

LOM3227 - 2º semestre de 2016
Métodos Computacionais da Física

Tema 2.

P.V.I. para equações de ordem superior
Sistemas de equações dif. de 1ª ordem

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Referências:

Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes,
“Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais”,
McGraw-Hill / MAKRON Books do Brasil Ltda., 1988

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, “Equações Diferenciais”,
MAKRON Books do Brasil Ltda., 3ª edição, 2001 – v.2, cap.15

Problemas de Valor Inicial

Se, dada uma equação de ordem m , a função, assim como suas derivadas até ordem $m - 1$, são especificadas em um mesmo ponto, então temos um *problema de valor inicial*, PVI, como são os casos:

$$a) \begin{cases} y'(x) = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

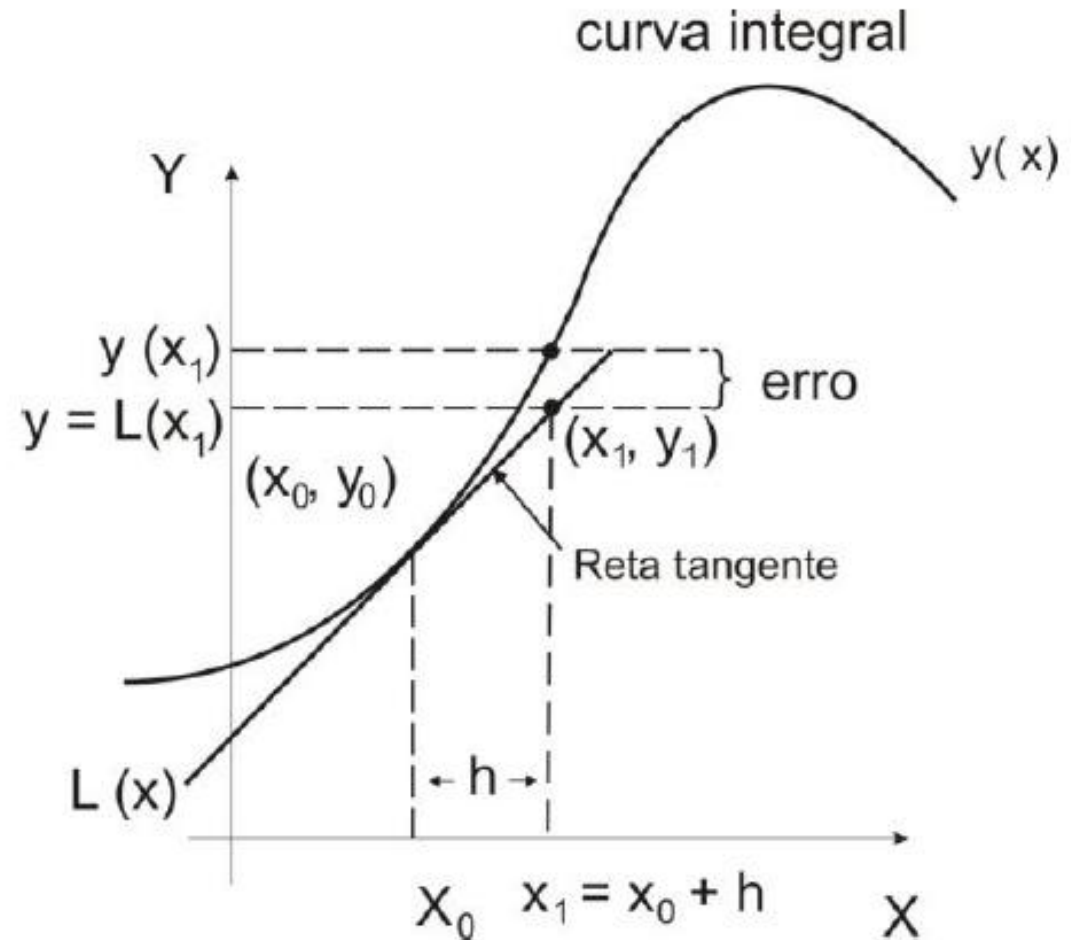
$$b) \begin{cases} y''' + (x + 1)y'' + \cos xy' - (x^2 - 1)y = x^2 + y^2 \sin(x + y) \\ y(0) = 1.1, \quad y'(0) = 2.2, \quad y''(0) = 3.3 \end{cases}$$

PVI para equações de 1-a ordem, revisão

- Métodos de passo simples
- Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Onde $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$



PVI para equações de 1-a ordem, revisão

- Métodos de Runge-Kutta (Euler – 1-a ordem...)
- Erro e convergência
- Exemplo de método de 4-a ordem:

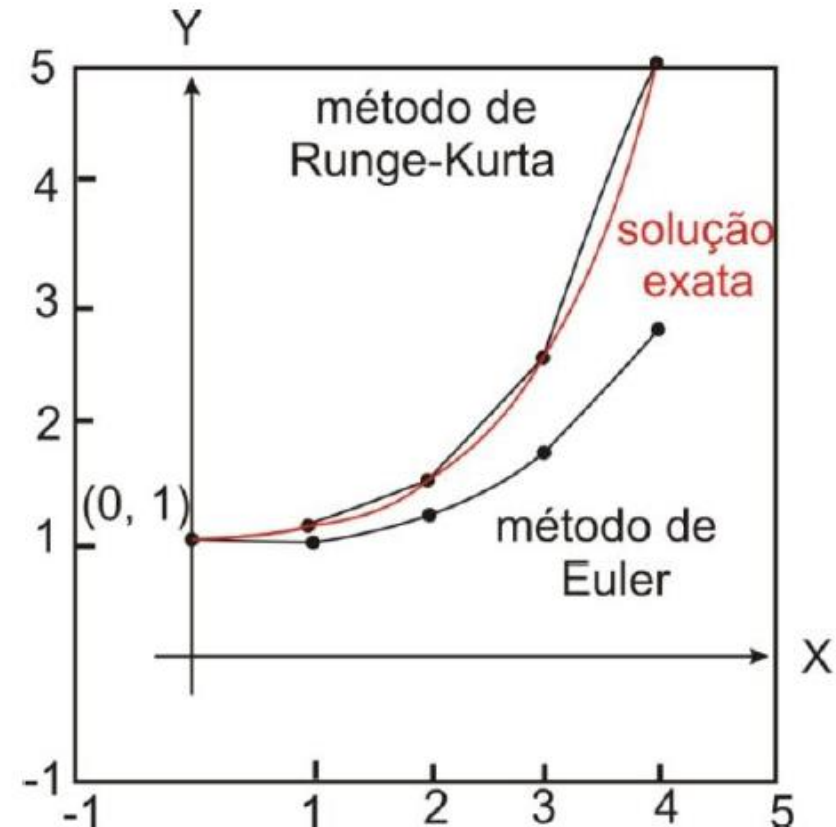
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$



PVI para equações de 1-a ordem: métodos de passo múltiplo

- Interpolação polinomial -> Integração de polinômios

- Métodos explícitos (Adams-Bashforth):

Ordem	Fórmula	Erro
2	$y_{i+1} = y_i + h(3f_i - f_{i-1})/2$	$5h^3f''(\xi)/12$
3	$y_{i+1} = y_i + h(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})/12$	$9h^4f^{(3)}(\xi)/24$
4	$y_{i+1} = y_i + h(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})/24$	$251h^5f^{(4)}(\xi)/720$
5	$y_{i+1} = y_i + h(1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4})/720$	$475h^6f^{(5)}(\xi)/1440$

PVI para equações de 1-a ordem: métodos de passo múltiplo

- Interpolação polinomial -> Integração de polinômios

- **Métodos implícitos (Adams-Moulton):**

Ordem	Fórmula	Erro
2	$y_{i+1} = y_i + h(f_{i+1} + f_i)/2$	$-h^3 f''(\xi)/12$
3	$y_{i+1} = y_i + h(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})/12$	$-h^4 f^{(3)}(\xi)/24$
4	$y_{i+1} = y_i + h(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})/24$	$-19h^5 f^{(4)}(\xi)/720$
5	$y_{i+1} = y_i + h(251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3})/720$	$-27h^6 f^{(5)}(\xi)/1440$

Se, por exemplo, escolhermos $m = 3$, a função $f(x, y(x))$ será aproximada pelo polinômio $p_3(x)$ que a interpola nos pontos $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-3}, y_{n-3})$, chamando $f_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j}), j = 0, 1, 2, 3$, teremos:

$$f(x, y(x)) \approx y'(x) \approx p_3(x) = L_{-3}(x)f_{n-3} + L_{-2}(x)f_{n-2} + L_{-1}(x)f_{n-1} + L_0(x)f_n$$

onde, para $x_{j+1} - x_j = h$:

$$L_{-3}(x) = [(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)]/(-h)(-2h)(-3h) =$$

$$= \frac{-1}{6h^3} [(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)]$$

$$L_{-2}(x) = [(x-x_{n-3})(x-x_{n-1})(x-x_n)]/(h)(-h)(-2h) =$$

$$= \frac{1}{2h^3} [(x-x_{n-3})(x-x_{n-1})(x-x_n)]$$

$$L_{-1}(x) = [(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_n)]/(2h)(h)(-h) =$$

$$= \frac{-1}{2h^3} [(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_n)]$$

$$L_0(x) = [(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})]/(3h)(2h)(h)$$

$$= \frac{1}{6h^3} [(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})]$$

Fazendo a mudança de variáveis $\frac{x-x_n}{h} = s$, temos $dx = hds$ e $x = hs + x_n$. Então,

$x - x_{n-3} = (s+3)h; x - x_{n-2} = (s+2)h; x - x_{n-1} = (s+1)h; x - x_n = sh$ donde teremos:

$$L_{-3}(s) = \frac{-1}{6} (s+2)(s+1)s = \frac{-1}{6} (s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$L_{-2}(s) = \frac{1}{2} (s+3)(s+1)s = \frac{1}{2} (s^3 + 4s^2 + 3s)$$

$$L_{-1}(s) = \frac{-1}{2} (s+3)(s+2)s = \frac{-1}{2} (s^3 + 5s^2 + 6s)$$

$$L_0(s) = \frac{1}{6} (s+3)(s+2)(s+1) = \frac{1}{6} (s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$$

Assim,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3(x) dx = \frac{-h}{6} f_{n-3} \int_0^1 (s^3 + 3s^2 + 2s) ds +$$

$$+ \frac{h}{2} f_{n-2} \int_0^1 (s^3 + 4s^2 + 3s) ds - \frac{h}{2} f_{n-1} \int_0^1 (s^3 + 5s^2 + 6s) ds +$$

$$+ \frac{h}{6} f_n \int_0^1 (s^3 + 6s^2 + 11s + 6) ds$$

$$= -\frac{h}{6} f_{n-3} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1\right) + \frac{h}{2} f_{n-2} \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \frac{h}{2} f_{n-1} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} + 3\right) + \frac{h}{6} f_n \left(\frac{1}{4} + 2 + \frac{11}{2} + 6\right)$$

$$= -\frac{9h}{24} f_{n-3} + \frac{37h}{24} f_{n-2} - \frac{59h}{24} f_{n-1} + \frac{55h}{24} f_n.$$

Assim, o método de passo múltiplo por nós escolhido,

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \text{ é}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]$$

(1)

PVI para equações de 1-a ordem

- Métodos de passo múltiplo:
- implícitos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$$

b) *Métodos implícitos*: os métodos implícitos, da classe de métodos de passo múltiplo, são obtidos quando trabalhamos com $x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-m}$.

O método análogo ao que vimos no item (a) é quando trabalhamos com quatro pontos; portanto, $m = 3$ e vamos usar $(x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_{n-2}, y_{n-2})$ na mesma forma como fizemos anteriormente:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3(x) dx = \\ &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [L_{-2}(x)f_{n-2} + L_{-1}(x)f_{n-1} + L_0(x)f_n + L_1(x)f_{n+1}] dx \end{aligned}$$

onde

$$L_{-2}(x) = (x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1}) / (-3h)(-2h)(-h) = -\frac{1}{6h^3} (x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1})$$

$$L_{-1}(x) = (x - x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n+1}) / h(-h)(-2h) = \frac{1}{2h^3} (x - x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n+1})$$

$$L_0(x) = (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_{n+1}) / (2h)h(-h) = -\frac{1}{2h^3} (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})$$

$$L_1(x) = (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n) / (3h)(2h)(h) = \frac{1}{6h^3} (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Fazendo a mudança $\frac{x - x_n}{h} = s$, obtemos, de maneira análoga,

$$L_{-2}(s) = -\frac{1}{6} (s^3 - s)$$

$$L_{-1}(s) = \frac{1}{2} (s^3 + s^2 - 2s)$$

$$L_0(s) = -\frac{1}{2} (s^3 + 2s^2 - s - 2)$$

PVI para equações de 1-a ordem: métodos de previsão-correção:

A fórmula implícita que deduzimos é

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \text{ e, a menos que } f(x, y) \text{ seja uma função}$$

linear, em geral não seremos capazes de resolver a expressão acima para y_{n+1} .

O que fazemos então é tentar obter y_{n+1} da seguinte forma iterativa:

i) por meio de um método explícito (corretamente escolhido) encontramos uma primeira aproximação $y_{n+1}^{(0)}$ para y_{n+1} ;

ii) calculamos então, para f_{n+1} , o valor $f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$;

iii) com o valor de f_{n+1} obtido em (ii) encontramos uma próxima aproximação para y_{n+1} , $y_{n+1}^{(1)}$, usando agora o método implícito que escolhemos;

iv) voltamos para (ii), onde agora calculamos, para f_{n+1} , $f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)})$ e assim vamos repetindo o processo até que duas aproximações sucessivas sejam tais que

$$|y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}| / |y_{n+1}^{(k)}| < \epsilon \text{ onde } \epsilon \text{ é a precisão desejada.}$$

PVI para equações de 1-a ordem: métodos de previsão-correção:

para $n = 3, 4, 5, \dots, N$, faça:

a) calcule $y_{n+1}^{(0)}$, por

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3});$$

b) calcule $f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$;

c) para $k = 1, 2, \dots$, calcule

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24} [9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}].$$

d) Continue as iterações até atingir um número máximo de iterações ou até que

$$|y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}| / |y_{n+1}^{(k)}| < \varepsilon.$$

É comum encontrarmos equações diferenciais de ordem m escritas na forma:

$$u^{(m)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}), \text{ como por exemplo:}$$

$$y''' = f(x, y, y', y'') = x^2 + y^2 \sin(x + y) - (x + 1)y'' - \cos(xy') + (x^2 - 1)y.$$

É fácil transformar uma equação de ordem m deste tipo num sistema de m equações de ordem 1, assim:

$$\begin{cases} z_1 = u \\ z_1' = u' = z_2 \\ z_2' = u'' = z_3 \\ z_3' = u''' = z_4 \\ \vdots \\ z_{m-1}' = u^{(m-1)} = z_m \\ z_m' = u^{(m)} = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)}) \end{cases}$$

No exemplo anterior, fazemos

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = w (= y'') \\ w' = f(x, y, y', y''). \end{cases} \text{ Para esta equação já vimos que:}$$

$$y(0) = 1.1, \quad y'(0) = z(0) = 2.2, \quad y''(0) = w(0) = 3.3. \quad (p. 319)$$

Equações de ordem m , deste tipo, podem pois ser vistas como uma equação vetorial de ordem 1. No exemplo anterior, chamando:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \text{ a equação transformada é: } \dot{Y} = \begin{pmatrix} z \\ w \\ f(x, y, y', y'') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \\ f(x, y, z, w) \end{pmatrix}$$

$$\text{com } Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \\ 3.3 \end{pmatrix}, \text{ ou seja, temos de resolver a equação vetorial:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} z \\ w \\ x^2 + y^2 \sin(x + y) - (x + 1)w - \cos(xz) + (x^2 - 1)y \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \\ 3.3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Vamos aplicar o método de Euler Aperfeiçoado, visto na Seção 8.2.1, para uma equação diferencial de 2ª ordem, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \end{array} \right.$$

Chamando

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n, z_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + k_1), \end{cases} \quad Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_n + hz_n + \frac{h}{2} k_1 \\ z_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \end{pmatrix}.$$

Assim, dado o PVI:

$$\begin{cases} y'' = 4y' - 3y - x \\ y(0) = 4/9 \\ y'(0) = 7/3 \end{cases}$$

e, tomando $h = 0.25$, teremos:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) = 4z - 3y - x \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, F(x, Y) = \begin{pmatrix} z \\ 4z - 3y - x \end{pmatrix} \text{ e } Y_0 = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

O método de Euler Aperfeiçoado aplicado a este PVI fornecerá para $y_1 \approx y(0.25)$:

$$k_1 = hf(x_0, y_0, z_0) = h(4z_0 - 3y_0 - x_0) = 0.25(4 \times \frac{7}{3} - 3 \times \frac{4}{3} - 0)$$

$$= 0.25 \times \frac{24}{3} = 0.25 \times 8 = 2.0$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + hz_0, z_0 + k_1) = hf(0.25, \frac{4}{9} + 0.25 \times \frac{7}{3}, \frac{7}{3} + 2)$$

$$= 0.25f(0.25, 1.028, 4.333) = 0.25(4 \times 4.333 - 3 \times 1.028 - 0.25)$$

$$= 0.25 \times 13.998 = 3.4995.$$

Assim:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_0 + h z_0 + \frac{h}{2} k_1 \\ z_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + 0.25 \times \frac{7}{3} + \frac{0.25}{2} \times 2 \\ \frac{7}{3} + \frac{1}{2} (2 + 3.4995) \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1.278 \\ 5.083 \end{pmatrix}.$$

O Problema de Valor Inicial de Segunda Ordem

Os processos numéricos que foram estudados neste capítulo aplicam-se apenas a uma equação de primeira ordem $dy/dx = f(x, y)$ sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$. Para aproximar a solução de um problema de valor inicial de segunda ordem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (1)$$

reduzimos a equação diferencial de segunda ordem a um sistema de primeira ordem. (Veja Seção 8.3.) Fazendo $y' = u$, a equação (1) se torna

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(x, y, u) \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicamos em seguida um método particular a cada equação do sistema resultante. Por exemplo, o **método básico de Euler** para o sistema (2) seria

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h u_n \\ u_{n+1} &= u_n + h f(x_n, y_n, u_n) \end{aligned} \quad (3)$$

EXEMPLO 1

Utilizando o método de Euler, obtenha o valor aproximado de $y(0,2)$, se $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Solução Em termos da substituição $y' = u$, a equação é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= -xu - y. \end{aligned}$$

Assim, de (3), obtemos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + h[-x_n u_n - y_n]. \end{aligned}$$

Com o tamanho do passo $h = 0,1$ e $y_0 = 1$, $u_0 = 2$, temos

$$y_1 = y_0 + (0,1)u_0 = 1 + (0,1)2 = 1,2$$

$$u_1 = u_0 + (0,1)[-x_0 u_0 - y_0] = 2 + (0,1)[-(0)(2) - 1] = 1,9$$

$$y_2 = y_1 + (0,1)u_1 = 1,2 + (0,1)(1,9) = 1,39$$

$$u_2 = u_1 + (0,1)[-x_1 u_1 - y_1] = 1,9 + (0,1)[-(0,1)(1,9) - 1,2] = 1,761.$$

Em outras palavras, $y(0,2) \approx 1,39$ e $y'(0,2) \approx 1,761$.

Sistemas

Um problema de valor inicial para um sistema de segunda ordem, ou seja, um sistema de duas equações de primeira ordem, é

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0.\end{aligned}\tag{4}$$

Tal como em (3), para aproximar uma solução desse problema, aplicamos um método numérico a cada equação em (4). O **método de Runge-Kutta de quarta ordem** se apresenta como:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

onde

$$m_1 = hf(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_1 = hg(t_n, x_n, y_n)$$

$$m_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_2 = hg\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$m_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_3 = hg\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$m_4 = hf(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3)$$

$$k_4 = hg(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3).$$

EXEMPLO 2

Considere o problema de valor inicial

$$x' = 2x + 4y$$

$$y' = -x + 6y$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 6.$$

Utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para $h = 0,2$ e $h = 0,1$.

Solução Ilustramos os cálculos de x_1 e y_1 com $h = 0,2$. Com as identificações $f(t, x, y) = 2x + 4y$, $g(t, x, y) = -x + 6y$, $t_0 = 0$, $x_0 = -1$ e $y_0 = 6$, vemos, de (6), que

$$m_1 = hf(t_0, x_0, y_0) = 0,2f(0, -1, 6) = 0,2[2(-1) + 4(6)] = 4,4000$$

$$k_1 = hg(t_0, x_0, y_0) = 0,2g(0, -1, 6) = 0,2[-1(-1) + 6(6)] = 7,4000$$

$$m_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}m_1, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2f(0,1, 1,2, 9,7) = 8,2400$$

$$k_2 = hg\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}m_1, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2g(0,1, 1,2, 9,7) = 11,4000$$

$$m_3 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}m_2, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,2f(0,1, 3,12, 11,7) = 10,6080$$

$$k_3 = hg\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}m_2, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,2g(0,1, 3,12, 11,7) = 13,4160$$

$$m_4 = hf(t_0 + h, x_0 + m_3, y_0 + k_3) = 0,2f(0,2, 8, 20,216) = 19,3760$$

$$k_4 = hg(t_0 + h, x_0 + m_3, y_0 + k_3) = 0,2g(0,2, 8, 20,216) = 21,3776.$$

Portanto, de (5), vem

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\&= -1 + \frac{1}{6}(4,4 + 2(8,24) + 2(10,608) + 19,3760) = 9,2453\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\&= 6 + \frac{1}{6}(7,4 + 2(11,4) + 2(13,416) + 21,3776) = 19,0683,\end{aligned}$$

onde, como de costume, os valores calculados são arredondados para quatro decimais. Esses números nos dão as aproximações $x_1 \approx x(0,2)$ e $y_1 \approx y(0,2)$. As Tabelas 9.21 e 9.22 resumem os valores subseqüentes, obtidos com auxílio de um computador.

TABELA 9.21 Método de Runge-Kutta com $h = 0,2$

m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4	t_n	x_n	y_n
								0,00	-1,0000	6,0000
4,4000	8,2400	10,6080	19,3760	7,4000	11,4000	13,4160	21,3776	0,20	9,2453	19,0683
18,9527	31,1564	37,8870	63,6848	21,0329	31,7573	36,9716	57,8214	0,40	46,0327	55,1203
62,5093	97,7863	116,0063	187,3669	56,9378	84,8495	98,0688	151,4191	0,60	158,9430	150,8192

TABELA 9.22 Método de Runge-Kutta com $h = 0,1$

m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4	t_n	x_n	y_n
								0,00	-1,0000	6,0000
2,2000	3,1600	3,4560	4,8720	3,7000	4,7000	4,9520	6,3256	0,10	2,3840	10,8883
4,8321	6,5742	7,0778	9,5870	6,2946	7,9413	8,3482	10,5957	0,20	9,3379	19,1332
9,5208	12,5821	13,4258	17,7609	10,5461	13,2339	13,8872	17,5358	0,30	22,5541	32,8539
17,6524	22,9090	24,3055	31,6554	17,4569	21,8114	22,8549	28,7393	0,40	46,5103	55,4420
31,4788	40,3496	42,6387	54,9202	28,6141	35,6245	37,2840	46,7207	0,50	88,5729	93,3006
54,6348	69,4029	73,1247	93,4107	46,5231	57,7482	60,3774	75,4370	0,60	160,7563	152,0025

Exercícios:

Nos Problemas 7-10, aplique o método de Runge-Kutta para aproximar $x(0,2)$ e $y(0,2)$. Compare os resultados para $h = 0,2$ e $h = 0,1$.

7. $x' = 2x - y$

$$y' = x$$

$$x(0) = 6, y(0) = 2$$

9. $x' = -y + t$

$$y' = x - t$$

$$x(0) = -3, y(0) = 5$$

8. $x' = x + 2y$

$$y' = 4x + 3y$$

$$x(0) = 1, y(0) = 1$$

10. $x' = 6x + y + 6t$

$$y' = 4x + 3y - 10t + 4$$

$$x(0) = 0,5, y(0) = 0,2$$