

LOM3227 - 2º semestre de 2016
Métodos Computacionais da Física
Tema 3.

Problemas de contorno de dois pontos.
Método de diferenças finitas para equações
diferenciais ordinárias de ordem superior.

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref. 1) Ruggiero, M.A.G., Lopes, V.L.R., “Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais”, McGraw-Hill / MAKRON Books do Brasil Ltda., 1988

Ref. 2) Zill, D.G., Cullen, “Equações Diferenciais, Vol.2”, MAKRON Books, 2001

Problemas de contorno de dois pontos

A forma mais geral dos problemas de contorno aos quais nos referiremos é:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ a_1 y(a) + b_1 y'(a) = \gamma_1 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

onde $a_1, a_2, b_1, b_2, \gamma_1$ e γ_2 são constantes reais conhecidas, tais que nem a_1 e b_1 , nem a_2 e b_2 sejam nulas ao mesmo tempo.

Se $f(x, y, y') = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ o problema acima é dito problema homogêneo e é óbvio que $y(x) = 0$ é solução, neste caso.

Para as aproximações desta seção, precisamos do conceito a seguir:

Definição: Dizemos que $g(h)$ é $O(h^p)$, se existe uma constante $C > 0$ tal que $|g(h)| \leq C |h^p|$.

A idéia básica do método das diferenças finitas é transformar o problema de resolver uma equação diferencial num problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isto aproximações das derivadas que aparecem na equação, por diferenças finitas.

Faremos $x_0 = a$, $x_n = b$ e dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de comprimento $h = \frac{b - a}{n}$, cada.

Assim,

$$x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, \dots, (n - 1) \text{ e } y_k \approx y(x_k) = y(x_0 + kh), k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

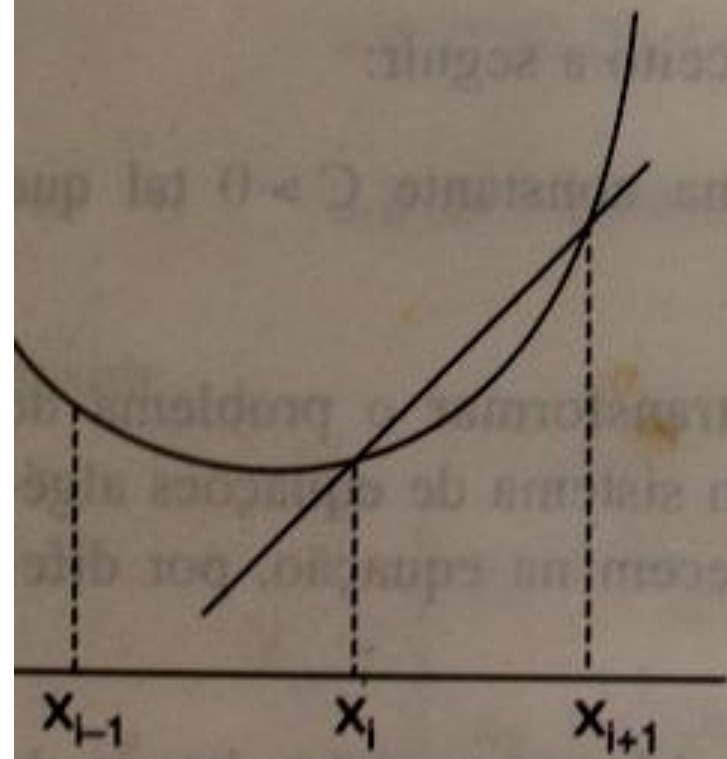
Se $f(x, y, y')$ for linear (em y e y') o sistema a ser resolvido será linear e poderemos utilizar os métodos do Capítulo 3 para resolvê-lo. Se $f(x, y, y')$ for não linear, teremos um sistema não linear de equações algébricas e, para resolvê-lo, podemos utilizar os métodos vistos no Capítulo 4.

As aproximações mais usadas para a primeira derivada no ponto x_i são:

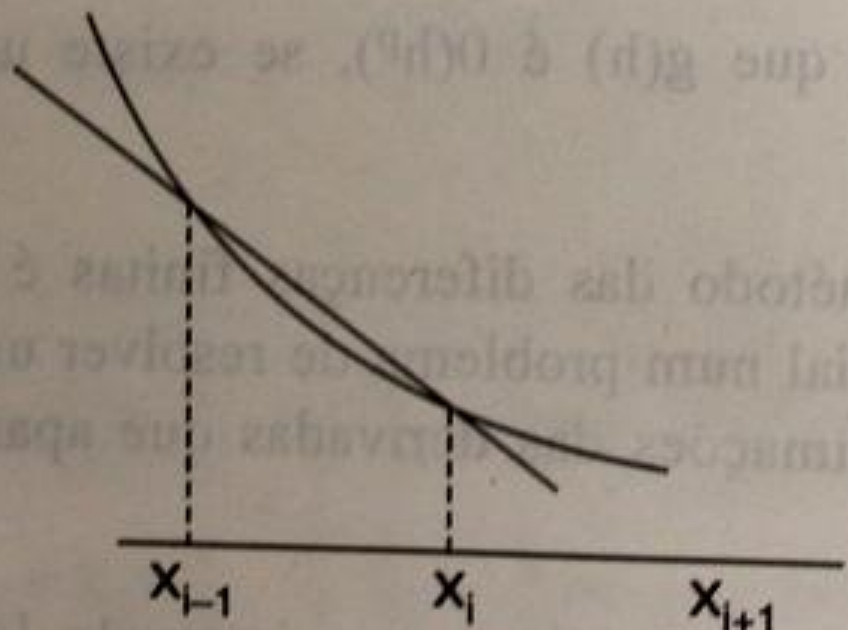
$$a) \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \text{= diferença avançada}$$

$$b) \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad \text{= diferença atrasada}$$

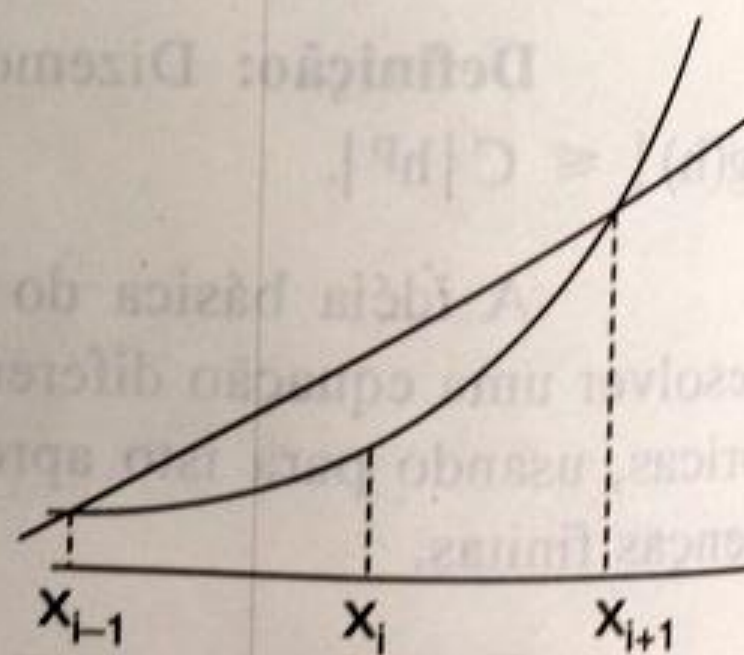
$$c) \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad \text{= diferença centrada}$$



(a)



(b)



(c)

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + \frac{h^2}{12} \left[y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1}) \right]$$

donde $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ e esta aproximação é $O(h^2)$, supondo $y'''(x)$ limitada em $[a, b]$.

De maneira análoga se prova que a fórmula (b) é $O(h)$, o que é deixado como exercício.

Desta análise concluimos que o erro na fórmula centrada é da ordem de h^2 e, como $h < 1$, esta fórmula é mais precisa que as outras duas. Por esta razão ela é mais empregada.

Utilizando novamente a série de Taylor, deduziremos a aproximação mais típica para a derivada segunda, bem como a expressão do erro para ela. Para tal, usaremos (1) com $k = 3$ nos pontos x_{i+1} e x_{i-1} , respectivamente:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(iv)}(\xi_{i+1}) \quad (4)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(iv)}(\xi_{i-1}) \quad (5)$$

E, agora, (4) + (5) nos fornece:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{h^4}{24} \left[y^{(iv)}(\xi_{i+1}) + y^{(iv)}(\xi_{i-1}) \right]$$

Assim temos a expressão (d), ou seja, $y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ com erro da ordem de h^2 ,

se $y^{(iv)}(x)$ for limitada em $[a, b]$.

Exemplo 8 (PVC linear)

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Fixado n , o espaçamento h será $\frac{1}{n}$ e o intervalo $[a, b]$ será dividido em $x_0 = 0$, $x_1 = h$, ..., $x_j = jh$, ..., $x_{n-1} = (n-1)h$ e $x_n = 1$. Como conhecemos $y(0) = y(x_0)$ e $y(n) = y(x_n)$, teremos como incógnitas $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ e assim, para cada $i = 1, \dots, (n-1)$ usaremos as aproximações:

$$y''(x_i) \approx (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 \quad \left| \quad y'(x_i) \approx (y_{i+1} - y_{i-1})/2h, \right.$$

pois ambas são aproximações de $O(h^2)$.

Para cada i , a equação discretizada fica:

$$\left\{ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} + y_i = x_i \right\}, \text{ ou seja:}$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + hy_{i+1} - hy_{i-1} + h^2y_i = h^2x_i$$

$$(1 - h)y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + (1 + h)y_{i+1} = h^2x_i$$

Agora, para $i = 1$, usando a condição inicial $x_0 = 0$ e $y(x_0) = 0$, a primeira equação é:

$$(h^2 - 2)y_1 + (1 + h)y_2 = h^3.$$

Analogamente para $i = n - 1$, a última equação é:

$$(1 - h)y_{n-2} + (h^2 - 2)y_{n-1} = (n - 1)h^3 + (h + 1).$$

Assim, para determinar $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, teremos de resolver o sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{cases} (h^2 - 2)y_1 + (1 + h)y_2 & = h^3 \\ (1 - h)y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + (1 + h)y_{i+1} & = ih^3, \quad 2 \leq i \leq (n - 2) \\ (1 - h)y_{n-2} + (h^2 - 2)y_{n-1} & = (n - 1)h^3 + h + 1 \end{cases} \quad (6)$$

que é um sistema de ordem $(n - 1)$ com matriz A tridiagonal, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & & \\ & a_3 & d_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-2} & d_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & d_{n-1} \end{bmatrix}$$

onde

$$d_i = (h^2 - 2), \quad 1 \leq i \leq (n - 1)$$

$$c_i = (1 + h), \quad 1 \leq i \leq (n - 2)$$

$$a_i = (1 - h), \quad 2 \leq i \leq (n - 1).$$

$h = 0.05$

x	y	sol.	erro
0.0500	-0.1428	-0.1427	0.0001
0.1000	-0.2715	-0.2713	0.0002
0.1500	-0.3870	-0.3868	0.0002
0.2000	-0.4903	-0.4900	0.0003
0.2500	-0.5821	-0.5818	0.0003
0.3000	-0.6632	-0.6629	0.0003
0.3500	-0.7342	-0.7339	0.0003
0.4000	-0.7959	-0.7956	0.0003
0.4500	-0.8489	-0.8486	0.0003
0.5000	-0.8938	-0.8935	0.0003
0.5500	-0.9310	-0.9307	0.0003
0.6000	-0.9612	-0.9610	0.0003
0.6500	-0.9848	-0.9846	0.0002
0.7000	-1.0023	-1.0020	0.0002
0.7500	-1.0140	-1.0138	0.0002
0.8000	-1.0204	-1.0203	0.0001
0.8500	-1.0219	-1.0218	0.0001
0.9000	-1.0188	-1.0187	0.0001
0.9500	-1.0114	-1.0113	0.0000

$h = 0.1$

x	y	sol.	erro
0.1000	-0.2720	-0.2713	0.0007
0.2000	-0.4911	-0.4900	0.0011
0.3000	-0.6641	-0.6629	0.0013
0.4000	-0.7969	-0.7956	0.0013
0.5000	-0.8947	-0.8935	0.0012
0.6000	-0.9620	-0.9610	0.0010
0.7000	-1.0029	-1.0020	0.0008
0.8000	-1.0208	-1.0203	0.0006
0.9000	-1.0190	-1.0187	0.0003

Exemplo 9 (PVC não-linear)

$$\begin{cases} y'' = y \operatorname{sen} y + xy \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Neste exemplo, as incógnitas são: $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ e usaremos

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \text{ para } 1 \leq i \leq (n-1).$$

Assim, para cada i a equação discretizada fica:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i \operatorname{sen}(y_i) + x_i y_i \text{ e, usando o fato que } x_i = ih, \text{ teremos:}$$

$$y_{i-1} - y_i [2 + h^2 (\operatorname{sen}(y_i) + ih)] + y_{i+1} = 0.$$

O sistema $(n - 1) \times (n - 1)$ de equações não-lineares a ser resolvido será:

$$\begin{cases} 1 - y_1[2 + h^2(\text{sen}(y_1) + h)] + y_2 = 0 \\ y_{i-1} + y_i[2 + h^2(\text{sen}(y_i) + ih)] + y_{i+1} = 0, & 2 \leq i \leq (n - 2) \\ y_{n-2} - y_{n-1}[2 + h^2(\text{sen}(y_{n-1}) + (n - 1)h)] + 5 = 0 \end{cases}$$

Os resultados obtidos para $h = 0.1$ e $h = 0.05$ estão na Tabela 8.2 a seguir:

Para $h = 0.1$

$y_{(i)}$	Resultado
y_1	1.3186
y_2	1.6513
y_3	2.0037
y_4	2.3803
y_5	2.7829
y_6	3.2091
y_7	3.6525
y_8	4.1035
y_9	4.5538

Para $h = 0.05$

$y_{(i)}$	Resultado
y_1	1.1581
y_2	1.3190
y_3	1.4834
y_4	1.6521
y_5	1.8257
y_6	2.0049
y_7	2.1901
y_8	2.3817
y_9	2.5798
y_{10}	2.7842
y_{11}	2.9945
y_{12}	3.2101
y_{13}	3.4299
y_{14}	3.6528
y_{15}	3.8777
y_{16}	4.1034
y_{17}	4.3288
y_{18}	4.5534
y_{19}	4.7770

As condições de contorno poderiam ter sido dadas de forma diferente da que fizemos nos Exemplos 8 e 9. No Exemplo 8, se em vez de $y(0) = 0$ tivéssemos $y(0) + y'(0) + 3 = e$, então teríamos como incógnitas $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, n incógnitas, portanto.

Uma idéia para resolver este problema é usar a aproximação por diferença avançada para $y'(x_0)$, ou seja, $y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$ e assim a condição inicial dada fica

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} + 3 = e, \text{ donde}$$

$$(h - 1)y_0 + y_1 = h(e - 3) \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{h(e - 3) - y_1}{h - 1}.$$

Substituindo este valor na primeira equação, continuamos com o sistema $(n - 1) \times (n - 1)$ anterior, só que com a seguinte equação como primeira equação:

$$(h^2 - 1)y_1 + (1 + h)y_2 = h(e - 3) + h^3.$$

(7)

Neste caso fizemos uma opção por uma fórmula que é $O(h)$ para aproximar $y'(x_0)$, o que faz com que a precisão da solução seja também $O(h)$.

Podemos obter uma aproximação da ordem de h^2 , se usarmos diferença centrada também em $y'(x_0)$, o que exige que incluamos mais um ponto (x_{-1}, y_{-1}) na nossa tabela. Com isto $y(0) + y'(0) + 3 = e$ nos fornece a condição para determinar as n incógnitas:

$$y_0, y_1, \dots, y_{n-1}: y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + 3 = e, \text{ donde} \quad (7)$$
$$y_{-1} = 2hy_0 + y_1 - 2h(e - 3).$$

Assim, usando $i = 0$ como ponto de discretização para o problema do Exemplo 8, teremos a equação adicional:

$$(1 - h)y_{-1} + (h^2 - 2)y_0 + (1 + h)y_1 = h^2x_{-1} = -h^3 \text{ donde, por (7),}$$

$$(1 - h)[2hy_0 + y_1 - 2h(e - 3)] + (h^2 - 2)y_0 + (1 + h)y_1 = -h^3, \text{ ou seja:}$$

$$(-h^2 + 2h - 2)y_0 + 2y_1 = 2h(1 - h)(e - 3) - h^3.$$

Então o sistema de equações lineares a ser resolvido é o sistema $n \times n$:

$$\begin{cases} (-h^2 + 2h - 1)y_0 + y_1 = 2h(1 - h)(e - 3) - h^3 \\ (1 - h)y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + (1 + h)y_{i+1} = ih^3, & 1 \leq i \leq (n - 2) \\ (1 - h)y_{n-2} + (h^2 - 2)y_{n-1} = (n - 1)h^3 + h + 1 \end{cases}$$