

Após o desenvolvimento das equações governantes do movimento, a determinação das frequências naturais e dos modos de vibrar de sistemas de múltiplos graus de liberdade será estudada de forma extensiva. No próximo capítulo, as oscilações forçadas serão consideradas. Para descrever as respostas dos sistemas de um grau de liberdade, apenas as informações de tempo são necessárias. No caso dos sistemas com mais de um grau de liberdade, além das informações sobre o tempo, são necessárias informações espaciais para a descrição das respostas. Essas informações espaciais são expressas por formas de modos de vibrar, que são determinadas com base na solução da vibração livre. Cada forma de modo de vibrar está associada a uma frequência natural do sistema. Essa forma fornece informações sobre as posições espaciais relativas dos elementos inerciais expressas pelas coordenadas generalizadas escolhidas. A determinação dos modos de vibrar e das frequências naturais é discutida em detalhes neste capítulo. Como explicado no próximo capítulo, as informações espaciais obtidas com base no problema de vibração livre também podem fornecer uma base para a determinação da resposta forçada de um sistema com múltiplos graus de liberdade. Também é demonstrado que as propriedades das formas dos modos de vibrar podem ser utilizadas para estabelecer a resposta de um sistema de múltiplos graus de liberdade expressa pelas respostas de sistemas de um grau de liberdade equivalentes. Isso permite a utilização do material apresentado nos capítulos precedentes para a determinação da resposta de um sistema com múltiplos graus de liberdade.

As noções de estabilidade apresentadas no Capítulo 4 para sistemas de um grau de liberdade são estendidas neste capítulo aos sistemas de múltiplos graus de liberdade.

Neste capítulo, demonstraremos como:

- Determinar as equações governantes para sistemas com múltiplos graus de liberdade, aplicando métodos de equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos.
- Determinar as equações governantes para sistemas com múltiplos graus de liberdade, aplicando as equações de Lagrange.
- Obter as frequências naturais e os modos de vibrar associados às vibrações dos sistemas com múltiplos graus de liberdade.
- Obter as condições sob as quais estes modos são ortogonais.
- Interpretar as características dos sistemas amortecidos.
- Determinar as características de vibração dos eixos rotativos.
- Analisar a estabilidade dos sistemas de múltiplos graus de liberdade.

## 7.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Nesta seção, são apresentadas duas abordagens para a determinação das equações governantes do movimento. A primeira abordagem tem como base os métodos de equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos, e a segunda abordagem tem como base as equações de Lagrange. Para facilitar as operações algébricas, o número de graus de liberdade para os sistemas físicos escolhidos neste capítulo é menor ou igual a cinco.

### 7.2.1 Métodos de equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos

Os princípios fundamentais dos métodos de equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos são expressos pelas Eqs. (1.11) e (1.17), que relacionam as forças e os momentos impostos a um sistema à razão da variação da quantidade de movimento linear e à razão da variação da quantidade de movimento angular, respectivamente.

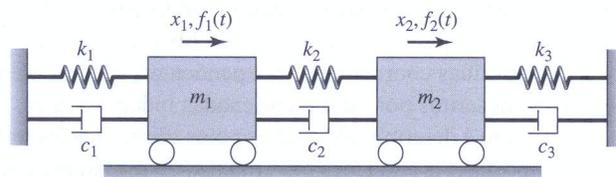


FIGURA 7.1

Sistema com dois graus de liberdade.

### Método de eq

Para ilustrar a utili  
Esse sistema consi  
diagramas de corp  
forças inerciais, n  
posições das duas  
base no diagrama d  
horizontal  $i$ , obtem

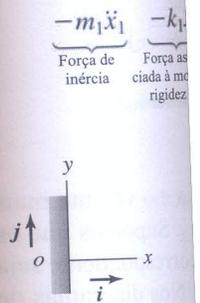


FIGURA 7.2

Diagramas de corpo  
ciais indicadas por li  
no limite fixo na ext

Essa equação  
de corpo livre do e

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 +$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 +$$

Essas equações

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Os termos fora  
nal das matrizes de  
matrizes simétricas  
diagonal diferentes  
plado quando o am  
diretamente aos ele

### Método de eq

Agora, iremos cons  
de rotação  $J_{o1}$  e  $J_{o2}$   
de acionamento do  
descrever as rotaçõ

<sup>1</sup>Consulte o Apêndice E

<sup>2</sup>Como discutido no Apêndice E

## Método de equilíbrio de forças

Para ilustrar a utilização dos métodos de equilíbrio de forças, considere o sistema mostrado na Figura 7.1. Esse sistema consiste de molas lineares, amortecedores lineares e elementos de inércia de translação. Os diagramas de corpo livre para as massas pontuais  $m_1$  e  $m_2$  são mostrados, juntamente com as respectivas forças inerciais, na Figura 7.2. As coordenadas generalizadas  $x_1$  e  $x_2$  são utilizadas para especificar as posições das duas massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, em relação à extremidade fixa no lado esquerdo. Com base no diagrama de corpo livre do elemento inercial  $m_1$  e estabelecendo o equilíbrio de forças na direção horizontal  $i$ , obtemos a seguinte equação:

$$\underbrace{-m_1\ddot{x}_1}_{\text{Força de inércia}} \underbrace{-k_1x_1}_{\text{Força associada à mola de rigidez } k_1} + \underbrace{+k_2(x_2 - x_1)}_{\text{Força associada à mola de rigidez } k_2} \underbrace{-c_1\dot{x}_1}_{\text{Força associada ao amortecedor de coeficiente } c_1} + \underbrace{+c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}_{\text{Força associada ao amortecedor } c_2} + \underbrace{+f_1(t)}_{\text{Força externa que atua sobre a massa } m_1} = 0$$

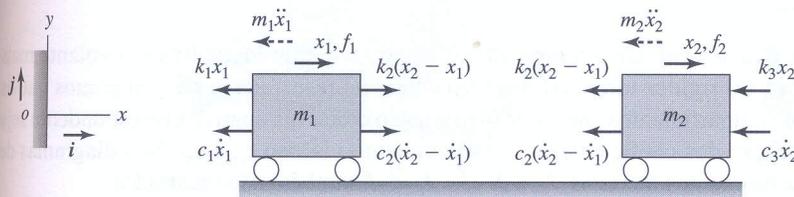


FIGURA 7.2

Diagramas de corpo livre para as massas  $m_1$  e  $m_2$  juntamente com as respectivas forças inerciais indicadas por linhas intermitentes. A origem do sistema de coordenadas está localizada no limite fixo na extremidade esquerda da mola.

Essa equação foi reescrita como a primeira das Eqs. (7.1a). De modo similar, com base no diagrama de corpo livre do elemento inercial  $m_2$ , a segunda das Eqs. (7.1a) é obtida.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 &= f_2(t) \end{aligned} \quad (7.1a)$$

Essas equações diferenciais lineares são expressas na forma matricial<sup>1</sup> como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (7.1b)$$

Os termos fora da diagonal da matriz de inércia são iguais a zero, enquanto os termos fora da diagonal das matrizes de rigidez e amortecimento são diferentes de zero. Além disso, todas essas matrizes são *matrizes simétricas*.<sup>2</sup> As equações que governam o sistema são acopladas, devido a esses termos fora da diagonal diferentes de zero, nas matrizes de rigidez e amortecimento. Fisicamente, o sistema é desacoplado quando o amortecedor  $c_2$  e a mola  $k_2$  não estão presentes. As excitações  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são aplicadas diretamente aos elementos inerciais do sistema, como mostrado na figura.

## Método de equilíbrio de momentos

Agora, iremos considerar o sistema mostrado na Figura 7.3, que tem dois volantes com valores de inércia de rotação  $J_{o1}$  e  $J_{o2}$ . A extremidade do eixo ligada ao rotor é tratada como um extremo fixo. O torque de acionamento do primeiro volante é  $M_o(t)$ . As coordenadas generalizadas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são utilizadas para descrever as rotações dos volantes em torno do eixo  $k$  através dos respectivos centros. Os valores de

<sup>1</sup>Consulte o Apêndice E para uma breve introdução à notação matricial.

<sup>2</sup>Como discutido no Apêndice E, uma matriz  $[A]$  é chamada matriz simétrica se os elementos da matriz  $a_{ij} = a_{ji}$ .

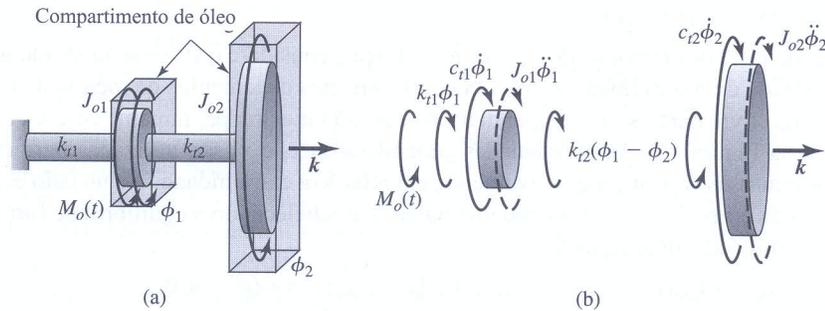


FIGURA 7.3

(a) Sistema de dois volantes acionado por um rotor e (b) diagramas de corpo livre juntamente com os respectivos momentos inerciais indicados por linhas intermitentes.

inércia dos eixos são desprezíveis, a rigidez torcional do eixo entre a extremidade fixa e o volante mais próximo é representada por  $k_{r1}$  e a rigidez torcional do outro eixo é representada por  $k_{r2}$ . Supomos que os volantes estejam imersos em compartimentos cheios de óleo e que o efeito dissipativo correspondente seja modelado por meio da aplicação dos coeficientes de amortecimento viscoso  $c_{r1}$  e  $c_{r2}$ . Nos diagramas de corpo livre da Figura 7.3, os momentos inerciais  $J_{o1}\ddot{\phi}_1$  e  $J_{o2}\ddot{\phi}_2$  também são mostrados.

Com base nos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 7.3, aplicamos o princípio do equilíbrio de quantidade de movimento angular a cada um dos volantes e obtemos as equações governantes

$$\begin{aligned} J_{o1}\ddot{\phi}_1 + c_{r1}\dot{\phi}_1 + k_{r1}\phi_1 + k_{r2}(\phi_1 - \phi_2) &= M_o(t) \\ J_{o2}\ddot{\phi}_2 + c_{r2}\dot{\phi}_2 + k_{r2}(\phi_2 - \phi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (7.2a)$$

que são expressas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} J_{o1} & 0 \\ 0 & J_{o2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{r1} & 0 \\ 0 & c_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{r1} + k_{r2} & -k_{r2} \\ -k_{r2} & k_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_o(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.2b)$$

Nesse caso, as equações são acopladas pelos termos fora da diagonal diferentes de zero na matriz de rigidez, os quais estão associados ao eixo com rigidez  $k_{r2}$ .

Os dois sistemas físicos escolhidos para exemplificar os métodos de equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos são descritos por modelos lineares, e o sistema de equações governantes associado é expresso em forma matricial. Isso pode ser feito para qualquer sistema de múltiplos graus de liberdade linear, como explicado no Exemplo 7.1. No caso de um sistema de múltiplos graus de liberdade não linear, as equações governantes não lineares do movimento são linearizadas para a obtenção de um conjunto de equações lineares. As equações lineares resultantes podem ser tratadas na forma matricial. Isso é explicado no Exemplo 7.3.

### EXEMPLO 7.1 Modelamento de fresadora sobre piso flexível

Uma fresadora e um modelo vibratório desse sistema são mostrados na Figura 7.4. Iremos determinar as equações governantes do movimento para esse sistema, aplicando o método de equilíbrio de forças. Como mostra a Figura 7.4b, a fresadora é descrita através de três elementos inerciais  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , juntamente com elementos de mola e amortecedor discretos. Todos os três elementos inerciais se movem em translação apenas no sentido  $i$ . A força externa  $f_1(t)$  no sentido  $i$  mostrada na figura é uma ação representativa da perturbação atuando sobre  $m_1$ .

Para obter as equações governantes do movimento, utilizamos as coordenadas generalizadas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , cada uma medida em relação à posição de equilíbrio estático do sistema. Uma vez que as coordenadas são medidas em relação à posição de equilíbrio estático, as forças de gravidade não são consideradas a

seguir. Para a aplicação do método de equilíbrio de forças a cada elemento inercial, os diagramas de corpo livre mostrados na Figura 7.4c são utilizados. Aplicando o método de equilíbrio de forças no sentido  $i$  a cada massa, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= -f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_1x_1 - k_2x_3 + (c_1 + c_2)\dot{x}_2 - c_1\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + (k_2 + k_3)x_3 - k_2x_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_3 - c_2\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

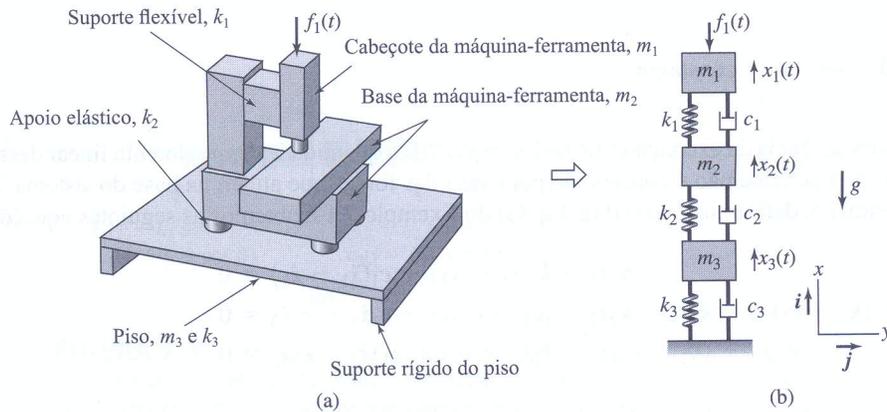


FIGURA 7.4

(a) Fresadora; (b) modelo vibratório para estudo de movimentos verticais; e (c) diagramas de corpo livre dos elementos inerciais  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  mostrados em (b) juntamente com as forças inerciais indicadas por linhas intermitentes.

As Equações (a) são arranjadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (b)$$

Observamos que as matrizes de inércia, rigidez e amortecimento são matrizes simétricas.

**EXEMPLO 7.2** Conservação da quantidade de movimento linear em um sistema de múltiplos graus de liberdade

Consideremos o Exemplo 7.1 novamente e vamos discutir quando a quantidade de movimento linear desse sistema de múltiplos graus de liberdade é conservada no sentido  $i$ . Com base na Eq. (1.11), observamos claramente que, na ausência das forças externas  $f_i(t)$ , a quantidade de movimento linear do sistema é conservada, isto é,

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow p = \text{constante} \quad (a)$$

Mesmo na ausência da excitação  $f_1(t)$  no Exemplo 7.1, a quantidade de movimento linear desse sistema de três graus de liberdade não é conservada por causa das forças que atuam na base do sistema. Para analisar essa condição, definimos  $f_1(t) = 0$  na Eq. (a) do Exemplo 7.1 e obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} m_1\dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_1x_1 - k_2x_3 + (c_1 + c_2)\dot{x}_2 - c_1\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_3 &= 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + (k_2 + k_3)x_3 - k_2x_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_3 - c_2\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Cada uma das Eqs. (b) foi obtida através do estabelecimento do equilíbrio da variação da quantidade de movimento linear individualmente para cada um dos três elementos inerciais do sistema. Adicionando todas as três Eqs. (b), obtemos

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3 = -(k_3x_3 + c_3\dot{x}_3) \quad (c)$$

Integrar a Eq. (c) em relação ao tempo, isto é,

$$\int_0^t (m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3) dt = - \int_0^t (k_3x_3 + c_3\dot{x}_3) dt \quad (d)$$

resulta em

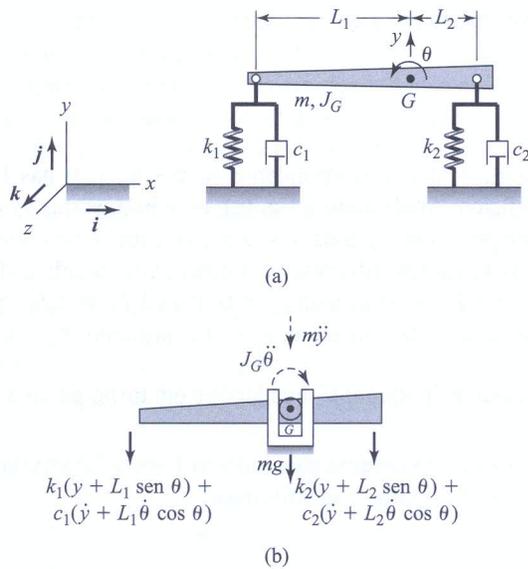
$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + m_3\dot{x}_3 \neq \text{constante} \quad (e)$$

Da Eq. (e), temos que, por causa das forças da mola e do amortecedor na base, a quantidade de movimento linear total do sistema não é conservada. Se a mola com rigidez  $k_3$  e o amortecedor com coeficiente de amortecimento  $c_3$  estiverem ausentes, a quantidade de movimento linear total do sistema livre-livre resultante será conservada.

**EXEMPLO 7.3** Sistema com movimentos de translação e rotação

Considere a barra rígida mostrada na Figura 7.5a, que pode girar (inclin) em torno do sentido  $k$  e mover-se em translação (saltar) no sentido  $j$ . Posicionamos as coordenadas generalizadas  $y$  e  $\theta$  no centro de gravidade da viga. Esse modelo fornece uma boa representação para a descrição de determinados tipos de movimento de motocicletas, automóveis e outros veículos.

Este exemplo específico foi escolhido para explicar que os dois métodos, de equilíbrio de forças e de equilíbrio de momentos, são necessários para a obtenção das equações governantes. Além disso, explicamos também como as posições de equilíbrio são determinadas e como a linearização de um sistema não linear é executada.



**FIGURA 7.5**

(a) Corpo rígido no plano com movimentos vinculados por molas e amortecedores e (b) diagrama de corpo livre do sistema juntamente com a força inercial e o momento inercial.

**Equações governantes do movimento**

O diagrama de corpo livre mostrado na Figura 7.5b será utilizado para a obtenção das equações governantes do movimento. A força inercial e o momento inercial também são mostrados na Figura 7.5b. Considerando o equilíbrio de forças e o equilíbrio de momentos em relação ao centro de massa  $G$  da barra rígida, obtemos, respectivamente,

$$m\ddot{y} + (c_1 + c_2)\dot{y} - (c_1L_1 - c_2L_2)\dot{\theta} \cos \theta + (k_1 + k_2)y - (k_1L_1 - k_2L_2)\text{sen} \theta = -mg \tag{a}$$

$$J_G\ddot{\theta} - (c_1L_1 - c_2L_2)\dot{y} \cos \theta + (c_1L_1^2 + c_2L_2^2)\dot{\theta} \cos^2 \theta - (k_1L_1 - k_2L_2)y \cos \theta + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\text{sen} \theta \cos \theta = 0 \tag{b}$$

As Equações (a) e (b) são não lineares por causa dos termos  $\text{sen} \theta$  e  $\cos \theta$ .

**Posições de equilíbrio estático**

As posições de equilíbrio  $y_o$  e  $\theta_o$  do sistema são obtidas através do estabelecimento das acelerações e das velocidades iguais a zero nas Eqs. (a) e (b). Assim,  $y_o$  e  $\theta_o$  são soluções de

$$(k_1 + k_2)y_o - (k_1L_1 - k_2L_2)\text{sen} \theta_o = -mg \tag{c}$$

$$\{[-(k_1L_1 - k_2L_2)y_o + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\text{sen} \theta_o]\} \cos \theta_o = 0$$

Da segunda das Eqs. (c), temos

$$\cos \theta_o = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sen} \theta_o = y_o \frac{(k_1L_1 - k_2L_2)}{(k_1L_1^2 + k_2L_2^2)} \tag{d}$$

Utilizando a segunda das Eqs. (d) na primeira das Eqs. (c), obtemos

$$y_o = -\frac{mg(k_1L_1^2 + k_2L_2^2)}{k_1k_2(L_1 + L_2)^2} \quad (e)$$

Observe que a posição de equilíbrio  $\theta_o = \pi/2$  correspondente ao  $\cos \theta_o = 0$  nas Eqs. (d) não é considerável porque não tem significado físico. Analisando a Eq. (e), concluímos que  $y_o$  representa um desvio na posição da barra causada por seu peso. Da segunda das Eqs. (d), concluímos que  $\theta_o$  representa uma rotação causada pela combinação das rigidezes diferentes em cada extremidade e da distribuição desigual de massa da barra. Quando  $k_1L_1 = k_2L_2$ ,  $\theta_o = 0$ , mas  $y_o \neq 0$ . Para  $k_1L_1 \neq k_2L_2$ , na ausência do carregamento da gravidade ou de outro carregamento constante,  $y_o = 0$  e, portanto,  $\theta_o = 0$ .

#### Linearização e sistema linear conduzindo a "pequenas" oscilações em torno de uma posição de equilíbrio

Agora, iremos considerar "pequenas" oscilações do sistema mostrado na Figura 7.5 em torno da posição de equilíbrio ( $y_o, \theta_o$ ). Para obter as equações governantes, substituímos

$$\begin{aligned} y(t) &= y_o + \hat{y}(t) \\ \theta(t) &= \theta_o + \hat{\theta}(t) \end{aligned} \quad (f)$$

nas Eqs. (a) e (b) e executamos expansões em série de Taylor<sup>3</sup> de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  e tomamos apenas os termos lineares em  $y$  e  $\theta$ . Para isso, determinamos que

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}(y_o + \hat{y}) = \ddot{\hat{y}}(t), & \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(y_o + \hat{y}) = \dot{\hat{y}}(t) \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}(\theta_o + \hat{\theta}) = \ddot{\hat{\theta}}(t), & \dot{\theta}(t) &= \frac{d}{dt}(\theta_o + \hat{\theta}) = \dot{\hat{\theta}}(t) \\ \sin \theta &= \sin(\theta_o + \hat{\theta}) \approx \sin \theta_o + \hat{\theta} \cos \theta_o + \dots \\ \cos \theta &= \cos(\theta_o + \hat{\theta}) \approx \cos \theta_o - \hat{\theta} \sin \theta_o + \dots \end{aligned} \quad (g)$$

Substituindo as Eqs. (g) nas Eqs. (a) e (b), utilizando as Eqs. (c) e tomando apenas os termos lineares em  $\hat{y}$  e  $\hat{\theta}$ , obtemos

$$\begin{aligned} m\ddot{\hat{y}} + (c_1 + c_2)\dot{\hat{y}} - (c_1L_1 - c_2L_2)\dot{\hat{\theta}} \cos \theta_o + (k_1 + k_2)\hat{y} \\ - (k_1L_1 - k_2L_2)\hat{\theta} \cos \theta_o = 0 \\ J_G\ddot{\hat{\theta}} - (c_1L_1 - c_2L_2)\dot{\hat{y}} \cos \theta_o + (c_1L_1^2 + c_2L_2^2)\dot{\hat{\theta}} \cos^2 \theta_o \\ - (k_1L_1 - k_2L_2)\hat{y} \cos \theta_o + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\hat{\theta}(\cos^2 \theta_o - \sin^2 \theta_o) = 0 \end{aligned} \quad (h)$$

que na forma matricial é expressa como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\hat{y}} \\ \ddot{\hat{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -(c_1L_1 - c_2L_2) \cos \theta_o \\ -(c_1L_1 - c_2L_2) \cos \theta_o & (c_1L_1^2 + c_2L_2^2) \cos^2 \theta_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1L_1 - k_2L_2) \cos \theta_o \\ -(k_1L_1 - k_2L_2) \cos \theta_o & (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)(\cos^2 \theta_o - \sin^2 \theta_o) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (i)$$

<sup>3</sup>T. B. Hildebrand, *ibid.*

A Equação (i) na Figura 7.5 em posição de equilíbrio ao supormos que o carregamento das equações de

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Se  $k_1L_1 \neq k_2L_2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -(k_1L_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Quando  $c_1 = c_2$  e translação da Notamos apenas "pequenas" e que a posição feito igual a 1

#### EXEMPLO

Obteremos as chamados giro modelo vibrat dois graus de coordenadas projetado para mola com rig nos movimen externa  $f_x(t)$  Para a ob Utilizando o

$$m\ddot{x} = -$$

$$m\ddot{y} = -$$

<sup>4</sup>O. Degani, D. Vibrating Rate n. 3, pp. 329-33

A Equação (i) representa o sistema linear que conduz a “pequenas” oscilações do sistema mostrado na Figura 7.5 em torno da posição de equilíbrio estático dada pelas Eqs. (d) e (e). Apesar de determinar a posição de equilíbrio, o carregamento da gravidade não aparece de modo explícito na Eq. (i). Dessa forma, ao supormos que as coordenadas generalizadas sejam medidas em relação à posição de equilíbrio estático, o carregamento constante, como o carregamento da gravidade, não será considerado para a determinação das equações do movimento.

Da segunda das Eqs. (d), observamos que se  $k_1L_1 = k_2L_2$ ,  $\theta_0 = 0$ , e a Eq. (i) assume a forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -(c_1L_1 - c_2L_2) \\ -(c_1L_1 - c_2L_2) & (c_1L_1^2 + c_2L_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & (k_1L_1^2 + k_2L_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

Se  $k_1L_1 \neq k_2L_2$  e  $\theta_0 < 0$ , a Eq. (i) assume a forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -(c_1L_1 - c_2L_2) \\ -(c_1L_1 - c_2L_2) & (c_1L_1^2 + c_2L_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1L_1 - k_2L_2) \\ -(k_1L_1 - k_2L_2) & (k_1L_1^2 + k_2L_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Quando  $c_1L_1 = c_2L_2$  e  $k_1L_1 = k_2L_2$ , as equações são desacopladas, isto é, os movimentos de rotação e translação da barra são independentes um em relação ao outro.

Notamos que as Eqs. (k) poderiam ter sido obtidas diretamente, se supuséssemos inicialmente que apenas “pequenas” oscilações em torno da posição de equilíbrio estático estivessem sendo consideradas e que a posição de equilíbrio estático fosse “próxima” da posição horizontal. Nesse caso,  $\cos \theta$  pode ser feito igual a 1 e  $\sin \theta$  seria feito igual a  $\theta$  nas Eqs. (a) e (b).

#### EXEMPLO 7.4 Equações governantes de um giroscópio sensor de velocidade de rotação<sup>4</sup>

Obteremos as equações governantes do movimento de um giroscópio de velocidade de rotação, também chamado girosensor. A Figura 7.6 mostra o sistema físico, juntamente com o modelo vibratório. No modelo vibratório mostrado na Figura 7.6b, o sensor é representado como uma massa pontual  $m$  com dois graus de liberdade, e seu movimento é descrito pelas coordenadas  $x$  e  $y$  no plano horizontal. As duas coordenadas generalizadas estão localizadas em um sistema de referência rotacional. O sensor deve ser projetado para medir a velocidade de rotação  $\omega_z$ , que supomos ser constante. Para o modelamento, uma mola com rigidez  $k_x$  e um amortecedor viscoso com um coeficiente de amortecimento  $c_x$  são utilizados nos movimentos no sentido  $n_1$ . Outra combinação mola-amortecedor é utilizada no sentido  $n_2$ . Uma força externa  $f_x(t)$  no sentido  $n_1$  é aplicada ao sistema.

Para a obtenção das equações governantes, o equilíbrio de forças é considerado nos sentidos  $n_1$  e  $n_2$ . Utilizando o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 7.6c, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} ma_x &= -k_x x - c_x \dot{x} + f_x \\ ma_y &= -k_y y - c_y \dot{y} \end{aligned} \quad (a)$$

<sup>4</sup>O. Degani, D. J. Seter, E. Socher, S. Kaldor e Y. Nemirovský, “Optimal Design and Noise Consideration of Micromachined Vibrating Rate Gyroscope with Modulated Integrative Differential Optical Sensing”. *J. Microelectromechanical Systems*, Vol. 7, n. 3, pp. 329-338, 1998.

onde  $x$  e  $y$  são os respectivos deslocamentos nos sentidos  $n_1$  e  $n_2$  no sistema de referência rotacional,  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  são as respectivas velocidades nesses sentidos no sistema de referência rotacional e  $a_x$  e  $a_y$  são os componentes da aceleração absoluta da massa  $m$  nos sentidos  $n_1$  e  $n_2$ , respectivamente. Com base no Exercício 1.4 e na discussão no Exemplo 1.3 para uma partícula localizada em um sistema de referência rotacional, temos

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} - 2\omega_z \dot{y} - \omega_z^2 x \\ a_y &= \ddot{y} + 2\omega_z \dot{x} - \omega_z^2 y \end{aligned} \tag{b}$$

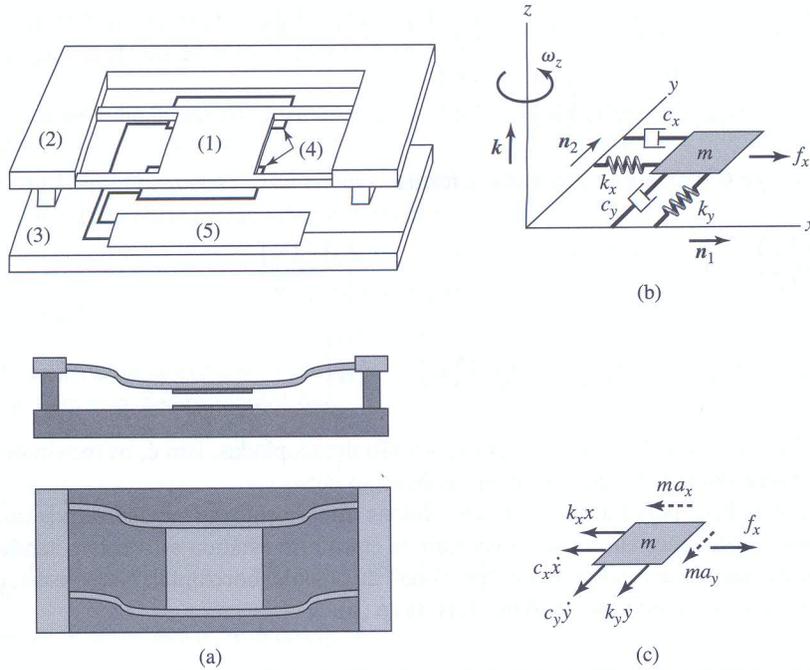


FIGURA 7.6

(a) Giroscópio sensor de velocidade de rotação; (b) modelo vibratório e (c) diagrama de corpo livre juntamente com as forças inerciais. [(1) Massa de ensaio suspensa; (2) quadro; (3) chip CMOS; (4) fotodiodos; e (5) circuitos eletrônicos.] Fonte: Fig. 7.6a de O. Degani, D. J. Seter, E. Socher, S. Kaldor e Y. Nemirovshy, "Optimal Design and Noise Consideration of Micromachined Vibrating Rate Gyroscope with Modulated Integrative Differential Optical Sensing". *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 7, n. 3, pp. 329-338, 1998. Copyright © 1998 IEEE. Reimpresso com permissão.

Para a obtenção das Eqs. (b), o fato de que a rotação  $\omega_z$  é constante e que a aceleração angular correspondente é zero foi considerado. Das Eqs. (a) e (b), obtemos o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - 2\omega_z \dot{y} - \omega_z^2 x) &= -k_x x - c_x \dot{x} + f_x \\ m(\ddot{y} + 2\omega_z \dot{x} - \omega_z^2 y) &= -k_y y - c_y \dot{y} \end{aligned} \tag{c}$$

As Equações (c) são expressas na seguinte forma matricial:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + [G] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

onde as diferentes matrizes quadradas são

$[M] =$   
 $[K] =$   
A matriz rotacional leva acoplamento que a rigidez

7.2.2

Com base na 7.4, a forma descrito pelo

$[M]\{\ddot{q}\}$

onde as vár

$[M] =$   
 $m$   
 $m$   
 $m$

$[K] =$   
 $k$   
 $k$   
 $k$

$[H] =$   
 $h$   
 $h$   
 $h$

e

$\{q\} =$

A n e o vete giroscópio o vetor

<sup>5</sup>L. Meir  
<sup>6</sup>A matriz  
<sup>7</sup>Forças

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, & [C] &= \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix}, & [G] &= \begin{bmatrix} 0 & -2m\omega_z \\ 2m\omega_z & 0 \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} k_x - m\omega_z^2 & 0 \\ 0 & k_y - m\omega_z^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{e}$$

A matriz  $[G]$  é chamada *matriz giroscópica*.<sup>5</sup> A escolha das coordenadas em um sistema de referência rotacional leva a essa matriz. A matriz giroscópica, que é uma *matriz antissimétrica*,<sup>6</sup> é responsável pelo acoplamento entre os movimentos nos sentidos  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ . A forma da matriz de rigidez nas Eqs. (e) evidencia que a rigidez efetiva associada a cada sentido do movimento é reduzida pela rotação.

### 7.2.2 Forma geral das equações para um sistema de múltiplos graus de liberdade linear

Com base na estrutura das Eqs. (7.1b) e (7.2b) e nos sistemas lineares tratados nos Exemplos 7.1, 7.3 e 7.4, a forma geral das equações governantes do movimento para um sistema de  $N$  graus de liberdade linear descrito pelas coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_N$  é expressa como

$$[M]\{\ddot{q}\} + [[C] + [G]]\{\dot{q}\} + [[K] + [H]]\{q\} = \{Q\} \tag{7.3}$$

onde as várias matrizes e os vários vetores na Eq. (7.3) têm a forma geral a seguir:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}, & [C] &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}, & [G] &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \\
 [H] &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.4a}$$

e

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix}, \quad \text{e } \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{Bmatrix} \tag{7.4b}$$

A matriz de inércia  $[M]$ , a matriz de rigidez  $[K]$  e a matriz de amortecimento  $[C]$  são matrizes  $N \times N$ , e o vetor força  $\{Q\}$  é um vetor  $N \times 1$ . As matrizes  $N \times N$   $[G]$  e  $[H]$ , antissimétricas, são chamadas matriz giroscópica e matriz circulatoria, respectivamente.<sup>7</sup> O vetor  $N \times 1$   $\{q\}$  é chamado *vetor deslocamento*, o vetor  $N \times 1$   $\{\dot{q}\}$  é chamado *vetor velocidade* e o vetor  $N \times 1$   $\{\ddot{q}\}$ , *vetor aceleração*.

<sup>5</sup>L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, Capítulo 2, 1980.

<sup>6</sup>A matriz giroscópica é chamada matriz antissimétrica, pois seus elementos  $g_{ij} = -g_{ji}$ .

<sup>7</sup>Forças giroscópicas e circulatorias ocorrem em sistemas rotativos, tais como eixos. Consulte a Seção 7.4.

Sistemas lineares com  $N$  elementos inerciais,  $(N+1)$  elementos mola linear e  $(N+1)$  elementos amortecedores lineares

Como um caso especial de sistemas de múltiplos graus de liberdade lineares, consideramos o sistema mostrado na Figura 7.7. Esse sistema é uma extensão do sistema de dois graus de liberdade mostrado na Figura 7.1. Na figura,  $m_i$  é a massa do  $i$ -ésimo elemento inercial, cujo movimento é descrito pela coordenada generalizada  $q_i(t)$ , que é medida a partir do ponto  $o$  localizado na extremidade fixa no sentido  $i$ . A força que atua sobre o  $i$ -ésimo elemento inercial é representada por  $Q_i(t)$ . Estabelecendo o equilíbrio de forças com base no diagrama de corpo livre mostrado na Figura 7.7b, obtemos a seguinte equação que governa o  $i$ -ésimo elemento inercial:

$$m_i \ddot{q}_i + (k_i + k_{i+1})q_i - k_i q_{i-1} - k_{i+1} q_{i+1} + (c_i + c_{i+1})\dot{q}_i - c_i \dot{q}_{i-1} - c_{i+1} \dot{q}_{i+1} = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.5a)$$

Expressando todas as  $N$  equações dadas pelas Eqs. (7.5a) na forma matricial, obtemos a Eq. (7.3) com a matriz circulatoria  $[H] = 0$ , a matriz giroscópica  $[G] = 0$  e as seguintes matrizes de inércia, rigidez e amortecimento, respectivamente,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & m_N \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & -k_{N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & -k_{N-1} & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k_N & k_N + k_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & -c_{N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & -c_{N-1} & c_{N-1} + c_N & -c_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -c_N & c_N + c_{N+1} \end{bmatrix} \quad (7.5b)$$

A matriz de inércia dada pela Eq. (7.5b) é uma matriz diagonal, e as matrizes de rigidez e amortecimento dadas pela Eq. (7.5b) não são matrizes diagonais por causa da presença dos elementos fora da diagonal. Entretanto, as matrizes de rigidez e amortecimento são *matrizes de banda*, cada uma com elementos diferentes de zero ao longo de três diagonais. Todos os outros elementos dessas matrizes são iguais a zero.

### Conservação das quantidades de movimento linear e angular

Na ausência de forças externas, isto é,

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N = 0 \quad (7.6a)$$

a quantidade de movimento linear do sistema é conservada. Isso significa que

$$m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2 + \dots + m_N \dot{q}_N = \text{constante} \quad (7.6b)$$

Obtemos a Equação (7.6b) diretamente por meio da Eq. (1.11) e observando a Eq. (7.6a).

### FIGURA 7.7

(a) Sistema linear livre do  $i$ -ésimo e

No caso de ficar se a quantidade de movimento linear é zero, a quantidade de movimento angular na extremidade fixa é

### 7.2.3

Para utilizar a quantidade de liberdade e as coordenadas  $q_1, \dots, q_N$ . Resolva

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

onde  $T$  é a energia cinética e  $Q$  é a força

### Sistema

Para sistema linear,  $T$ ,  $V$  e

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [M] \{ \dot{q} \}$$

$$V = \frac{1}{2} \{ q \}^T [K] \{ q \}$$

$$D = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [C] \{ \dot{q} \}$$

<sup>8</sup>As formas quadráticas de energia cinética e potencial são formas quadráticas, mas como o dado nas Eqs. (7.8). Como o sistema geral co