int_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Exemplo 102 Calcule

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usando o teorema 24, temos

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}}{z^3} dz = \int_{\gamma} \frac{z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}}{z^{2+1}} dz = a_2 2\pi i,$$

mas por 20.5, $a_2 = 1$. Logo,

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Singularidades

Definição 35 Um ponto $z_o \in \mathbb{C}$ é um ponto singular isolado (ou uma singularidade isolada) de uma função f se f não for analítica em z_o e existir $r > 0$ tal que f é analítica em $A_{0,r} = \{z; 0 < |z - z_o| < r\}$.

Exemplo 103 A origem é ponto singular isolado das seguintes funções:

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^n}, n \in \mathbb{N} \quad \text{e de} \quad f_3(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Definição 36 Se uma função não for analítica em z_o e, além disso, para todo $r > 0$ existir um ponto em $A_{0,r}$ onde f também não é analítica, diremos que z_o é uma singularidade não isolada (ou ponto singular não isolado) de f .

Exemplo 104 A origem é uma singularidade não isolada da função $f(z) = 1/\operatorname{sen}(1/z)$. Basta ver que para cada $r > 0$, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n\pi < r$, f não é analítica em $z = 1/n\pi$.

Singularidades

Definição 37 Um ponto singular isolado z_o de uma função f é classificado como

1. Removível quando existe um número complexo c tal que a função

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c & \text{se } z = z_o \end{cases}$$

é analítica em um disco centrado em z_o . Em outras palavras, existe uma função analítica numa vizinhança de z_o que coincide com f nesta vizinhança a menos do ponto z_o .

2. Pólo quando existirem um inteiro positivo m e um número complexo $c \neq 0$ tal que a função

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_o)^m f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c & \text{se } z = z_o \end{cases}$$

é analítica em um disco centrado em z_o . Em outras palavras, existe uma função analítica numa vizinhança de z_o que coincide com a função $z \mapsto (z - z_o)^m f(z)$ nesta vizinhança a menos do ponto z_o e esta função é diferente de zero em z_o .

3. Essencial quando não for removível nem pólo.

Singularidades

Observação 46 *Seja z_o um pólo de f . Suponha que $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$ sejam tais que*

$$g_1(z) = \begin{cases} (z - z_o)^{m_1} f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c_1 & \text{se } z = z_o \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(z) = \begin{cases} (z - z_o)^{m_2} f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c_2 & \text{se } z = z_o \end{cases}$$

sejam analíticas em um disco centrado em z_o .

Então, como c_1 e c_2 são diferentes de zero, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^{m_1 - m_2} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{(z - z_o)^{m_1}}{(z - z_o)^{m_2}} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{(z - z_o)^{m_1} f(z)}{(z - z_o)^{m_2} f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{g_1(z)}{g_2(z)} = \frac{c_1}{c_2} \neq 0.$$

Mas isto só é possível quando $m_1 = m_2$ e, conseqüentemente, $c_1 = c_2$.

Definição 38 *Diremos que a ordem de um pólo de uma função f é o (único) inteiro que aparece na definição 2.*

Singularidades

Observação 47 Se z_o é uma singularidade removível de f então existe o limite $\lim_{z \rightarrow z_o} f(z)$.

Observação 48 Se z_o é um pólo de ordem m de f então o limite $\lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^m f(z)$ existe e é diferente de zero.

Exemplo 105 A origem é uma singularidade removível de $f_1(z) = \sin z/z$ pois a função $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ é inteira (para verificar isto, use a proposição 37) e satisfaz

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{\sin z}{z}, \quad z \neq 0.$$

Exemplo 106 A origem é um pólo de ordem m da função $f(z) = 1/z^m$. Basta tomarmos $g(z) = 1$ na definição de pólo.

Exemplo 107 A origem é uma singularidade essencial de $f(z) = e^{1/z}$. Basta notar que para todo inteiro $m \geq 0$, o limite de f quando z tende a zero não existe. Basta ver que sobre o eixo real temos

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^m e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Singularidades

Um modo simples de classificar uma singularidade isolada de uma função é através de sua série de Laurent. De fato, se z_o é uma singularidade isolada de uma função f , então, para algum $r > 0$, podemos escrever

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n, \quad z \in A_{0,r}.$$

Vejamos como identificar uma singularidade removível. Sabemos que z_o é uma tal singularidade de f se existir uma função analítica definida em um disco centrado em z_o e que coincida com f a menos do ponto z_o . Esta função g por ser analítica coincide com sua série de Taylor centrada em z_o ,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_o)^n = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n.$$

Agora, sabemos que a série de Taylor é a série de Laurent onde os coeficientes das potências negativas são todos nulos. Desta forma, pela unicidade da série de Laurent, temos $a_{-n} = 0$, $n \geq 1$.

Resumindo, z_o é uma singularidade removível de f se e somente se todos os coeficientes das potências negativas da sua série de Laurent se anulam, ou seja, a série de Laurent de f é uma série de Taylor.

Singularidades

Passemos agora aos pólos. Note que z_o é um pólo de ordem m de f se e somente se o mesmo z_o for uma singularidade removível de $h(z) = (z - z_o)^m f(z)$ e $\lim_{z \rightarrow z_o} h(z) = c \neq 0$. Pelo que acabamos de aprender sobre singularidades removíveis, isto equivale à série de Laurent de h centrada em z_o ser uma série de Taylor, isto é,

$$h(z) = (z - z_o)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_o)^n, \quad \text{e } b_0 = \lim_{z \rightarrow z_o} h(z) \neq 0$$

em algum $A_{0,r}$.

Dividindo por $(z - z_o)^m$, obtemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_o)^{n-m} = \frac{b_0}{(z - z_o)^m} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{z - z_o} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{m+j} (z - z_o)^j$$

com $b_0 \neq 0$.

Assim, para que z_o seja um pólo de ordem m de f é necessário e suficiente que os coeficientes a_{-n} das potências negativas $(z - z_o)^{-n}$ da série de Laurent de f em torno de z_o se anulem para $n \geq m + 1$ e $a_{-m} \neq 0$.

Finalmente, para que z_o seja uma singularidade essencial de f é necessário e suficiente que na série de Laurent de f em torno de z_o haja uma infinidade de coeficientes a_{-n} não nulos das potências negativas $(z - z_o)^{-n}$.

Singularidades

Exemplo 108 *A função*

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad 0 < |z| < 1$$

apresenta na origem um pólo de ordem três.

Exemplo 109 *A função*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n = \cdots + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{2^2} z^2 + \cdots$$

apresenta uma singularidade essencial na origem.

Exercício 17 *Uma singularidade isolada z_o de f é removível se e somente se existe o limite de $f(z)$ quando z tende a z_o .*

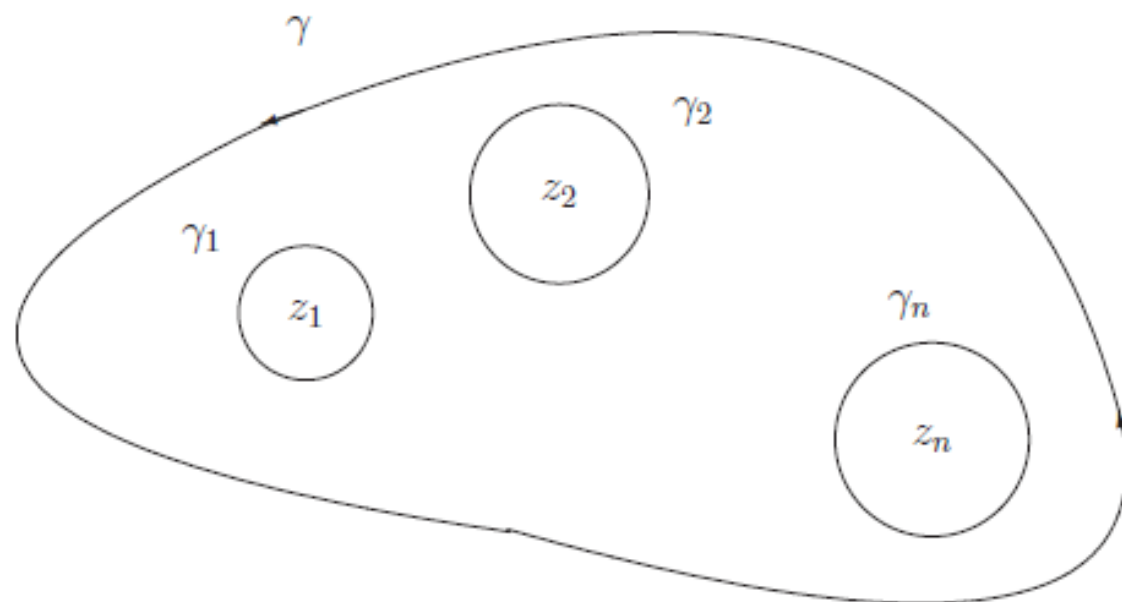
Teorema 25 (Teorema do Resíduo) *Seja f uma função analítica definida em um aberto Ω . Se γ é um contorno contido em Ω tal que no seu interior a função f tenha somente singularidades isoladas e apenas um número finito delas, denotadas por $z_1, \dots, z_n$, então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res} f|_{z=z_1} + \dots + \operatorname{Res} f|_{z=z_n}] \quad (22.1)$$

com o contorno sendo percorrido no sentido anti-horário.

Prova: Tome círculos $\gamma_j(t) = z_j + r_j e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, satisfazendo

- i) cada γ_j está contido no interior de γ ;
- ii) se $j_1 \neq j_2$ então γ_{j_1} está contido no exterior de γ_{j_2} .



Teorema do resíduo e aplicações

Exemplo 110 *Encontre o resíduo de $f(z) = \cos z/z$ na origem. Como $\cos z = zf(z)$, é analítica e $\cos 0 = 1 \neq 0$, vemos que 0 é um pólo simples de f . Assim,*

$$\operatorname{Res} f|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1.$$

Se z_o é um pólo de ordem m então

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_o)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_o} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j, \quad \text{em } A_{0,r},$$

com $a_{-m} \neq 0$. Desta maneira, existe uma função analítica g definida em um disco centrado em z_o satisfazendo $g(z_o) \neq 0$ e e

$$g(z) = (z - z_o)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-m+n} (z - z_o)^n$$

$$= a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_o) + \cdots + a_{-1}(z - z_o)^{m-1} + \cdots. \quad (22.3)$$

Note que $g(z_o) = a_{-m}$.

Teorema do resíduo e aplicações

Derivando 22.3,

$$g'(z) = a_{-m+1} + 2a_{-m+2}(z - z_o) + \cdots + (m-1)a_{-1}(z - z_o)^{m-2} + \cdots$$

e calculando em $z = z_o$, obtemos $g'(z_o) = a_{-m+1}$.

Derivando mais uma vez,

$$g''(z) = 2a_{-m+2} + \cdots + (m-1)(m-2)a_{-1}(z - z_o)^{m-3} + \cdots$$

e calculando em $z = z_o$, obtemos $g''(z_o) = 2a_{-m+2}$.

Prosseguindo, obteremos

$$g^{m-1}(z_o) = (m-1)!a_{-1},$$

isto é, o resíduo de f em z_o , um pólo de ordem m , é dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{m-1}(z_o) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_o)^m f(z)] \Big|_{z=z_o}.$$

Teorema do resíduo e aplicações

Exemplo 111 A função $f(z) = \cos z/z^2$ tem um pólo de ordem dois na origem, pois $z^2 f(z) = \cos z$, que é inteira e $\cos 0 = 1 \neq 0$.

O resíduo de f na origem é dado por

$$\left. \frac{d}{dz} [z^2 f(z)] \right|_{z=0} = \left. \frac{d}{dz} [\cos z] \right|_{z=0} = -\sin 0 = 0.$$

A próxima proposição apresenta um modo de reconhecermos a ordem de um pólo.

Proposição 38 Sejam f e g analíticas em um disco centrado em z_o . Se $f(z_o) \neq 0$ e g tem um zero de ordem m em z_o então $h = f/g$ tem um pólo de ordem m em z_o .

Prova: Como z_o é um zero isolado de g , temos que z_o é uma singularidade isolada de h .

Também podemos escrever

$$g(z) = (z - z_o)^m \varphi(z),$$

com φ analítica em um disco centrado em z_o e satisfazendo $\varphi(z_o) \neq 0$. Desta forma,

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z - z_o)^m \varphi(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^m} \frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

E, assim, $(z - z_o)^m h(z)$ que é igual a $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$, coincide com uma função analítica num disco centrado em z_o e $\frac{f(z_o)}{\varphi(z_o)} \neq 0$. Ou seja, z_o é um pólo de ordem m de h .



Teorema do resíduo e aplicações

Proposição 39 *Sejam f e g analíticas em um disco centrado em z_0 . Se z_0 é um zero de ordem n de f e um zero de ordem m de g então a função $h = f/g$*

- 1. tem um zero de ordem $n - m$ em z_0 se $n > m$;*
- 2. tem uma singularidade removível em z_0 se $n = m$;*
- 3. tem um pólo de ordem $m - n$ em z_0 se $m > n$.*

Prova: Por hipótese, podemos escrever $f(z) = (z - z_0)^n \psi(z)$ $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ com ψ e φ analíticas num disco centrado em z_0 e tais que $\psi(z_0) \neq 0$ e $\varphi(z_0) \neq 0$.

Segue daí que, colocando $\vartheta = \psi/\varphi$,

$$h(z) = \frac{(z - z_0)^n \psi(z)}{(z - z_0)^m \varphi(z)} = (z - z_0)^{n-m} \vartheta(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{m-n}} \vartheta(z)$$

e os resultados seguem, analisando-se o sinal de $n - m$, pois ϑ é analítica em um disco centrado em z_0 e $\vartheta(z_0) \neq 0$.

Teorema do resíduo e aplicações

Observação 49 Temos um outro modo de calcularmos o resíduo no caso de um pólo simples. Poderíamos também ter utilizado a definição de pólo de ordem um, ou mesmo a expressão 22.2, para obter uma função analítica g tal que $g(z_0) \neq 0$ com $g(z) = (z - z_0)f(z)$. Como $g(z_0) = a_{-1} \neq 0$ podemos escrever

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z - z_0}{g(z)}.$$

Derivando esta expressão, obtemos

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{g(z) - (z - z_0)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

que calculada em z_0 fornece

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{a_{-1}},$$

ou seja,

$$\text{Res } f|_{z=z_0} = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\left(\frac{1}{f(z)}\right)' \right]^{-1}.$$

Teorema do resíduo e aplicações

Exemplo 112 Calcule o resíduo de $f(z) = \cot z$ na origem.

Como $\cot z = \cos z / \sin z$, $\cos 0 = 1$ e 0 é um zero simples da função seno, vemos que 0 é um pólo simples de f .

Temos

$$\left[\left(\frac{1}{f(z)} \right)' \right]^{-1} = [(\operatorname{tg} z)']^{-1} = [\sec^2 z]^{-1}.$$

Logo, $\operatorname{Res} f|_{z=0} = 1$.

Exemplo 113 Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} dz$$

onde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Teorema do resíduo e aplicações

O teorema do resíduo é útil no cálculo de integrais impróprias reais da forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Vamos considerar o caso em que f é uma função racional do tipo $f = p/q$, onde p e q são polinômios com coeficientes reais satisfazendo

- i) $q(x) \neq 0$ para todo x real;
- ii) se n é o grau de p e m é o grau de q então $n \leq m - 2$.

Sabemos de Cálculo II que as condições acima garantem a existência da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

Proposição 40 *Sejam p e q polinômios com coeficientes reais satisfazendo i) e ii) acima. Então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i [\text{soma dos resíduos de } p(z)/q(z) \text{ nos pólos contidos no semiplano } \Im z > 0.]$$

Exemplo 114 Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Tomando $p(z) = 1$ e $q(z) = z^4 + 1$, vemos que as hipóteses da proposição 40 estão satisfeitas. Desta maneira, tudo o que precisamos saber é onde estão os pólos de p/q no semiplano $\Im z > 0$, e o resíduo desta função nestes pontos.

Os pólos de p/q são os pontos onde $z^4 + 1 = 0$. Das quatro raízes de $z^4 = -1$, isto é,

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad z_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i} \quad \text{e} \quad z_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

as únicas que estão no semiplano $\Im z > 0$ são z_1 e z_2 .

Como $z^4 + 1$ se fatora em termos lineares como $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, vemos que os pólos de $1/(z^4 + 1)$ são simples.

Para calcularmos o resíduo, usaremos o método da observação 49, isto é,

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_o} = [(z^4 + 1)']^{-1} \Big|_{z=z_o}.$$

Em z_1 ,

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_1} = [4z^3]^{-1} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1 + i).$$

Em z_2 ,

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_2} = [4z^3]^{-1} \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i).$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}i \right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Teorema do resíduo e aplicações

Proposição 41 *Se f é uma função analítica tendo somente singularidades isoladas, mas nenhuma delas sobre o eixo real e que satisfaz $|f(z)| \leq M|z|^{-k}$, onde $k > 1$, para todo z com módulo suficientemente grande e $\Im z > 0$, então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$$

$$= 2\pi i [\text{soma dos resíduos de } f(z) \text{ nas singularidades contidas no semiplano } \Im z > 0].$$

Prova: A prova da proposição 22.4 pode ser usada com pequenas modificações para mostrar o que se pede. A verificação deste fato é deixada como exercício. ■

Exemplo 115 *Calcule*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx. \quad (22.5)$$

Teorema do resíduo e aplicações

Suponha que $f(\theta) = R(\cos \theta, \sin \theta)$ seja uma função contínua em $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

pode ser calculada com o auxílio do teorema dos resíduos se fizermos a mudança $z = e^{i\theta}$. De fato, como $z^{-1} = e^{-i\theta}$, vemos que

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2zi}.$$

Além do mais, $ie^{i\theta}d\theta = dz$, ou seja, $d\theta = \frac{1}{iz}dz$. Assim, colocando $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e assumindo que a função

$$f(z) = \frac{1}{zi} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2zi}\right)$$

esteja definida em $|z| \leq 1$, seja analítica sobre $\gamma^* = \{z; |z| = 1\}$ e tenha apenas um número finito de singularidades no interior de γ e que estas singularidades sejam todas isoladas, então

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta &= \int_{\gamma} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2zi}\right) \frac{1}{iz} dz \\ &= 2\pi \left[\text{soma dos resíduos de } \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2zi}\right) \text{ em } |z| < 1 \right]. \end{aligned}$$

Teorema do resíduo e aplicações

Exemplo 116 *Calcule*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \operatorname{sen} \theta} d\theta.$$

A função

$$f(\theta) = \frac{1}{4 - \operatorname{sen} \theta}$$

é uma função nos moldes acima. Note que $\operatorname{sen} \theta \neq 4$.

Fazendo $z = e^{i\theta}$, obtemos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{z^2 - 1}{2zi} \quad \text{e} \quad d\theta = \frac{1}{iz} dz.$$

Exemplo 117 *Calcule*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx.$$

Considere a função

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}.$$

Exercícios

6.5.1 Desenvolva a expansão de Taylor de $\ln(1 + z)$.

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$

6.5.2 Derive a expansão binomial

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$$

para m qualquer número real. A expansão é convergente para $|z| < 1$. Por quê?

6.5.3 Uma função $f(z)$ é analítica sobre e dentro do círculo unitário. Além disso, $|f(z)| < 1$ para $|z| \leq 1$ e $f(0) = 0$. Mostre que $|f(z)| < |z|$ for $|z| \leq 1$.

Sugestão: Uma abordagem é mostrar que $f(z)/z$ é analítica e então expressar $[f(z_0)/z_0]^n$ pela fórmula integral de Cauchy. Finalmente, considere grandezas absolutas e tome a enésima raiz. Esse exercício costuma ser chamado de teorema de Schwarz.

Exercícios (Obs.: * significa complexo conjugado)

- 6.5.6** Uma função $f(z)$ pode ser expandida em uma série de Laurent em torno da origem com os coeficientes a_n reais. Mostre que o conjugado complexo dessa função de z é a mesma função do conjugado complexo de z ; isto é,

$$f^*(z) = f(z^*).$$

Verifique isso explicitamente para

(a) $f(z) = z^n$, n um inteiro, (b) $f(z) = \sin z$.

Se $f(z) = iz$ ($a_1 = i$), mostre que a afirmação precedente não é válida.

- 6.5.7** A função $f(z)$ é analítica em um domínio que inclui o eixo real. Quando z é real ($z = x$), $f(x)$ é imaginário puro.

(a) Mostre que

$$f(z^*) = -[f(z)]^*.$$

(b) Para o caso específico $f(z) = iz$, desenvolva formas cartesianas de $f(z)$, $f(z^*)$, e $f^*(z)$. Não cite o resultado geral da parte (a).

- 6.5.8** Desenvolva os três primeiros termos não-zero da expansão de Laurent de

$$f(z) = (e^z - 1)^{-1}$$

em torno da origem. Note a semelhança com a função geradora do número de Bernoulli, Equação (5.144) da Seção 5.9.

Exercícios

6.7.5 Mostre que números negativos têm logaritmos no plano complexo. Em particular, ache $\ln(-1)$.

Resposta: $\ln(-1) = i\pi$.

6.7.6 Uma representação integral da função de Bessel segue o contorno no plano t mostrado na Figura 6.24. Mapeie esse contorno para o plano θ com $t = e^\theta$. Muitos exemplos adicionais de mapeamento são dados nos Capítulos 11, 12 e 13.

6.7.7 Para m não-inteiro, mostre que a expansão binomial do Exercício 6.5.2 é válida somente para um ramo adequadamente definido da função $(1+z)^m$. Mostre como o plano z é cortado. Explique por que $|z| < 1$ pode ser considerado como o círculo de convergência para a expansão desse ramo, à luz do corte que você escolheu.

6.7.8 A expansão de Taylor dos Exercícios 6.5.2 e 6.7.7 **não** é adequada para ramos que não sejam aquele ramo da função $(1+z)^m$ definido adequadamente para m não-inteiro. [Note que outros ramos não podem ter a mesma expansão de Taylor, já que devem ser distinguíveis.] Usando o mesmo corte de ramificação dos exercícios anteriores para todos os outros ramos, ache as expansões de Taylor correspondentes, detalhando as atribuições de fase e coeficientes de Taylor.

Exercícios

6.8.1 Expanda $w(x)$ em uma série de Taylor em torno do ponto $z = z_0$, em que $f'(z_0) = 0$. (Ângulos não são preservados.) Mostre que, se as primeiras $n - 1$ derivadas desaparecerem, mas $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, então os ângulos no plano z com vértices em $z = z_0$ aparecem no plano w multiplicados por n .

6.8.2 Desenvolva as transformações que criam cada um dos quatro sistemas de coordenadas cilíndricas:

(a) Cilíndricas circulares: $x = \rho \cos \varphi$,

$$y = \rho \sin \varphi.$$

(b) Cilíndricas elípticas: $x = a \cosh u \cos v$,

$$y = a \sinh u \sin v.$$

(c) Cilíndricas parabólicas: $x = \xi \eta$,

$$y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2).$$

(d) Bipolares:

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi},$$

$$y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

Nota: Essas transformações não são necessariamente analíticas.

6.8.3 Na transformação

$$e^z = \frac{a - w}{a + w},$$

como as retas coordenadas no plano z se transformam? Que sistema de coordenadas você construiu?

Exemplo 7.1.5 ESPALHAMANTO NA MECÂNICA QUÂNTICA

A análise do espalhamento na mecânica quântica leva à função

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{x^2 - \sigma^2}, \quad (7.57)$$

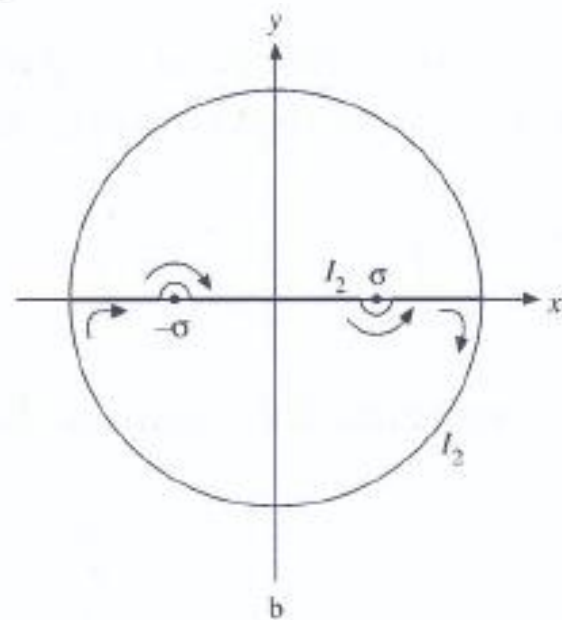
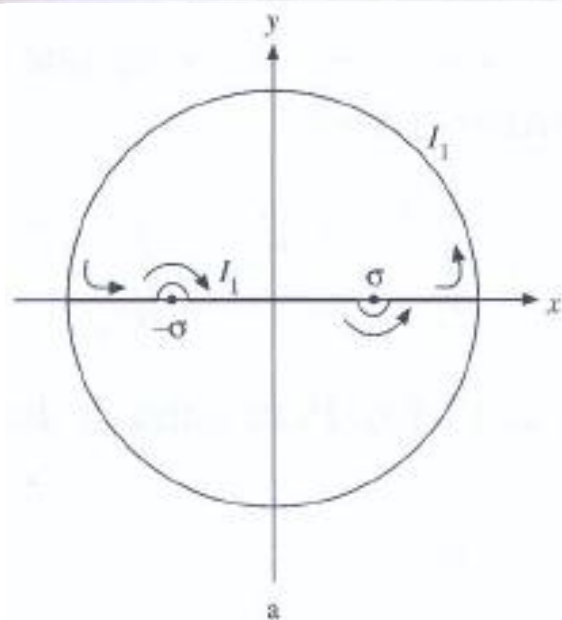
em que σ é real e positivo. Essa integral é divergente e, portanto, ambígua. Pelas condições físicas do problema, há ainda mais um requisito: $I(\sigma)$ deve ter a forma $e^{i\sigma}$, de modo que representará uma onda espalhada emergente.

Usando

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{i} \sinh iz = \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz}, \quad (7.58)$$

escrevemos a Equação (7.57) no plano complexo como

$$I(\sigma) = I_1 + I_2, \quad (7.59)$$



$$I_1 = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2} dz,$$
$$I_2 = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2} dz.$$

A integral I_1 é semelhante ao Exemplo 7.1.4 e, como naquele caso, podemos completar o contorno por um semicírculo infinito no semiplano superior, como mostra a Figura 7.8a. Para I_2 , a exponencial é negativa, e completamos o contorno por um semicírculo infinito no semiplano inferior, como mostra a Figura 7.8b. Assim como no Exemplo 7.1.4, nenhum dos semicírculos contribui com qualquer coisa para a integral – lema de Jordan.

Há ainda o problema de localizar os pólos e avaliar os resíduos. Encontramos pólos em $z = +\sigma$ e $z = -\sigma$ **sobre o contorno de integração**. Os resíduos são (Exercícios 6.6.1 e 7.1.1)

	$z = \sigma$	$z = -\sigma$
I_1	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$
I_2	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$

Desviando ao redor dos pólos, como mostra a Figura 7.8 (pouco importa se formos por cima ou por baixo), constatamos que o teorema dos resíduos leva a

$$PI_1 - \pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{-i\sigma}}{2} + \pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2}, \quad (7.61)$$

porque envolvemos a singularidade em $z = \sigma$ mas excluímos a singularidade em $z = -\sigma$. De modo semelhante, mas notando que o contorno para I_2 é em sentido horário,

$$PI_2 - \pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} + \pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{-i\sigma}}{2} = -2\pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2}. \quad (7.62)$$

Somando as Equações (7.61) e (7.62), temos

$$PI(\sigma) = PI_1 + PI_2 = \frac{\pi}{2}(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}) = \pi \cosh i\sigma = \pi \cos \sigma. \quad (7.63)$$

Essa é uma avaliação perfeitamente boa da Equação (7.57), mas, infelizmente, a dependência do co-seno é adequada para uma onda estacionária e não para a onda espalhada emergente, como especificamos.

Para obter a forma desejada, experimentamos uma técnica diferente (compare com o Exemplo 7.1.1). Em vez de nos esquivarmos ao redor dos pontos singulares, vamos removê-los do eixo real. Especificamente, seja $\sigma \rightarrow \sigma + i\gamma$, $-\sigma \rightarrow -\sigma - i\gamma$, em que γ é positivo mas pequeno e eventualmente será obrigado a se aproximar de zero; isto é, para I_1 incluímos um dos pólos e para I_2 incluímos o outro,

$$I_+(\sigma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\sigma + i\gamma). \quad (7.64)$$

Com essa simples substituição, a integral de primeira ordem I_1 se torna

$$I_1(\sigma + i\gamma) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2} \quad (7.65)$$

por aplicação direta do teorema dos resíduos. Além disso,

$$I_2(\sigma + i\gamma) = -2\pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2}. \quad (7.66)$$

Somando as Equações (7.65) e (7.66), e então deixando $\gamma \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} I_+(\sigma) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} [I_1(\sigma + i\gamma) + I_2(\sigma + i\gamma)] \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \pi e^{i(\sigma + i\gamma)} = \pi e^{i\sigma}, \end{aligned} \tag{7.67}$$

um resultado que realmente se ajusta às condições de fronteira de nosso problema de espalhamento.

É interessante notar que a substituição $\sigma \rightarrow \sigma - i\gamma$ teria levado a

$$I_-(\sigma) = \pi e^{-i\sigma}, \tag{7.68}$$

que poderia representar uma onda incidente. Vemos que nosso resultado anterior (Equação (7.63)) é a média aritmética das Equações (7.67) e (7.68). Essa média é o valor principal de Cauchy da integral. Note que temos essas possibilidades (Equações (7.63), (7.67) e (7.68)) porque nossa integral não é definida unicamente, até que especifiquemos o processo particular de limite (ou média) a ser usado.

Avaliação de Integrais Definidas: Formas Exponenciais

Quando há funções exponenciais ou hiperbólicas presentes no integrando, a vida fica um pouco mais complicada do que antes. Em vez de uma prescrição geral global, o contorno deve ser escolhido para se ajustar à integral específica. Esses casos são também oportunidades para ilustrar a versatilidade e o poder da integração de contorno.

Como exemplo, consideramos uma integral que será bastante útil no desenvolvimento de uma relação entre $\Gamma(1+z)$ e $\Gamma(1-z)$. Note como é explorada a periodicidade ao longo do eixo imaginário.

Exemplo 7.1.6 FUNÇÃO FATORIAL

Queremos avaliar

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1. \quad (7.69)$$

Os limites impostos a a são suficientes (mas não necessários) para evitar que a integral divirja, à medida que $x \rightarrow \pm\infty$. Essa integral (Equação 7.69) pode ser manipulada substituindo a variável real x pela variável complexa z e integrando ao redor do contorno mostrado na Figura 7.9. Se tomarmos o limite, à medida que $R \rightarrow \infty$, o eixo real, é claro, leva à integral que queremos. O caminho de retorno ao longo de $y = 2\pi$ é escolhido para deixar invariante o denominador da integral, introduzindo, ao mesmo tempo, um fator constante $e^{i2\pi a}$ no numerador. Temos, no plano complexo,

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{az}}{1+e^z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{i2\pi a} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right) \\ &= (1 - e^{i2\pi a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Além disso, há duas seções verticais ($0 \leq y \leq 2\pi$), que desaparecem (exponencialmente), à medida que $R \rightarrow \infty$.

Agora, onde estão os pólos e quais são os resíduos? Temos um pólo quando

$$e^z = e^x e^{iy} = -1. \quad (7.71)$$

A Equação (7.7) é satisfeita em $z = 0 + i\pi$. Por uma expansão de Laurent⁵ em potências de $(z - i\pi)$ verificamos, que o pólo é um pólo simples com um resíduo de $-e^{i\pi a}$. Então, aplicando o teorema dos resíduos,

$$(1 - e^{i2\pi a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = 2\pi i (-e^{i\pi a}). \quad (7.72)$$

⁵ $1 + e^z = 1 + e^{z-i\pi} e^{i\pi} = 1 - e^{z-i\pi} = -(z - i\pi) \left(1 + \frac{z-i\pi}{2!} + \frac{(z-i\pi)^2}{3!} + \dots \right).$

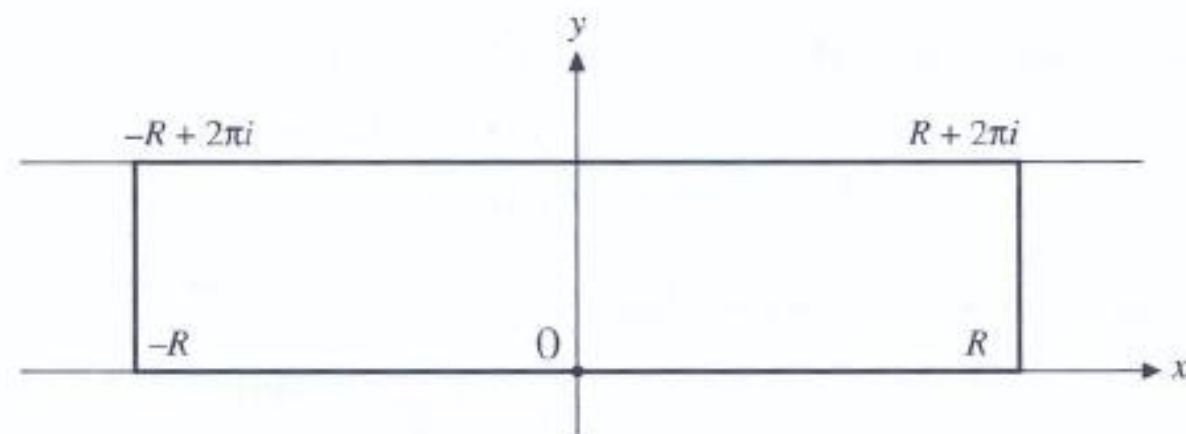


Figura 7.9: Contorno retangular.

Essa expressão se reduz rapidamente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \quad 0 < a < 1. \quad (7.73)$$

Usando a função beta (Seção 8.4), podemos mostrar que a integral é igual ao produto $\Gamma(a)\Gamma(1-a)$. Isso resulta na interessante e útil relação da função fatorial

$$\Gamma(a+1)\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\operatorname{sen} \pi a}. \quad (7.74)$$

Embora a Equação (7.73) seja válida para a real, $0 < a < 1$, a Equação (7.74) pode ser estendida por continuação analítica para todos os valores de a , reais e complexos, excluindo apenas valores inteiros reais. ■

Exemplo 7.1.7 NÚMEROS DE BERNOULLI

Na Seção 5.9, os números de Bernoulli foram definidos pela expansão

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (7.75)$$

Substituindo x por z (continuação analítica), temos uma série de Taylor (compare com a Equação (6.47)) com

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad (7.76)$$

em que o contorno C_0 é ao redor da origem em sentido anti-horário com $|z| < 2\pi$ para evitar os pólos em $2\pi in$.

Para $n = 0$, temos um pólo simples em $z = 0$ com um resíduo de $+1$. Daí, pela Equação (7.25),

$$B_0 = \frac{0!}{2\pi i} \cdot 2\pi i(1) = 1. \quad (7.77)$$

Para $n = 1$, a singularidade em $z = 0$ se torna um pólo de segunda ordem. Podemos mostrar que o resíduo é $-\frac{1}{2}$ por expansão de série da exponencial, seguida por uma expansão binomial. Isso resulta em

$$B_1 = \frac{1!}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}. \quad (7.78)$$

Para $n \geq 2$ esse procedimento de torna bastante tedioso, e recorreremos a um meio diferente para avaliar a Equação (7.76). O contorno é deformado, como mostra a Figura 7.10.

O novo contorno C ainda circunda a origem, como requerido, mas agora também circunda (em uma direção negativa) uma série infinita de pontos singulares ao longo do eixo imaginário em $z = \pm p2\pi i, p = 1, 2, 3, \dots$. A integração para a frente e para trás ao longo do eixo x se cancela e, para $R \rightarrow \infty$, a integração sobre o círculo infinito resulta em zero. Lembre-se de que $n \geq 2$. Portanto,

$$\oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = -2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \text{resíduos} \quad (z = \pm p2\pi i). \quad (7.79)$$

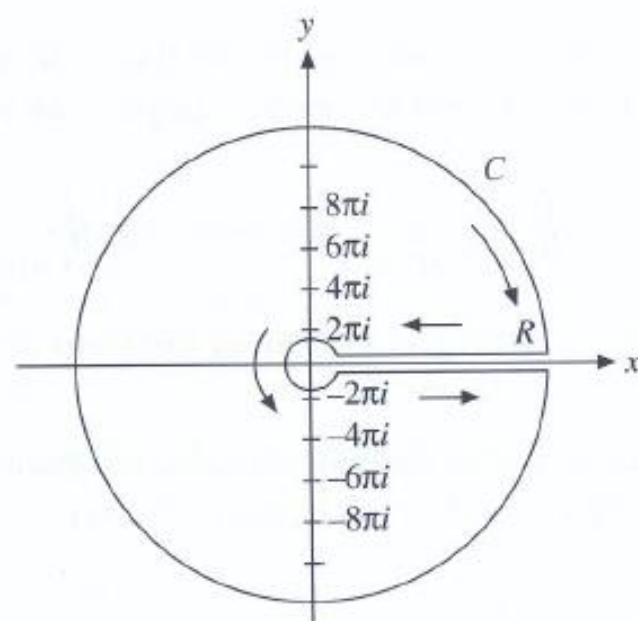


Figura 7.10: Contorno de integração para números de Bernoulli.

Em $z = p2\pi i$, temos um pólo simples com um resíduo $(p2\pi i)^{-n}$. Quando n é ímpar, o resíduo de $z = p2\pi i$ cancela exatamente o resíduo de $z = -p2\pi i$ e $B_n = 0$, $n = 3, 5, 7$, e assim por diante. Para n par, os resíduos se somam, dando

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n!}{2\pi i} (-2\pi i) 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n (2\pi i)^n} \\ &= -\frac{(-1)^{n/2} 2n!}{(2\pi)^n} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-n} = -\frac{(-1)^{n/2} 2n!}{(2\pi)^n} \zeta(n) \quad (n \text{ par}), \end{aligned} \quad (7.80)$$

em que $\zeta(n)$ é a função zeta de Riemann apresentada na Seção 5.9. A Equação (7.80) corresponde à Equação (5.152) da Seção 5.9.

Exercícios

7.1.1 Determine a natureza das singularidades de cada uma das seguintes funções e avalie os resíduos ($a > 0$).

(a) $\frac{1}{z^2 + a^2}.$

(b) $\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}.$

(c) $\frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}.$

(d) $\frac{\operatorname{sen} 1/z}{z^2 + a^2}.$

(e) $\frac{ze^{+iz}}{z^2 + a^2}.$

(f) $\frac{ze^{+iz}}{z^2 - a^2}.$

(g) $\frac{e^{+iz}}{z^2 - a^2}.$

(h) $\frac{z^{-k}}{z + 1}, \quad 0 < k < 1.$

Sugestão: Para o ponto no infinito, use a transformação $w = 1/z$ para $|z| \rightarrow 0$. Para o resíduo, transforme $f(z) dz$ para $g(w) dw$ e observe o comportamento de $g(w)$.

Exercícios

7.1.2 Localize as singularidades e avalie os resíduos de cada uma das seguintes funções:

(a) $z^{-n}(e^z - 1)^{-1}, \quad z \neq 0,$

(b) $\frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}.$

(c) Ache uma expressão de forma fechada (isto é, que não seja uma soma) para a soma das singularidades do plano finito.

(d) Usando o resultado da parte (c), qual é o resíduo em $|z| \rightarrow \infty$?

Sugestão: Veja a Seção 5.9 para expressões que envolvem números de Bernoulli. Note que a Equação (5.144) não pode ser usada para investigar a singularidade em $z \rightarrow \infty$, uma vez que essa série só é válida para $|z| < 2\pi$.

7.1.3 A afirmação de que a integral de meia-volta ao redor de um ponto singular é igual à metade da integral de volta inteira estava limitada a pólos simples. Mostre, por um exemplo específico, que

$$\int_{\text{Semicírculo}} f(z) dz = \frac{1}{2} \oint_{\text{Círculo}} f(z) dz$$

não vale necessariamente se a integral circundar um pólo de ordem mais alta.

Sugestão: Experimente $f(z) = z^{-2}$.

Exercícios

7.1.4 A função $f(z)$ é analítica ao longo do eixo real, exceto para um pólo de terceira ordem em $z = x_0$. A expansão de Laurent em torno de $z = x_0$ tem a forma

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z - x_0)^3} + \frac{a_{-1}}{z - x_0} + g(z),$$

com $g(z)$ analítica em $z = x_0$. Mostre que a técnica do valor principal de Cauchy é aplicável no sentido de que

(a) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x) dx \right\}$ é finito.

(b) $\int_{C_{x_0}} f(z) dz = \pm i\pi a_{-1},$

em que C_{x_0} denota um **semicírculo pequeno** em torno de $z = x_0$.

7.1.5 A função degrau unitária é definida como (compare com o Exercício 1.15.13)

$$u(s - a) = \begin{cases} 0, & s < a \\ 1, & s > a. \end{cases}$$

Mostre que $u(s)$ tem as representações integrais

(a) $u(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{x - i\varepsilon} dx,$

(b) $u(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{x} dx.$

Nota: O parâmetro s é real.

7.1.6 A maioria das funções especiais da física matemática pode ser gerada (definida) por uma função geradora da forma

$$g(t, x) = \sum_n f_n(x) t^n.$$

Dadas as seguintes representações integrais, derive as funções geradoras correspondentes:

(a) Bessel:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-n-1} dt.$$

(b) Bessel modificada:

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t+1/t)} t^{-n-1} dt.$$

(c) Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} t^{-n-1} dt.$$

(d) Hermite:

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint e^{-t^2+2tx} t^{-n-1} dt.$$

(e) Laguerre:

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)t^{n+1}} dt.$$

(f) Chebyshev:

$$T_n(x) = \frac{1}{4\pi i} \oint \frac{(1-t^2)t^{-n-1}}{(1-2tx+t^2)} dt.$$

Cada um dos contornos circunda a origem e nenhum outro ponto singular.

7.1.7 Generalizando o Exemplo 7.1.2, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \sin \theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2)^{1/2}}, \quad \text{para } a > |b|.$$

O que acontece se $|b| > |a|$?

7.1.8 Mostre que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}, \quad a > 1.$$

7.1.9 Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \frac{2\pi}{1 - t^2}, \quad \text{para } |t| < 1.$$

O que acontece se $|t| > 1$? O que acontece se $|t| = 1$?

7.1.10 Com o cálculo de resíduos, mostre que

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \theta \, d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(A notação de fatorial duplo é definida na Seção 8.1.)

Sugestão: $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $|z| = 1$.

7.1.11 Avalie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} dx, \quad a > b > 0.$$

Resposta: $\pi(a - b)$.

7.1.12 Prove que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sugestão: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

7.1.13 O cálculo da mecânica quântica de uma probabilidade de transição leva à função $f(t, \omega) = 2(1 - \cos \omega t)/\omega^2$. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \omega) d\omega = 2\pi t.$$

7.1.14 Mostre que ($a > 0$)

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

Como o lado direito será modificado se $\cos x$ for substituído por $\cos kx$?

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}.$$

Como o lado direito será modificado se $\sin x$ for substituído por $\sin kx$?

Essas integrais também podem ser interpretadas como transformadas de Fourier de co-seno e seno, Capítulo 15.