LOM3227 - 2º semestre de 2016
Métodos Computacionais da Física

Tema 4. Método de diferenças finitas para equações diferenciais parciais: elípticas, parabólicas, hiperbólicas

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, “Equações Diferenciais”, MAKRON Books do Brasil Ltda., 3ª edição, 2001 – v.2, cap.15

Equações elípticas

Uma Equação de Diferenças Substituindo a Equação de Laplace

Se u é uma função de duas variáveis x e y, podemos formar duas diferenças centrais

$$u(x+h,\ y) - 2u(x, y) + u(x-h,\ y) \quad \text{e} \quad u(x,\ y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h).$$

Decorre então de (6) da Seção 9.8 que as aproximações por diferenças finitas para as derivadas parciais segundas u_{xx} e u_{yy} são dadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)\right] \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)\right]. \tag{2}$$

Somando (1) e (2), obtemos a **aproximação de cinco pontos** do laplaciano:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y)\right].$$

Logo, podemos substituir a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ pela equação de diferenças

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0 \tag{3}$$

Adotando a notação $u(x, y) = u_{ij}$ e

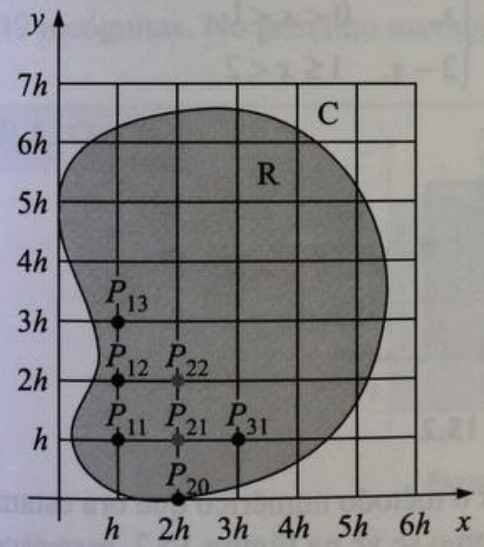
$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u_{i+1,j} \\ u(x, y+h) &= u_{i,j+1} \\ u(x-h, y) &= u_{i-1,j} \\ u(x, y-h) &= u_{i,j-1} \end{aligned}$$

(3) se escreve

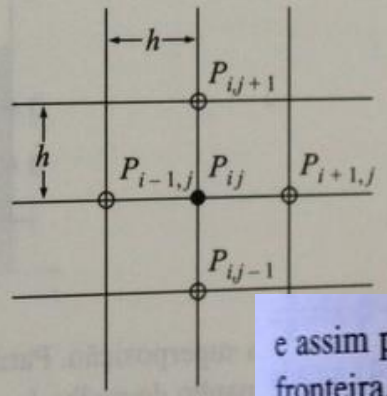
$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0. \tag{4}$$

Para melhor compreender a equação (4), suponhamos uma malha consistindo de retas horizontais espaçadas de h unidades e retas verticais também espaçadas de h unidades, colocada sobre uma região R delimitada por uma curva C, em que estamos procurando uma solução da equação de Laplace. O número h é o **tamanho da malha**. Veja a Figura 15.1(a). Os pontos de intersecção das retas, $P_{ij} = P(ih, jh)$, com i e j inteiros, são chamados **pontos da malha** ou **pontos reticulados**. Um ponto da malha é **ponto interior** se seus quatro vizinhos mais próximos são pontos de R. Os pontos de R ou de C que não são pontos interiores são chamados **pontos fronteira** ou **pontos de contorno**. Por exemplo, na Figura 15.1(a) temos

$$P_{20} = P(2h, 0), \quad P_{11} = P(h, h), \quad P_{21} = P(2h, h), \quad P_{22}(P(2h, 2h),$$



(a)



(b)

e assim por diante. Dos pontos relacionados, P_{21} e P_{22} são pontos interiores, P_{20} e P_{11} são pontos fronteira. Na Figura 15.1(a) os pontos interiores são os claros e os pontos fronteira aparecem em negro. De (4), vemos que

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\right] \tag{5}$$

etc. conforme Figura 15.1(b); o valor de u_{ij} em um ponto interior de R é a média dos valores de u nos quatro pontos vizinhos. Os pontos vizinhos $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i-1,j}$ e $P_{i,j-1}$ correspondem, respectivamente, aos quatro pontos E, N, W e S de uma bússola.

O Problema de Dirichlet

Recorde que, no **problema de Dirichlet** para a equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$, os valores de $u(x, y)$ são dados no contorno C de uma região R. A idéia básica é achar uma solução aproximada da equação de Laplace em pontos interiores da malha, substituindo a equação de derivadas parciais pela equação de diferenças (4). Logo, os valores aproximados de u nos pontos da malha, a saber, os u_{ij}, estão relacionados uns com os outros e, possivelmente, com valores conhecidos de u no caso de um ponto da malha estar no contorno C. Obtemos então um sistema de equações algébricas lineares, que resolvemos em relação às incógnitas u_{ij}. O exemplo a seguir ilustra o método para uma região quadrada.

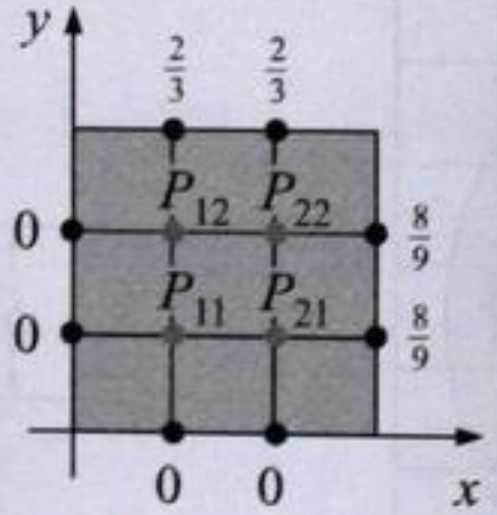
EXEMPLO 1

No Problema 14 do Exercício 12.5, solicitou-se a resolução do problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$



utilizando o princípio da superposição. Para aplicar o método numérico que ora estamos estudando, comecemos com um tamanho de malha $h = 2/3$. Como se vê na Figura 15.2, essa escolha dá quatro pontos interiores e oito pontos fronteira. Os números próximos dos pontos fronteira são os valores exatos de u obtidos das condições especificadas ao longo daquele contorno. Por exemplo, em $P_{31} = P(3h, h) = \mathrm{P}(2, \frac{2}{3})$, temos $x = 2$ e $y = \frac{2}{3}$ e assim a condição $u(2, y)$ dá $u(2, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(2 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}$. Analogamente, em $P_{13} = P(\frac{2}{3}, 2)$ a condição $u(x, 2)$ dá $u(\frac{2}{3}, 2) = \frac{2}{3}$. Aplicamos agora (4) a cada ponto interior. Por exemplo, em P_{11} temos $i = 1$ e $j = 1$, de forma que (4) se escreve

$$u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} = 0.$$

Como $u_{01} = u(0, \frac{2}{3}) = 0$ e $u_{10} = u(\frac{2}{3}, 0) = 0$, a equação precedente se torna $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0$. Repetindo o processo em P_{21}, P_{12} e P_{22}, obtemos as equações adicionais

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= 0 \\
u_{11} - 4u_{21} + u_{22} &= -\frac{8}{9} \\
u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= -\frac{2}{3} \\
u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -\frac{14}{9}
\end{aligned} \tag{6}$$

Resolvendo o sistema com o programa de computação algébrica Mathematica, obtemos as temperaturas aproximadas nos quatro pontos interiores:

$$u_{11} = \frac{7}{36} = 0{,}1944, \quad u_{21} = \frac{5}{12} = 0{,}4167,$$

$$u_{12} = \frac{13}{36} = 0{,}3611, \quad u_{22} = \frac{7}{12} = 0{,}5833. \quad \blacksquare$$

Tal como no caso das equações diferenciais ordinárias, é de se esperar que um valor menor de h aumente a precisão da aproximação. Mas um tamanho menor de malha significa, naturalmente, que há mais pontos interiores na malha e, conseqüentemente, um sistema muito maior de equações a serem resolvidas. Para uma região *quadrada* cujo lado tem comprimento L, um tamanho de malha $h = L/n$ dará um total de $(n-1)^2$ pontos interiores da malha. No Exemplo 1, para $n = 8$, o tamanho da malha é razoável, $h = 2/8 = 1/4$, mas o número de pontos interiores é $(8-1)^2 = 49$. Temos, assim, 49 equações em 49 incógnitas. No próximo exemplo tomaremos $h = 1/2$ como tamanho da malha.

EXEMPLO 2

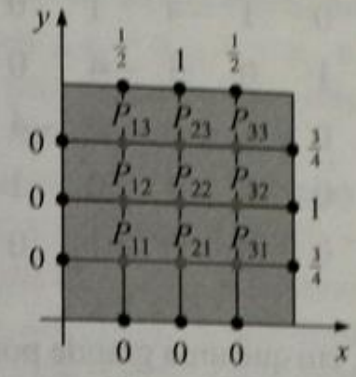


Figura 15.3

Como vemos na Figura 15.3, com $n = 4$, um tamanho de malha $h = 2/4 = 1/2$ para o quadrado do Exemplo 1 dá $3^2 = 9$ pontos interiores. Aplicando (4) a esses pontos e levando em consideração as condições de contorno indicadas, obtemos nove equações em nove incógnitas. Para que você possa verificar os resultados, damos o sistema em forma não simplificada:

$$
\begin{aligned}
u_{21} + u_{12} + \quad 0 + \quad 0 - 4u_{11} &= 0 \\
u_{31} + u_{22} + u_{11} + \quad 0 - 4u_{21} &= 0 \\
\frac{3}{4} + u_{32} + u_{21} + \quad 0 - 4u_{31} &= 0 \\
u_{22} + u_{13} + u_{11} + \quad 0 - 4u_{12} &= 0 \\
u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0 \\
1 + u_{33} + u_{22} + u_{31} - 4u_{32} &= 0 \\
u_{23} + \frac{1}{2} + \quad 0 + u_{12} - 4u_{13} &= 0 \\
u_{33} + \quad 1 + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0 \\
\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + u_{23} + u_{32} - 4u_{33} &= 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Nesse caso, Mathematica dá

$$u_{11} = \frac{7}{64} = 0{,}1094, \quad u_{21} = \frac{51}{224} = 0{,}2277, \quad u_{31} = \frac{177}{448} = 0{,}3951$$

$$u_{12} = \frac{47}{224} = 0{,}2098, \quad u_{22} = \frac{13}{32} = 0{,}4063, \quad u_{32} = \frac{135}{224} = 0{,}6027$$

$$u_{13} = \frac{145}{448} = 0{,}3237, \quad u_{23} = \frac{131}{224} = 0{,}5848, \quad u_{33} = \frac{39}{64} = 0{,}6094. \qquad \blacksquare$$

Após simplificar (7), é interessante notar que a matriz 9×9 de coeficientes é

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Este é um exemplo de **matriz esparsa**, em que uma grande porcentagem dos elementos é constituída de zeros. A matriz (8) é também um exemplo de **matriz em faixa**. Esses tipos de matriz são caracterizados pelas propriedades de que os elementos na diagonal principal e nas diagonais (ou faixas) paralelas a ela são todos diferentes de zero.

Iteração de Gauss-Seidel

Problemas que envolvem soluções aproximadas de equações de derivadas parciais invariavelmente conduzem a grandes sistemas de equações algébricas lineares. Não é raro termos de resolver sistemas que envolvem centenas de equações. Embora um método direto de resolução, como a eliminação gaussiana, não altere os elementos nulos fora das faixas em uma matriz como (8), tal método preenche com elementos não-zero os lugares entre as faixas. E como o armazenamento de matrizes muito grandes utiliza grande parte da memória do computador, costuma-se resolver um sistema grande de maneira indireta. Um método comum é a chamada **iteração de Gauss-Seidel**.

Ilustraremos esse método para o sistema (6).* Por uma questão de simplicidade, vamos substituir as variáveis de índice duplo u_{11}, u_{21}, u_{12} e u_{22} por x_1, x_2, x_3 e x_4, respectivamente.

EXEMPLO 3

Passo 1: *Resolva cada equação em relação às variáveis da diagonal principal do sistema.* Isto é, em (6) resolva a primeira equação em relação a x_1, a segunda equação em relação a x_2 e assim por diante:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 \\ x_2 &= 0{,}25x_1 + 0{,}25x_4 + 0{,}2222 \\ x_3 &= 0{,}25x_1 + 0{,}25x_4 + 0{,}1667 \\ x_4 &= 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}3889. \end{aligned} \tag{9}$$

Podemos obter diretamente essas equações utilizando (5) de preferência a (4) nos pontos interiores.

Passo 2: *Iterações*. Começamos formulando uma suposição inicial para os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4. Se fosse tratado simplesmente de um sistema de equações lineares e se nada soubéssemos sobre a solução, poderíamos começar com $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$. Mas como a solução de (9) representa aproximações de uma solução de um problema de contorno, parece natural tomar como hipótese inicial para os valores de $x_1 = u_{11}$, $x_2 = u_{21}$, $x_3 = u_{12}$ e $x_4 = u_{22}$ a média de todas as condições de contorno. Nesse caso, a média dos números nos oito pontos fronteira da Figura 15.2 é aproximadamente 0,4. Assim, nossa suposição inicial é $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0{,}4$. As iterações do método de Gauss-Seidel utilizam os valores de x tão logo eles sejam calculados. Note que a primeira equação em (9) depende somente de x_2 e x_3; assim, fazendo x_2 e $x_3 = 0{,}4$, obtemos $x_1 = 0{,}2$. Como a segunda e a terceira equações dependem de x_1 e x_4, utilizamos os valores recém-calculados $x_1 = 0{,}2$ e $x_4 = 0{,}4$, para obter $x_2 = 0{,}3722$ e $x_3 = 0{,}3167$. A quarta equação depende de x_2 e x_3; utilizamos, pois, os novos valores $x_2 = 0{,}3722$ e $x_3 = 0{,}3167$ para obter $x_4 = 0{,}5611$. Em resumo, a primeira iteração deu os valores

$$x_1 = 0{,}2, \quad x_2 = 0{,}3722, \quad x_3 = 0{,}3167, \quad x_4 = 0{,}5611.$$

Note quão próximos esses números já estão dos valores efetivos dados no final do Exemplo 1.

A segunda iteração começa levando-se os valores $x_2 = 0{,}3722$ e $x_3 = 0{,}3167$ na primeira equação, o que dá $x_1 = 0{,}1722$. De $x_1 = 0{,}1722$ e do último valor calculado de x_4, a saber, $x_4 = 0{,}5611$, a segunda e a terceira equações dão, por seu turno, $x_2 = 0{,}4055$ e $x_3 = 0{,}3500$. Com esses dois valores, obtemos, da quarta equação, $x_4 = 0{,}5678$. Ao final da segunda iteração temos

$$x_1 = 0{,}1722, \quad x_2 = 0{,}4055, \quad x_3 = 0{,}3500, \quad x_4 = 0{,}5678.$$

A tabela a seguir resume as iterações, da terceira à sétima.

Iteração	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**
x_1	0,1889	0,1931	0,1941	0,1944	0,1944
x_2	0,4139	0,4160	0,4165	0,4166	0,4166
x_3	0,3584	0,3605	0,3610	0,3611	0,3611
x_4	0,5820	0,5830	0,5833	0,5833	0,5833

Equações elípticas – Exercícios 1-2-3-4

Nos Problemas 1 - 4, utilize (4) para aproximar a solução da equação de Laplace nos pontos interiores região dada. Use a simetria sempre que possível.

1. $u(0,y) = 0,\ u(3,y) = y(2-y),\ 0 < y < 2$

$u(x,0) = 0,\ u(x,2) = x(3-x),\ 0 < x < 3$

tamanho da malha: $h = 1$

2. $u(0,y) = 0,\ u(2,y) = 0,\ 0 < y < 1$

$u(x,0) = 100,\ u(x,1) = 0,\ 0 < x < 2$

tamanho da malha: $h = 1/2$

3. $u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,\ 0 < y < 1$

$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = \operatorname{sen} \pi x,\ 0 < x < 1$

tamanho da malha: $h = 1/3$

4. $u(0,y) = 108y^2(1-y),\ u(1,y) = 0,\ 0 < y < 1$

$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = 0,\ 0 < x < 1$

tamanho da malha: $h = 1/3$

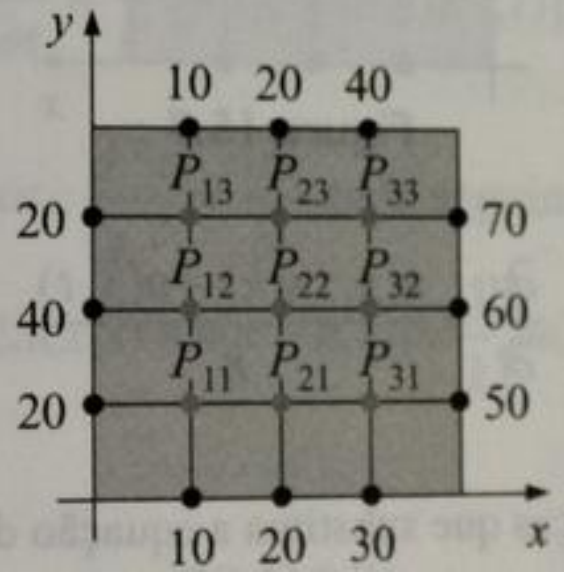
Equações elípticas – Exercícios 5-6

Nos Problemas 5 e 6, utilize (5) e a iteração de Gauss-Seidel para aproximar a solução da equação de Laplace nos pontos interiores de um quadrado unitário. Tome o tamanho da malha $h = 1/4$. No Problema 5, as condições de contorno são dadas; no Problema 6, os valores de u em pontos do contorno são dados na Figura 15.5.

5. $u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 100y,\ 0 < y < 1$

$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = 100x,\ 0 < x < 1$

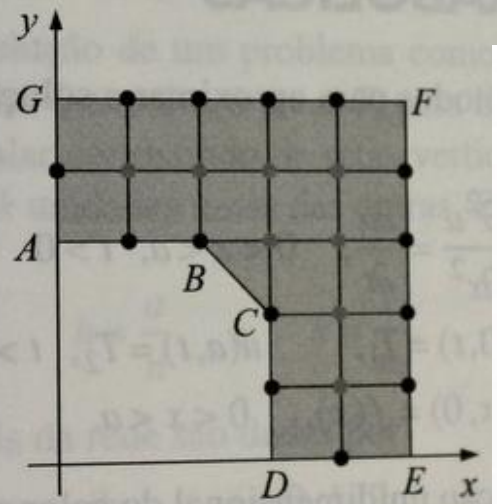
6.



Equações elípticas – Exercícios 7a-7b-8

(a) No Problema 12 dos Exercícios 12.6, resolvemos um problema de potencial recorrendo a uma forma especial da equação de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$. Mostre que a substituição da equação de Poisson por uma equação de diferenças é

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 f(x, y).$$



(b) Com o resultado da parte (a), aproxime a solução da equação de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ nos pontos interiores da região da Figura 15.6. O tamanho da malha é $h = 1/2$, $u = 1$ em todos os pontos ao longo de *ABCD* e $u = 0$ em todos os pontos ao longo de *DEFGA*. Recorra à simetria e, se necessário, à iteração de Gauss-Seidel.

8. Com o resultado da parte (a) do Problema 7, aproxime a solução da equação de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -64$ nos pontos interiores da região da Figura 15.7. A malha é $h = 1/8$ e $u = 0$ em todo ponto do contorno da região. Se necessário, use a iteração de Gauss-Seidel.

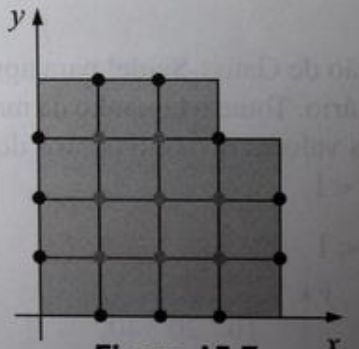


Figura 15.7

Equações parabólicas

Vamos estudar nesta seção dois métodos para aproximar a solução de um problema de contorno do tipo

$$
\begin{aligned}
& c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \ t > 0 \\
& u(0,t) = T_1, \qquad u(a,t) = T_2, \ t > 0 \\
& u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < a.
\end{aligned} \tag{1}
$$

A equação neste problema é a equação unidimensional do calor e é, como sabemos pela Seção 12.1, uma equação de derivadas parciais parabólica. As constantes T_1 e T_2 representam temperaturas nas

Substituição da Equação do Calor por uma Equação de Diferenças

Para obter uma aproximação de (1), primeiro substituímos a equação do calor por uma equação de diferenças. Utilizando a aproximação por diferenças centrais (1) da Seção 15.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right]$$

e a aproximação por diferenças avançadas (3) da Seção 9.8:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right],$$

podemos substituir a equação do calor $c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ pela seguinte equação de diferenças:

$$\frac{c}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right] = \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right] \tag{2}$$

Fazendo $\lambda = ck/h^2$ e

$$u(x,t) = u_{ij}$$

$$u(x+h,t) = u_{i+1,j}$$

$$u(x-h,t) = u_{i-1,j}$$

$$u(x,t+k) = u_{i,j+1},$$

(2) se escreve, após simplificação,

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j}. \tag{3}$$

Desejamos aproximar uma solução de um problema como (1) em uma região retangular no plano xt definida pelas desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, para um instante arbitrário T. Sobre essa região aplicamos uma rede retangular consistindo de retas verticais distantes h unidades umas das outras e retas horizontais distantes k unidades umas das outras. Escolhendo dois inteiros positivos n e m e definindo

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{e} \quad k = \frac{T}{m},$$

então as retas verticais e horizontais da rede são dadas por

$$x_i = ih, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$t_j = jk, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

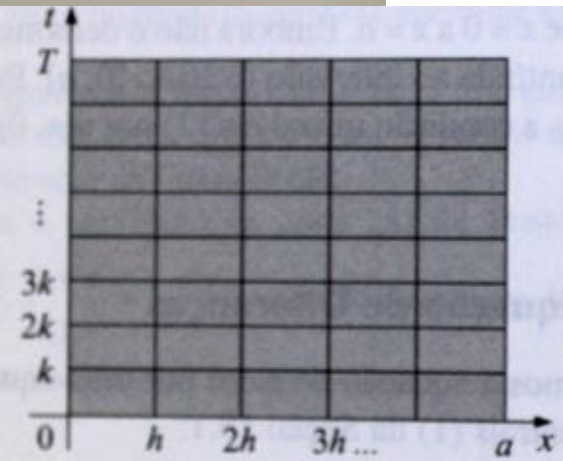


Figura 15.8

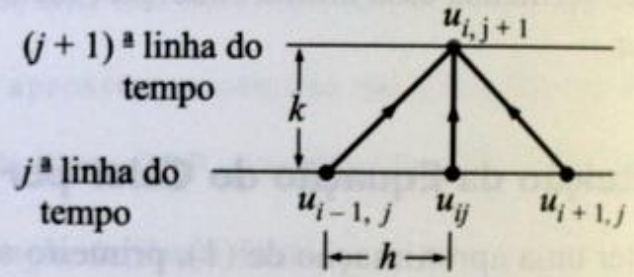


Figura 15.9

Conforme ilustrado na Figura 15.9, a idéia aqui é aplicar a fórmula (3) para estimar os valores da solução $u(x, t)$ nos pontos da $(j + 1)^{a}$ linha do tempo, utilizando apenas valores da j^{ma} linha. Por exemplo, os valores da primeira linha do tempo ($j = 1$) dependem da condição inicial $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$ dada na linha do tempo de ordem zero ($j = 0$). Esse tipo de processo numérico é chamado **método explícito de diferenças finitas**.

EXEMPLO 1

Considere o problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0{,}5$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le 0{,}5$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Primeiro identificamos $c = 1$, $a = 1$ e $T = 0{,}5$. Escolhendo, digamos, $n = 5$ e $m = 50$, então $h = 1/5 = 0{,}2$, $k = 0{,}5/50 = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}25$ e

$$x_i = i\frac{1}{5}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$t_j = j\frac{1}{100}, \quad j = 0, 1, 2, ..., 50.$$

Assim, (3) se escreve

$$u_{i,j+1} = 0{,}25(u_{i+1,j} + 2u_{ij} + u_{i-1,j}).$$

Fazendo $j = 0$ nessa fórmula, obtemos uma fórmula para as aproximações da temperatura u na primeira linha do tempo:

$$u_{i,1} = 0{,}25(u_{i+1,0} + 2u_{i,0} + u_{i-1}, 0).$$

Fazendo então $i = 1, \ldots, 4$ na última equação, obtemos

$$u_{11} = 0{,}25(u_{20} + 2u_{10} + u_{00})$$
$$u_{21} = 0{,}25(u_{30} + 2u_{20} + u_{10})$$
$$u_{31} = 0{,}25(u_{40} + 2u_{30} + u_{20})$$
$$u_{41} = 0{,}25(u_{50} + 2u_{40} + u_{40}).$$

A primeira equação dessa lista é interpretada como

$$u_{11} = 0{,}25(u(x_2, 0) + 2u(x_1, 0) + u(0, 0))$$
$$= 0{,}25(u(0{,}4, 0) + 2u(0{,}2, 0) + u(0, 0))$$

Em virtude da condição inicial $u(x, 0) = \text{sen } \pi x$, a última linha se torna

$$u_{11} = 0{,}25(0{,}951056516 + 2(0{,}587785252) + 0) = 0{,}531656755.$$

Esse número representa uma aproximação da temperatura $u(0{,}2, 0{,}01)$.

A Tabela 15.1 resume os cálculos restantes.

TABELA 15.1 Aproximação por uma equação explícita de diferenças com $h = 0{,}2$, $k = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}25$

Tempo	$x = 0{,}20$	$x = 0{,}40$	$x = 0{,}60$	$x = 0{,}80$
0,00	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878
0,01	0,5317	0,8602	0,8602	0,5317
0,02	0,4809	0,7781	0,7781	0,4809
0,03	0,4350	0,7038	0,7038	0,4350
0,04	0,3934	0,6366	0,6366	0,3934
0,05	0,3559	0,5758	0,5758	0,3559
0,06	0,3219	0,5208	0,5208	0,3219
0,07	0,2911	0,4711	0,4711	0,2911
0,08	0,2633	0,4261	0,4261	0,2633
0,09	0,2382	0,3854	0,3854	0,2382
0,10	0,2154	0,3486	0,3486	0,2154
0,11	0,1949	0,3153	0,3153	0,1949
0,12	0,1763	0,2852	0,2852	0,1763
0,13	0,1594	0,2580	0,2580	0,1594
0,14	0,1442	0,2333	0,2333	0,1442
0,15	0,1304	0,2111	0,2111	0,1304
0,16	0,1180	0,1909	0,1909	0,1180
0,17	0,1067	0,1727	0,1727	0,1067
0,18	0,0965	0,1562	0,1562	0,0965
0,19	0,0873	0,1413	0,1413	0,0873
0,20	0,0790	0,1278	0,1278	0,0790
0,21	0,0714	0,1156	0,1156	0,0714
0,22	0,0646	0,1045	0,1045	0,0646
0,23	0,0584	0,0946	0,0946	0,0584
0,24	0,0529	0,0855	0,0855	0,0529

TABELA 15.1 *Continuação*

Tempo	$x = 0{,}20$	$x = 0{,}40$	$x = 0{,}60$	$x = 0{,}80$
0,25	0,0478	0,0774	0,0774	0,0478
0,26	0,0432	0,0700	0,0700	0,0432
0,27	0,0391	0,0633	0,0633	0,0391
0,28	0,0354	0,0572	0,0572	0,0354
0,29	0,0320	0,0518	0,0518	0,0320
0,30	0,0289	0,0468	0,0468	0,0289
0,31	0,0262	0,0424	0,0424	0,0262
0,32	0,0237	0,0383	0,0383	0,0237
0,33	0,0214	0,0347	0,0347	0,0214
0,34	0,0194	0,0313	0,0313	0,0194
0,35	0,0175	0,0284	0,0284	0,0175
0,36	0,0159	0,0256	0,0256	0,0159
0,37	0,0143	0,0232	0,0232	0,0143
0,38	0,0130	0,0210	0,0210	0,0130
0,39	0,0117	0,0190	0,0190	0,0117
0,40	0,0106	0,0172	0,0172	0,0106
0,41	0,0096	0,0155	0,0155	0,0096
0,42	0,0087	0,0140	0,0140	0,0087
0,43	0,0079	0,0127	0,0127	0,0079
0,44	0,0071	0,0115	0,0115	0,0071
0,45	0,0064	0,0104	0,0104	0,0064
0,46	0,0058	0,0094	0,0094	0,0058
0,47	0,0053	0,0085	0,0085	0,0053
0,48	0,0048	0,0077	0,0077	0,0048
0,49	0,0043	0,0070	0,0070	0,0043
0,50	0,0039	0,0063	0,0063	0,0039

Você deve verificar, com auxílio dos métodos do Capítulo 12, que a solução exata do problema de contorno do Exemplo 1 é dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen} \pi x$. Dão-se abaixo alguns valores amostrais:

Exato	Aproximação
$u(0{,}4;\ 0{,}05) = 0{,}5806$	$u_{25} = 0{,}5758$
$u(0{,}6;\ 0{,}06) = 0{,}5261$	$u_{36} = 0{,}5208$
$u(0{,}2;\ 0{,}10) = 0{,}2191$	$u_{1,10} = 0{,}2154$
$u(0{,}8;\ 0{,}14) = 0{,}1476$	$u_{4,14} = 0{,}1442$

Essas aproximações estão próximas dos valores exatos e são suficientemente precisas para alguns propósitos. Mas há uma dificuldade com o método precedente. Recorde que um método numérico é **instável** se os erros de arredondamento ou quaisquer outros erros crescem muito rapidamente na medida em que os cálculos prosseguem. O processo numérico ilustrado no Exemplo 1 pode exibir esse tipo de comportamento. Pode-se provar que o processo é estável se λ é inferior ou no máximos igual a 0,5; em caso contrário, é instável. Note que, no Exemplo 1, escolhemos os valores de h e k de modo que $\lambda = 0{,}25$.

O próximo exemplo ilustra o que acontece quando se escolhe um tamanho maior de passo k, de modo que λ seja superior a 0,5.

EXEMPLO 2

Obtenha uma aproximação da solução do problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1,$$

utilizando (3) com $n = 5$ e $m = 25$.

Solução Nesse caso, $c = 1$, $a = 1$, $T = 1$, $h = 1/5 = 0{,}2$, $k = 1/25 = 0{,}04$ e $\lambda = 1$. Com auxílio de um computador, obtemos os resultados da Tabela 15.2.

TABELA 15.2 Aproximação por equação explícita de diferenças com $h = 0{,}2$, $k = 0{,}04$, $\lambda = 1$

Tempo	$x = 0{,}20$	$x = 0{,}40$	$x = 0{,}60$	$x = 0{,}80$
0,00	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878
0,04	0,3633	0,5878	0,5878	0,3633
0,08	0,2245	0,3633	0,3633	0,2245
0,12	0,1388	0,2245	0,2245	0,1388
0,16	0,0858	0,1388	0,1388	0,0858
0,20	0,0530	0,0857	0,0858	0,0530
0,24	0,0327	0,0530	0,0530	0,0328
0,28	0,0203	0,0327	0,0328	0,0202
0,32	0,0124	0,0204	0,0201	0,0126
0,36	0,0080	0,0121	0,0129	0,0075
0,40	0,0041	0,0088	0,0067	0,0054
0,44	0,0047	0,0020	0,0075	0,0012
0,48	–0,0026	0,0102	–0,0043	0,0063
0,52	0,0128	–0,0171	0,0208	–0,0106
0,56	–0,0299	0,0507	–0,0485	0,0314
0,60	0,0806	–0,1291	0,1306	–0,0799
0,64	–0,2097	0,3403	–0,3396	0,2105
0,68	0,5500	–0,8895	0,8903	–0,5500
0,72	–1,4395	2,3298	–2,3299	1,4403
0,76	3,7693	–6,0992	6,1000	–3,7702

TABELA 15.2 *Continuação*

Tempo	$x = 0{,}20$	$x = 0{,}40$	$x = 0{,}60$	$x = 0{,}80$
0,80	–9,8685	15,9685	–15,9693	9,8702
0,84	25,8370	–41,8063	41,8080	–25,8395
0,88	–67,6432	109,4512	–109,4538	67,6475
0,92	177,0945	–286,5482	286,5525	–177,1013
0,96	–463,6426	750,1950	–750,2019	463,6537
1,00	1213,8374	–1964,0393	1964,0503	–1213,8555

Para valores de t de 0 a 0,4, os resultados apresentados na Tabela 15.2 são confiáveis, embora um exame mais detido revele que a precisão é fraca. Os resultados para valores de t superiores a 0,5 não são confiáveis. Como os valores de $u(x, 0) = \text{sen } \pi x$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$ nunca são negativos, a solução $u(x, t)$ também nunca deve ser negativa nesse exemplo. Além disso, os grandes valores próximos à extremidade da tabela revelam os grandes erros gerados pela instabilidade do processo para essa escolha de h e k. Naturalmente, como $\lambda = 1$ excede 0,5, a instabilidade era previsível. Para $\lambda = 0{,}5$, os resultados numéricos são satisfatórios, mas qualquer aumento na precisão decorre da utilização de valores menores de k e, conseqüentemente, menores valores de λ. A necessidade de utilizar tamanhos muito pequenos de passos na direção do tempo é a principal falha desse método.

O Método de Crank-Nicholson

Há **métodos implícitos de diferenças finitas** para resolver equações de derivadas parciais do tipo parabólico. Tais métodos exigem que resolvamos um sistema de equações para determinar os valores aproximados de u na $(j+1)^a$ linha de tempo. Mas os métodos implícitos não apresentam problemas de instabilidade.

O algoritmo introduzido por J. Crank e P. Nicholson em 1947 é utilizado na maior parte das vezes para resolver a equação do calor e consiste em substituir a segunda derivada parcial em $c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ por uma média de dois quocientes de diferenças centrais, um calculado em t e o outro em $t + k$:

$$\frac{c}{2}\left[\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}+\frac{u(x+h,t+k)-2u(x,t+k)+u(x-h,t+k)}{h^2}\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[u(x,t,+k)-u(x,t)\right] \tag{4}$$

Novamente definindo $\lambda = ck/h^2$, após reagrupar termos, podemos escrever (4) como

$$-u_{i-1,j+1} + \alpha u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i+1,j} - \beta u_{ij} + u_{i-1,j}, \tag{5}$$

onde $\alpha = 2(1 + 1/\lambda)$ e $\beta = 2(1 - 1/\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m^{-1}$ e $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Para cada escolha de j, a equação de diferenças (5) para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dá $n-1$ equações com $n-1$ incógnitas $u_{i,j+1}$. À vista das condições de contorno dadas, os valores de $u_{i,j+1}$ são conhecidos

para $i = 0$ e $i = n$. Por exemplo, no caso $n = 4$, o sistema de equações para determinar os valores aproximados de u na $(j + 1)^a$ linha do tempo é

$$
\begin{aligned}
-u_{0,j+1} + \alpha u_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} \\
-u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j} \\
-u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} - u_{4,j+1} &= u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\alpha u_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= b_1 \\
-u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= b_2 \\
-u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} &= b_3,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

com

$$
\begin{aligned}
b_1 &= u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1} \\
b_2 &= u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j} \\
b_3 &= u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} + u_{4,j+1}.
\end{aligned}
$$

De modo geral, se utilizamos a equação de diferenças (5) para determinar valores de u na $(j+1)^{a}$ linha do tempo, devemos resolver um sistema linear $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, onde a matriz de coeficientes é uma **matriz tridiagonal**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha & -1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

e os elementos da matriz coluna **B** são

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}$$

$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}$$

$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1} = u_{n,j} - \beta u_{n-1,j} + u_{n-2,j} + u_{n,j+1}.$$

EXEMPLO 3

Aplique o método de Crank-Nicholson para obter uma aproximação da solução do problema de contorno

$$0{,}25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < 0{,}3$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad 0 \le t \le 0{,}3$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 2,$$

tomando $n = 8$ e $m = 30$.

Solução Identificando $a = 2$, $T = 0{,}3$, $h = 1/4 = 0{,}25$, $k = 1/100 = 0{,}01$ e $c = 0{,}25$, obtemos $\lambda = 0{,}04$. Com auxílio de um computador obtemos os resultados da Tabela 15.3.

TABELA 15.3 Método de Crank-Nicholson com $h = 0,25$, $k = 0,01$, $\lambda = 0,25$

Tempo	$x = 0,25$	$x = 0,50$	$x = 0,75$	$x = 1,00$	$x = 1,25$	$x = 1,50$	$x = 1,75$
0,00	0,7071	1,0000	0,7071	0,0000	–0,7071	–1,0000	–0,7071
0,01	0,6907	0,9768	0,6907	0,0000	–0,6907	–0,9768	–0,6907
0,02	0,6747	0,9542	0,6747	0,0000	–0,6747	–0,9542	–0,6747
0,03	0,6591	0,9321	0,6591	0,0000	–0,6591	–0,9321	–0,6591
0,04	0,6438	0,9105	0,6438	0,0000	–0,6438	–0,9105	–0,6438
0,05	0,6289	0,8894	0,6289	0,0000	–0,6289	–0,8894	–0,6289
0,06	0,6144	0,8688	0,6144	0,0000	–0,6144	–0,8688	–0,6144
0,07	0,6001	0,8487	0,6001	0,0000	–0,6001	–0,8487	–0,6001
0,08	0,5862	0,8291	0,5862	0,0000	–0,5862	–0,8291	–0,5862
0,09	0,5727	0,8099	0,5727	0,0000	–0,5727	–0,8099	–0,5727
0,10	0,5594	0,7911	0,5594	0,0000	–0,5594	–0,7911	–0,5594
0,11	0,5464	0,7728	0,5464	0,0000	–0,5464	–0,7728	–0,5464
0,12	0,5338	0,7549	0,5338	0,0000	–0,5338	–0,7549	–0,5338
0,13	0,5214	0,7374	0,5214	0,0000	–0,5214	–0,7374	–0,5214
0,14	0,5093	0,7203	0,5093	0,0000	–0,5093	–0,7203	–0,5093
0,15	0,4975	0,7036	0,4975	0,0000	–0,4975	–0,7036	–0,4975
0,16	0,4860	0,6873	0,4860	0,0000	–0,4860	–0,6873	–0,4860
0,17	0,4748	0,6714	0,4748	0,0000	–0,4748	–0,6714	–0,4748
0,18	0,4638	0,6559	0,4638	0,0000	–0,4638	–0,6559	–0,4638
0,19	0,4530	0,6407	0,4530	0,0000	–0,4530	–0,6407	–0,4530
0,20	0,4425	0,6258	0,4425	0,0000	–0,4425	–0,6258	–0,4425
0,21	0,4323	0,6114	0,4323	0,0000	–0,4323	–0,6114	–0,4323
0,22	0,4223	0,5972	0,4223	0,0000	–0,4223	–0,5972	–0,4223
0,23	0,4125	0,5834	0,4125	0,0000	–0,4125	–0,5834	–0,4125
0,24	0,4029	0,5699	0,4029	0,0000	–0,4029	–0,5699	–0,4029
0,25	0,3936	0,5567	0,3936	0,0000	–0,3936	–0,5567	–0,3936
0,26	0,3845	0,5438	0,3845	0,0000	–0,3845	–0,5438	–0,3845
0,27	0,3756	0,5312	0,3756	0,0000	–0,3756	–0,5312	–0,3756
0,28	0,3669	0,5189	0,3669	0,0000	–0,3669	–0,5189	–0,3669
0,29	0,3584	0,5068	0,3584	0,0000	–0,3584	–0,5068	–0,3584
0,30	0,3501	0,4951	0,3501	0,0000	–0,3501	–0,4951	–0,3501

Você deve verificar que a função que satisfaz todas as condições no Exemplo 3 é $u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \pi x$. A amostra comparativa abaixo indica que os erros absolutos são da ordem de 10^{-2} e 10^{-3}. Diminuindo h ou k, obtemos erros menores.

Exato	Aproximação
$u(0{,}75;\ 0{,}05) = 0{,}6250$	$u_{35} = 0{,}6289$
$u(0{,}50;\ 0{,}20) = 0{,}6105$	$u_{2,20} = 0{,}6259$
$u(0{,}25;\ 0{,}10) = 0{,}5525$	$u_{35} = 0{,}5594$

Equações parabólicas - Exercícios – 1-2-3-4-5

1. Com auxílio da equação de diferenças (3), aproxime a solução do problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Tome $n = 8$ e $m = 40$.

2. Utilizando a solução em série de Fourier obtida no Problema 1, Exercícios 12.3, com $L = 2$, podemos somar os 20 primeiros termos para estimar os valores de $u(0{,}25, 0{,}1)$, $u(1, 0{,}5)$ e $u(1{,}5, 0{,}8)$ da solução de $u(x, t)$ do Problema 1 acima. Um estudante fez um programa de computador com esse objetivo e obteve os resultados $u(0{,}25, 0{,}1) = 0{,}3794$, $u(1, 0{,}5) = 0{,}1854$ e $u(1{,}5, 0{,}8) = 0{,}0623$. Suponha que esses resultados tenham a precisão dos quatro algarismos dados. Compare esses valores com as aproximações obtidas no Problema 1 acima. Determine os erros absolutos em cada caso.

3. Resolva o Problema 1 pelo método de Crank-Nicholson com $n = 8$ e $m = 40$. Utilize os valores de $u(0{,}25, 0{,}1)$, $u(1, 0{,}5)$ e $u(1{,}5, 0{,}8)$ dados no Problema 2 para calcular os erros absolutos.

4. Refaça o Problema 1 com $n = 8$ e $m = 20$. Utilize os valores de $u(0{,}25, 0{,}1)$, $u(1, 0{,}5)$ e $u(1{,}5, 0{,}8)$ dados no Problema 2 para calcular os erros absolutos. Por que motivo as aproximações são tão imprecisas nesse caso?

5. Resolva o Problema 1 pelo método de Crank-Nicholson com $n = 8$ e $m = 20$. Utilize os valores de $u(0{,}25, 0{,}1)$, $u(1, 0{,}5)$ e $u(1{,}5, 0{,}8)$ dados no Problema 2 para calcular os erros absolutos. Compare os erros absolutos com os obtidos no Problema 4.

Equações parabólicas - Exercícios – 6

erros absolutos com os obtidos no Problema 4.

6. Na Seção 12.2 mostramos que, se uma haste de comprimento L é feita de um material de condutividade térmica K, calor específico γ e densidade ρ, a temperatura $u(x, t)$ satisfaz a equação de derivadas parciais

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L.$$

Considere o problema de contorno que consiste da equação precedente e das condições

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \qquad 0 \le t \le 10$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le L.$$

Aplique a equação de diferenças (3) desta seção com $n = 10$ e $m = 10$ para aproximar a solução do problema de contorno quando:

(a) $L = 20, K = 0{,}15, \rho = 8{,}0, \gamma = 0{,}11, f(x) = 30$

(b) $L = 50, K = 0{,}15, \rho = 8{,}0, \gamma = 0{,}11, f(x) = 30$

(c) $L = 20, K = 0{,}10, \rho = 2{,}7, \gamma = 0{,}22, f(x) = 0{,}5x(20 - x)$

(d) $L = 100, K = 1{,}04, \rho = 10{,}6, \gamma = 0{,}06,$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}8x, & \\ 40 - 0{,}8(x - 50), & 50 \end{cases}$$

Equações parabólicas - Exercícios – 7-8-9-10-11

7. Resolva o Problema 6 pelo método de Crank-Nicholson com $n = 10$ e $m = 10$.

8. Refaça o Problema 6 se as temperaturas nas extremidades são $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 20$, $0 \le t \le 10$.

9. Resolva o Problema 8 pelo método de Crank-Nicholson.

10. Considere o problema de contorno do Exemplo 3. Suponha $n = 4$.

(a) Determine o novo valor de λ.

(b) Utilize a equação de diferenças de Crank-Nicholson (5) para achar o sistema de equações para u_{11}, u_{21} e u_{31}, isto é, obtenha aproximações de valores de u na primeira linha do tempo. [*Sug.:* Faça $j = 0$ em (5) e atribua a i os valores 1, 2, 3.]

(c) Resolva o sistema de três equações sem recorrer a programa de computador. Compare seus resultados com os valores correspondentes na Tabela 15.3.

11. Considere uma haste de comprimento $L = 20$, para a qual $K = 1{,}05$, $\rho = 10{,}6$ e $\gamma = 0{,}056$. Suponha

$$u(0, t) = 20, \qquad u(20, t) = 30$$
$$u(x, 0) = 50.$$

(a) Aplique o método delineado na Seção 12.6 para achar a temperatura de estado estacionário $\psi(x)$.

(b) Utilize o método de Crank-Nicholson para aproximar as temperaturas $u(x, t)$ para $0 \le t \le T_{max}$. Escolha T_{max} suficientemente grande para permitir que a temperatura tenda para valores de estado estacionário. Compare as aproximações de $t = T_{max}$ com os valores de $\psi(x)$ encontrados na parte (a).

Equações hiperbólicas

Abordaremos a seguir um método numérico para aproximar uma solução de um problema de contorno que envolve a equação unidimensional da onda.

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 0, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

A equação da onda é um exemplo de equação de derivadas parciais do tipo hiperbólico. Esse problema admite solução única se as funções f e g têm derivadas segundas contínuas no intervalo $(0, a)$ e se $f(a) = f(0) = 0$.

Substituição da Equação da Onda por uma Equação de Diferenças

Como nas duas seções precedentes, nosso objetivo aqui é substituir a equação de derivadas parciais (1) por uma equação de diferenças. Nesse caso, substituímos as duas derivadas parciais de segunda ordem pelas aproximações por diferenças centrais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right]$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{k^2}\left[u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)\right].$$

Assim, substituímos $c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ por

$$\frac{c^2}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right] = \frac{1}{k^2}\left[u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)\right]. \tag{2}$$

Fazendo $\lambda = ck/h$, (2) pode ser expressa como

$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1-\lambda^2)u_{ij} + \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \tag{3}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

(3), tal como o primeiro método considerado na Seção
utilizamos a equação de

O método numérico baseado na equação (3), tal como o primeiro método considerado na Seção 15.2, é um método explícito de diferenças finitas. Como anteriormente, utilizamos a equação de diferenças para aproximar a solução $u(x, t)$ de (1) sobre uma região retangular no plano xt, definida por $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$. Se n e m são inteiros positivos e

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{e} \quad k = \frac{T}{m},$$

as retas verticais e horizontais da malha nessa região são definidas por

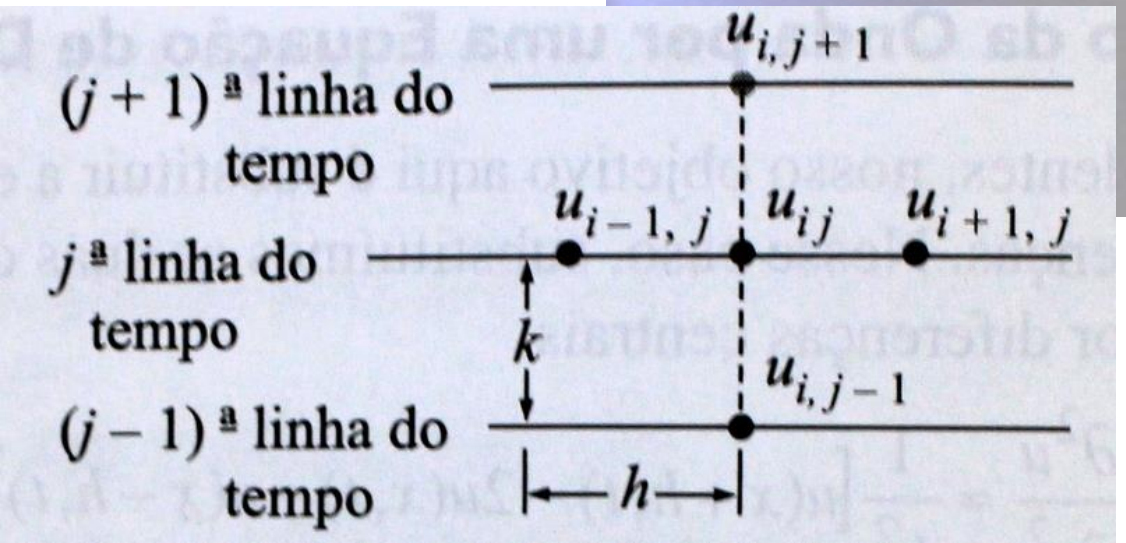
$$x_i = ih, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$t_j = jk, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Conforme mostra a Figura 15.10, (3) permite obtermos a aproximação $u_{i,j+1}$ na $(j+1)^{\text{a}}$ linha de tempo a partir dos valores indicados nas j^{a} e $(j-1)^{\text{a}}$ linhas do tempo. Além disso, aplicamos

$$u_{0,j} = u(0, jk) = 0, \quad u_{n,j} = u(a, jk) = 0 \qquad \Leftarrow \text{condições de contorno}$$

$$u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i). \qquad \Leftarrow \text{condição inicial}$$



Há um pequeno problema para começar. Pode-se ver, de (3), que, para $j = 1$, precisamos conhecer os valores de $u_{i,1}$, isto é, as estimativas de u na primeira linha do tempo, a fim de acharmos $u_{i,2}$. Mas, pela Figura 15.10, com $j = 0$, vemos que os valores de $u_{i,1}$ na primeira linha dependem dos valores de $u_{i,0}$ na linha zero do tempo e dos valores de $u_{i,-1}$. Para calcular esses últimos valores, utilizamos a condição de velocidade inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Em $t = 0$, decorre de (5) da Seção 9.8, que

$$g(x_i) = u_t(x_i,0) \approx \frac{u(x_i,k) - u(x_i,-k)}{2k}. \tag{4}$$

Para que o termo $u(x_i, -k) = u_{i,-1}$ tenha sentido, em (4) devemos imaginar $u(x, t)$ prolongada para trás no tempo. Decorrre de (4) que

$$u(x_i, -k) \approx u(x_i, k) - 2kg(x_i).$$

Esse último resultado sugere definirmos

$$u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg(x_i) \tag{5}$$

na iteração de (3). Levando (5) em (3) quando $j = 0$, obtemos o caso especial

$$u_{i,1} = \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + (1-\lambda^2)u_{i,0} + kg(x_i). \tag{6}$$

EXEMPLO 1

Aproxime a solução do problema de contorno

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

utilizando (3) com $n = 5$ e $m = 20$.

Solução Identificamos $c = 2$, $a = 1$ e $T = 1$. Com $n = 5$ e $m = 20$, obtemos $h = 1/5 = 0{,}2$, $k = 1/20 = 0{,}05$ e $\lambda = 0{,}5$. Assim, com $g(x) = 0$, as equações (6) e (3) se escrevem, respectivamente,

$$u_{i,1} = 0{,}125(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + 0{,}75u_{i,0} \qquad (7)$$

$$u_{i,j+1} = 0{,}25u_{i+1,j} + 1{,}5u_{ij} + 0{,}25u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{8}$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$, a equação (7) dá os seguintes valores para os $u_{i,1}$ na primeira linha do tempo:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0{,}125(u_{20} + u_{00}) + 0{,}75u_{10} = 0{,}55972100 \\ u_{21} &= 0{,}125(u_{30} + u_{10}) + 0{,}75u_{20} = 0{,}90564761 \\ u_{31} &= 0{,}125(u_{40} + u_{20}) + 0{,}75u_{30} = 0{,}90564761 \\ u_{41} &= 0{,}125(u_{50} + u_{30}) + 0{,}75u_{40} = 0{,}55972100. \end{aligned} \tag{9}$$

Note que os resultados dados em (9) foram obtidos a partir da condição inicial $u(x, 0) = \text{sen } \pi x$. Por exemplo, $u_{20} = \text{sen}(0{,}2\pi)$ etc. Mas $j = 1$ em (8) dá

$$u_{i,2} = 0{,}25u_{i+1,1} + 1{,}5u_{i,1} + 0{,}25u_{i-1,1} - u_{i,0}$$

e assim, para $i = 1, 2, 3, 4$, temos

$$\begin{aligned} u_{12} &= 0{,}25u_{21} + 1{,}5u_{11} + 0{,}25u_{01} - u_{10} \\ u_{22} &= 0{,}25u_{31} + 1{,}5u_{21} + 0{,}25u_{11} - u_{20} \\ u_{32} &= 0{,}25u_{41} + 1{,}5u_{31} + 0{,}25u_{21} - u_{30} \\ u_{42} &= 0{,}25u_{51} + 1{,}5u_{41} + 0{,}25u_{31} - u_{40}. \end{aligned}$$

(9), decorrem dessas

Com as condições de contorno, as condições iniciais e os dados obtidos em (9), decorrem dessas equações as aproximações para u na segunda linha do tempo. A Tabela 15.4 resume esses resultados e os cálculos restantes.

TABELA 15.4 Aproximação explícita por uma equação de diferenças com $h = 0{,}2$, $k = 0{,}05$, $\lambda = 0{,}5$

Tempo	$x = 0{,}20$	$x = 0{,}40$	$x = 0{,}60$	$x = 0{,}80$
0,00	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878
0,05	0,5597	0,9056	0,9056	0,5597
0,10	0,4782	0,7738	0,7738	0,4782
0,15	0,3510	0,5680	0,5680	0,3510
0,20	0,1903	0,3080	0,3080	0,1903
0,25	0,0115	0,0185	0,0185	0,0115
0,30	–0,1685	–0,2727	–0,2727	–0,1685
0,35	–0,3324	–0,5378	–0,5378	–0,3324
0,40	–0,4645	–0,7516	–0,7516	–0,4645
0,45	–0,5523	–0,8936	–0,8936	–0,5523
0,50	–0,5873	–0,9503	–0,9503	–0,5873
0,55	–0,5663	–0,9163	–0,9163	–0,5663
0,60	–0,4912	–0,7947	–0,7947	–0,4912
0,65	–0,3691	–0,5973	–0,5973	–0,3691
0,70	–0,2119	–0,3428	–0,3428	–0,2119
0,75	–0,0344	–0,0556	–0,0556	–0,0344
0,80	0,1464	0,2369	0,2369	0,1464

TABELA 15.4 *Continuação*

Tempo	$x = 0{,}20$	$x = 0{,}40$	$x = 0{,}60$	$x = 0{,}80$
0,85	0,3132	0,5068	0,5068	0,3132
0,90	0,4501	0,7283	0,7283	0,4501
0,95	0,5440	0,8803	0,8803	0,5440
1,00	0,5860	0,9482	0,9482	0,5860

Vê-se logo que a solução exata do Problema no Exemplo 1 é $u(x, t) = \text{sen } \pi x \cos 2\pi t$. Com essa função, podemos comparar os resultados exatos com as aproximações dadas na Tabela 15.4. Dão-se a seguir alguns valores a título de exemplo:

Exato	Aproximação
$u(0{,}4, 0{,}25) = 0$	$u_{25} = 0{,}0185$
$u(0{,}6, 0{,}3) = -0{,}2939$	$u_{36} = -0{,}2727$
$u(0{,}2, 0{,}5) = -0{,}5878$	$u_{1,10} = -0{,}5873$
$u(0{,}8, 0{,}7) = -0{,}1816$	$u_{4,14} = -0{,}2119$

Vê-se que as aproximações estão próximas dos valores exatos, mas a precisão não é tão impressionante. Não obstante, podemos obter resultados mais exatos. A precisão desse algoritmo varia com a escolha de λ. Naturalmente, λ fica determinado pela escolha dos inteiros n e m, que, por seu turno, determinam os tamanhos dos passos h e k. Pode-se provar que se obtém a melhor precisão com esse método quando a razão $\lambda = kc/h$ é igual a um ou, em outras palavras, quando o passo na direção do tempo é $k = h/c$. Por exemplo, a escolha $n = 8$ e $m = 16$ dá $h = 1/8$, $k = 1/16$ e $\lambda = 1$. Os valores relacionados aqui mostram claramente a melhoria da precisão.

Exato	Aproximação
$u(0{,}25,\ 0{,}3125) = -0{,}2706$	$u_{25} = -0{,}2706$
$u(0{,}375,\ 0{,}375) = -0{,}6533$	$u_{36} = -0{,}6533$
$u(0{,}125,\ 0{,}625) = -0{,}2706$	$u_{1,10} = -0{,}2706$

Concluindo, notemos que esse método explícito de diferenças finitas para a equação da onda é estável quando $\lambda \leq 1$ e instável quando $\lambda > 1$.

Observação Vale a pena considerar, por alguns momentos, as fontes de erro nos métodos de diferenças finitas abordados nas últimas seções. O erro na solução numérica (isto é, nas aproximações) provém de duas fontes:

(i) substituição da equação de derivadas parciais por uma equação de diferenças; e

(ii) erro de arredondamento na aritmética do computador.

O erro nos valores da solução u decorrente da aproximação da equação de derivadas parciais por uma equação de diferenças é um exemplo de **erro de discretização**. Se $u(x_i, t_j)$ denota o valor exato da solução no ij^{mo} ponto da malha, e u_{ij} é a estimativa numérica decorrente de um método de diferenças finitas, então o erro total no ij^{mo} ponto é

$$u(x_i, t_j) - u_{ij} = \textit{erro de discretização} + \textit{erro de arredondamento.}$$

Poderíamos esperar que as estimativas numéricas melhorassem à medida que h e k diminuem. Acontece, entretanto, que o benefício decorrente de uma redução do tamanho do passo é anulado pelo aumento no erro de arredondamento resultante do aumento da aritmética computacional exigida. É possível estabelecer limites teóricos do erro de discretização para alguns métodos de diferenças. Tais limites podem eventualmente ser usados para provar que o erro de discretização não diminui quando h e k são reduzidos. Infelizmente, na prática, tais limites em geral não são úteis para estimar efetivamente o erro total na solução numérica. Essa análise do método de diferenças apresentado nesta seção revela que, se $\lambda = 1$, então os únicos erros envolvidos são erros de arredondamento na aritmética do computador. Isto explica por que a precisão no Exemplo 1 pode ser aumentada tomando-se $\lambda = 1$.

O erro de arredondamento é difícil de analisar e não se pode, na prática, tentar estimar efetivamente a magnitude de tal erro. Conseqüentemente, *devemos nos precupar* com a taxa de crescimento do erro de arredondamento à medida que os cálculos prosseguem.

Equações hiperbólicas - Exercícios – 1-2

1. Aplique a equação de diferenças (3) para aproximar a solução do problema de contorno

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<a,\ 0<t<T$$

$$u(0,t)=0,\quad u(a,t)=0,\quad 0\le t\le T$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad 0\le x\le a,$$

quando:

(a) $c=1, a=1, T=1, f(x)=x(1-x);\ n=4$ e $m=10$

(b) $c=1, a=2, T=1, f(x)=e^{-16(x-1)^2};\ n=5$ e $m=10$

(c) $c=\sqrt{2}, a=1, T=1, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5<x\le 1\end{cases};\ n=10$ e $m=25$

2. Dado o problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t<0{,}5$$

$$u(0,t)=0,\qquad u(1,t)=0,\quad 0\le t\le 0{,}5$$

$$u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad 0\le x\le 1.$$

(a) Aplique os métodos do Capítulo 12 para verificar que a solução do problema é $u(x, t) = \operatorname{sen}\pi x \cos \pi$.

(b) Aplique o método desta seção para aproximar a solução do problema sem recorrer a um programa de computador. Tome $n = 4$ e $m = 5$.

(c) Calcule o erro absoluto em cada ponto interior da malha.

Equações hiperbólicas - Exercícios – 3-4

3. Obtenha uma aproximação da solução do problema de contorno (Problema 2) utilizando um programa de computador com **(a)** $n = 5$, $m = 10$ e **(b)** $n = 5$, $m = 20$.

4. Dado o problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < 1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ 0 \le x \le 1.$$

Tome $h = k = 1/5$ na equação (6) para calcular manualmente os valores de $u_{i,1}$.

Equações hiperbólicas - Exercícios – 5-6

5. Na Seção 12.2 mostramos que a equação de uma corda vibrante é

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

onde T é o módulo constante da tensão na corda e ρ é sua massa por unidade de comprimento. Suponha uma corda de 60 cm de comprimento fixa ao eixo x e liberada, a partir do repouso, da posição de deslocamento inicial

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01x, & 0 \le x \le 30 \\ 0{,}30 - \dfrac{x-30}{100}, & 30 < x \le 60. \end{cases}$$

Aplique a equação de diferenças (3) desta seção para aproximar a solução do problema de contorno quando $h = 10$, $k = 5\sqrt{\rho/T}$ e $\rho = 0{,}0225$ g/cm, $T = 1{,}4 \times 10^7$ dinas. Faça $m = 50$.

6. Refaça o problema 5 com

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}2x, & 0 \le x \le 15 \\ 0{,}30 - \dfrac{x-15}{150}, & 15 < x \le 60, \end{cases}$$

e $h = 10$, $k = 2{,}5\sqrt{\rho/T}$. Faça $m = 50$.