

LOM3100 Dinâmica - 2017

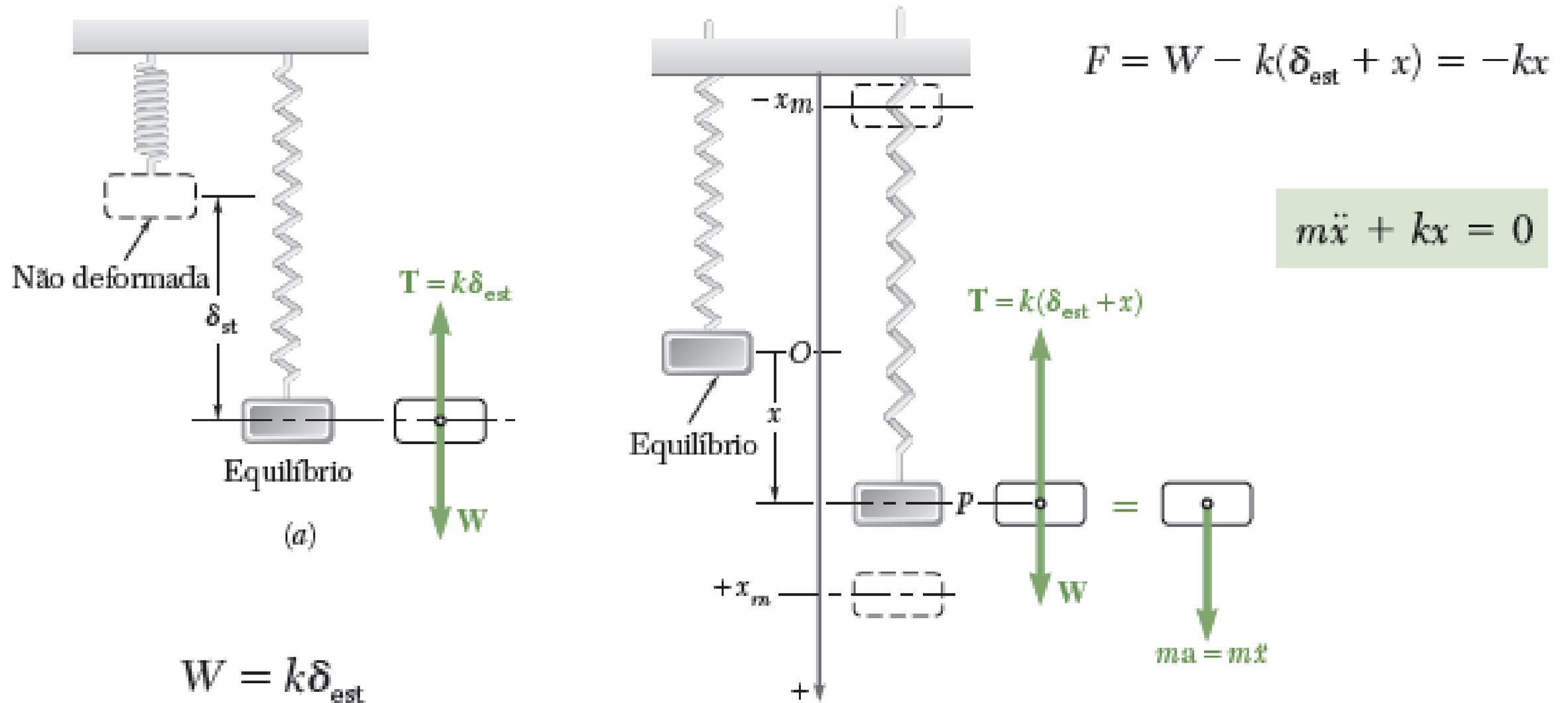
5. Vibrações mecânicas.

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Vibrações mecânicas

Uma *vibração mecânica* é o movimento de uma partícula ou de um corpo que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. A maior parte das vibrações em máquinas e estruturas é indesejável devido ao aumento de tensões e às perdas de energia que as acompanham. Elas deveriam, portanto, ser eliminadas ou reduzidas, tanto quanto possível, por meio de projetos adequados. A análise de vibrações tem se tomado cada vez mais importante nos últimos anos devido à tendência atual por máquinas de altas velocidades e de estruturas mais leves. Existem muitas razões para esperar que essa tendência permaneça e que uma necessidade ainda maior de análise de vibrações ocorra no futuro.

Vibrações livres sem amortecimento



Movimento harmônico simples

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\text{Frequência natural circular} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$x = C_1 \operatorname{sen} \omega_n t + C_2 \operatorname{cos} \omega_n t$$

$$v = \dot{x} = C_1 \omega_n \operatorname{cos} \omega_n t - C_2 \omega_n \operatorname{sen} \omega_n t$$

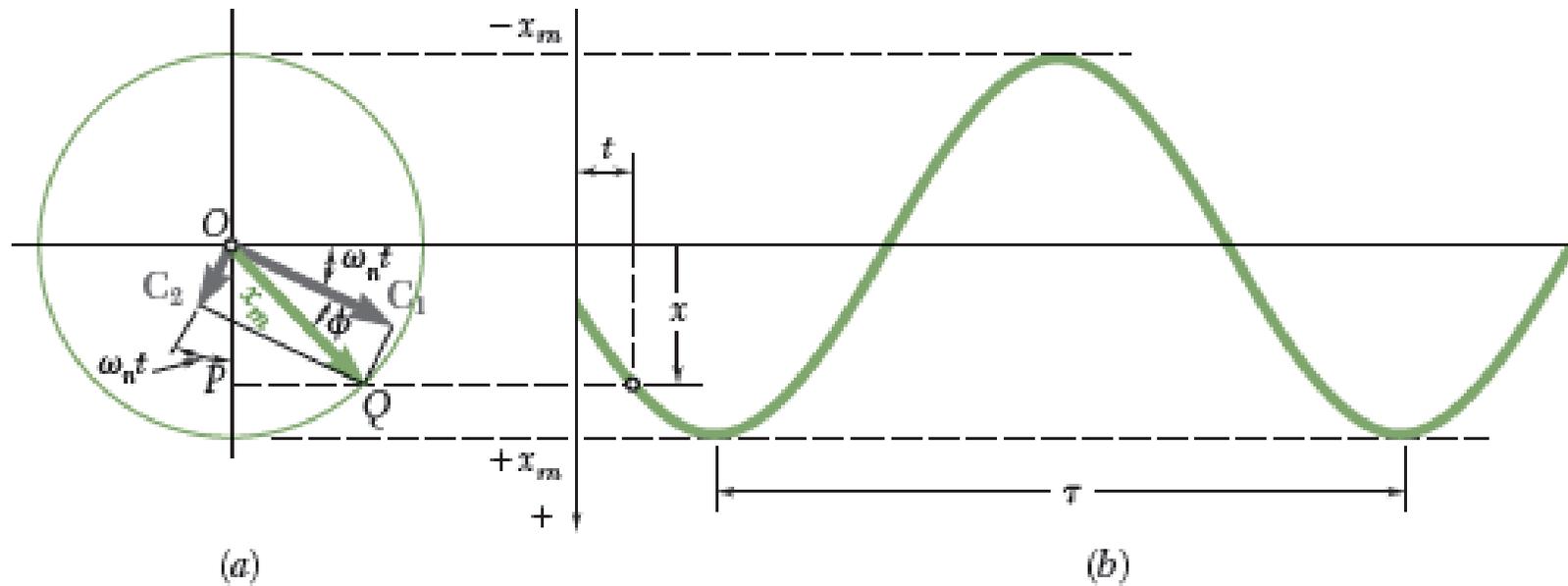
$$a = \ddot{x} = -C_1 \omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - C_2 \omega_n^2 \operatorname{cos} \omega_n t$$

Os valores das constantes C_1 e C_2 dependem das *condições iniciais*

$$C_1 = v_0/\omega_n \text{ e } C_2 = x_0.$$

Movimento harmônico simples

$$OP = OQ \text{ sen } (\omega_n t + \phi)$$



$$x = x_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi)$$

$$v = \dot{x} = x_m \omega_n \text{ cos } (\omega_n t + \phi)$$

$$a = \ddot{x} = -x_m \omega_n^2 \text{ sen } (\omega_n t + \phi)$$

ϕ ângulo de fase

$$\text{período} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$\text{Frequência natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

1/s ou s^{-1} hertz (Hz)

1 Hz corresponde a uma frequência circular de 2π rad/s.

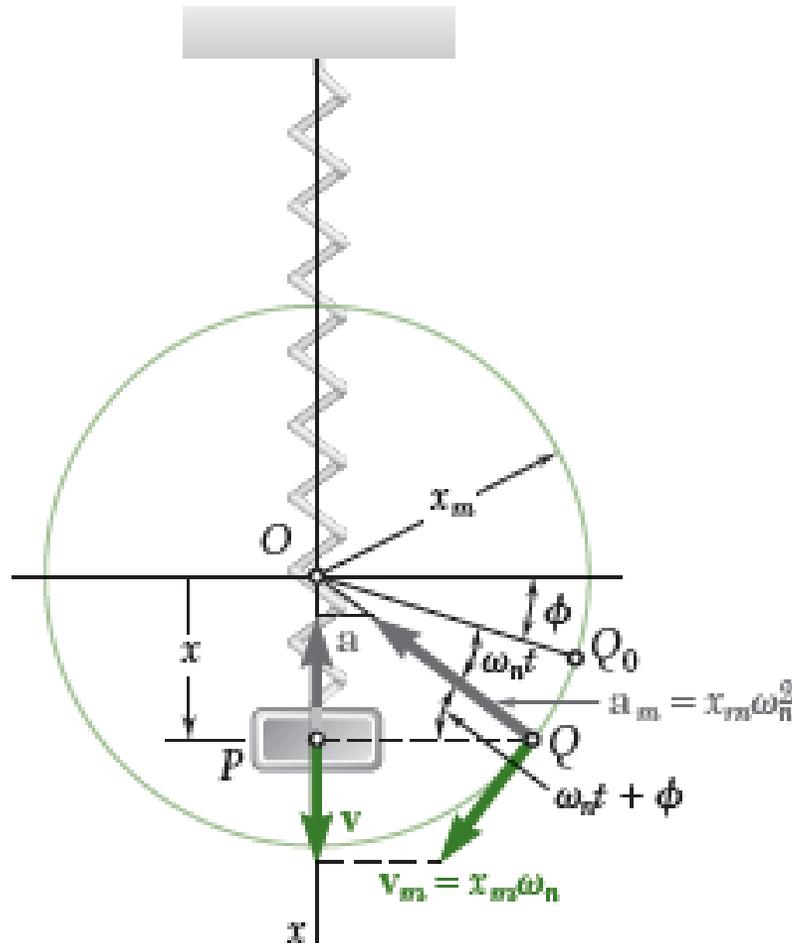
1 rpm = $\frac{1}{60} \hat{\text{Hz}} = (2\pi/60)$ rad/s

Movimento harmônico simples

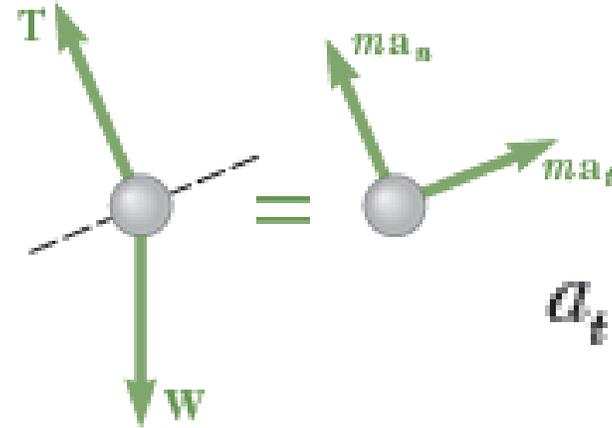
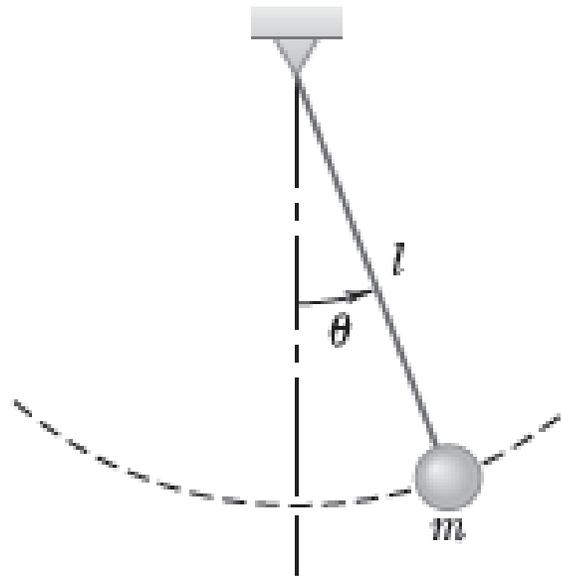
$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2$$

Os resultados obtidos não estão limitados à solução do problema de uma massa ligada a uma mola. Eles podem ser usados para analisar o movimento retilíneo de uma partícula *sempre que a resultante F das forças que atuam sobre a partícula seja proporcional ao deslocamento x e dirigida para O* . A equação fundamental do movimento $F = ma$ pode então ser escrita sob a forma da Eq. (19.6), que é característica de um movimento harmônico simples. Observando que o coeficiente de x deve ser igual a ω_n^2 , podemos facilmente determinar a frequência circular natural ω_n do movimento. Substituindo o valor obtido para ω_n nas Eqs. (19.13) e (19.14), obtemos então o período τ_n e a frequência natural f_n do movimento.

A maioria das vibrações encontradas em aplicações de engenharia pode ser representada por um movimento harmônico simples. Muitas outras, embora de tipos diferentes, podem ser *aproximadas* por um movimento harmônico simples



Pêndulo simples – solução aproximada



$$a_t = l\alpha = l\ddot{\theta}, \quad W = mg$$

$$\Sigma F_t = ma_t: \quad -W \text{ sen } \theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen } \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

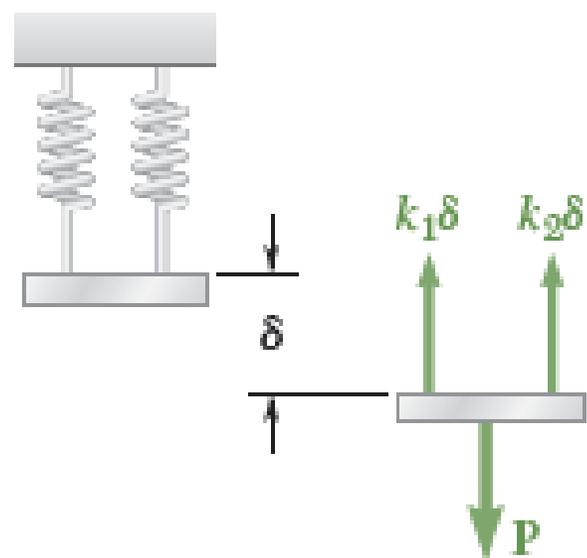
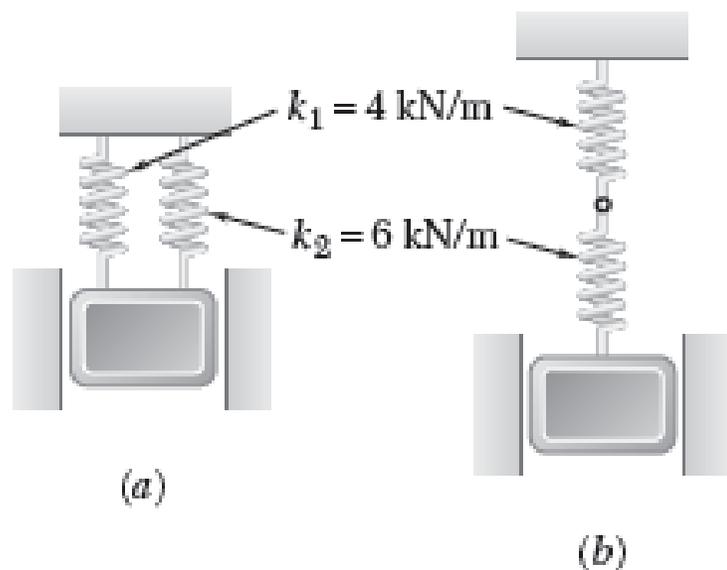
ω_n igual a $(g/l)^{1/2}$

$$\theta = \theta_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi)$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 19.1

Um bloco de 50 kg se move entre guias verticais, como mostra a figura. O bloco é puxado até 40 mm abaixo de sua posição de equilíbrio e liberado. Para cada combinação de molas, determine o período da vibração, a velocidade máxima do bloco e a aceleração máxima desse bloco.



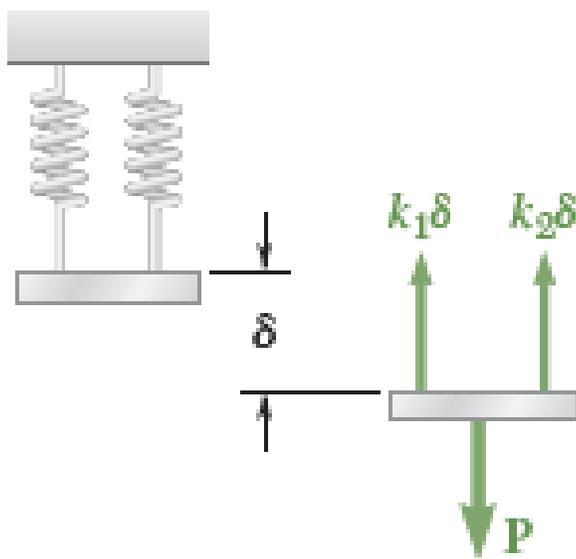
SOLUÇÃO

a. Molas presas em paralelo. Inicialmente, determinamos a constante k de uma mola única equivalente às duas molas, *encontrando a intensidade da força P* necessária para produzir uma dada deflexão δ . Uma vez que para uma deflexão δ as intensidades das forças exercidas pelas molas são, respectivamente, $k_1\delta$ e $k_2\delta$, temos

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

A constante k da mola única equivalente é

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4 \text{ kN/m} + 6 \text{ kN/m} = 10 \text{ kN/m} = 10^4 \text{ N/m}$$



Período de vibração: Como $m = 50 \text{ kg}$, a Eq. (19.4) resulta em

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \quad \omega_n = 14,14 \text{ rad/s}$$

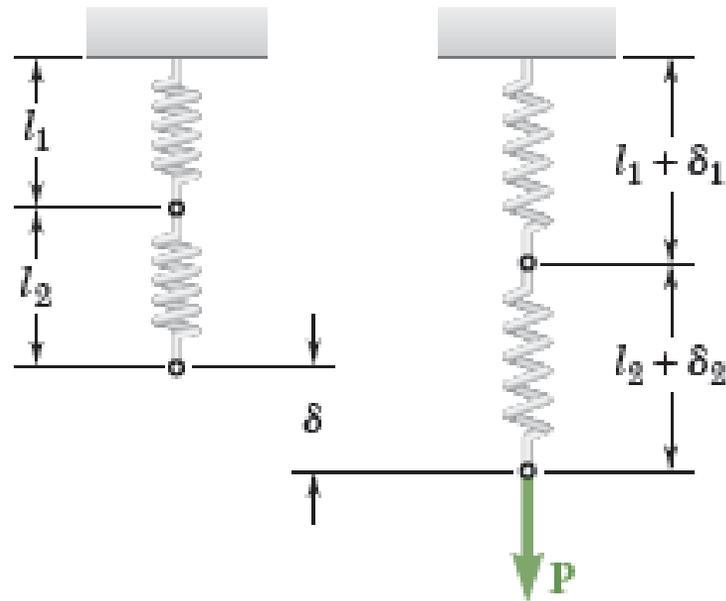
$$\tau_n = 2\pi/\omega_n \quad \tau_n = 0,444 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Velocidade máxima: $v_m = x_m \omega_n = (0,040 \text{ m})(14,14 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0,566 \text{ m/s} \quad \mathbf{v_m = 0,566 \text{ m/s} \updownarrow} \quad \blacktriangleleft$$

Aceleração máxima: $a_m = x_m \omega_n^2 = (0,040 \text{ m})(14,14 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 8,00 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{a_m = 8,00 \text{ m/s}^2 \updownarrow} \quad \blacktriangleleft$$



b. Molas presas em série. Determinamos inicialmente a constante k da mola única equivalente às duas molas, *encontrando a elongação total δ* dessas molas sob a ação de uma carga estática dada P . Visando facilitar os cálculos, uma carga estática de intensidade $P = 12 \text{ kN}$ é utilizada.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12 \text{ kN}}{4 \text{ kN/m}} + \frac{12 \text{ kN}}{6 \text{ kN/m}} = 5 \text{ m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12 \text{ kN}}{5 \text{ m}} = 2,4 \text{ kN/m} = 2.400 \text{ N/m}$$

Período de vibração: $\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{2.400 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \quad \omega_n = 6,93 \text{ rad/s}$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 0,907 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Velocidade máxima: $\omega_m = x_m v_m = (0,040 \text{ m})(6,93 \text{ rad/s})$
 $v_m = 0,277 \text{ m/s} \quad \mathbf{v_m = 0,277 \text{ m/s} \downarrow \blacktriangleleft}$

Aceleração máxima: $a_m = x_m \omega_n^2 = (0,040 \text{ m})(6,93 \text{ rad/s})^2$
 $a_m = 1,920 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{a_m = 1,920 \text{ m/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft}$

exercícios



Figura P19.4

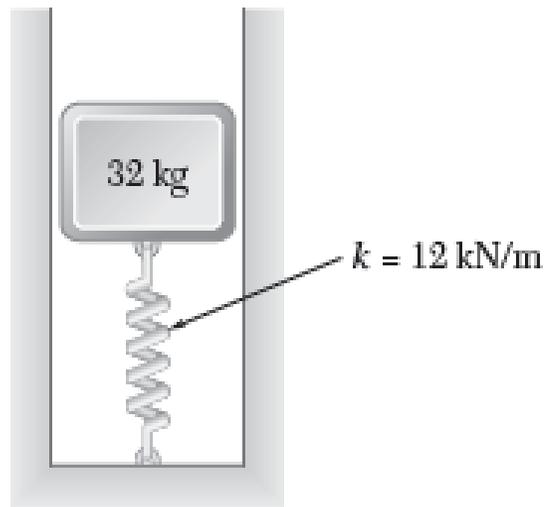
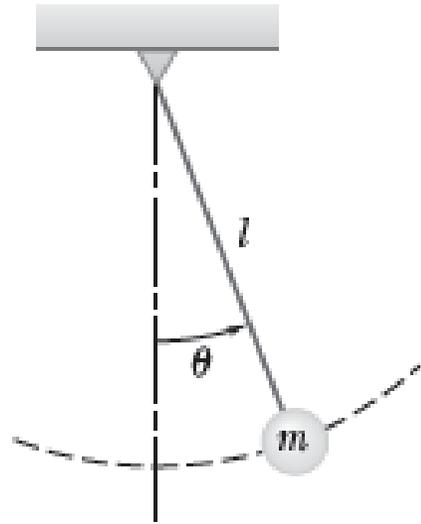


Figura P19.5

- 19.2** Determine a amplitude e a velocidade máxima de uma partícula que se move em movimento harmônico simples com uma aceleração máxima de 60 m/s^2 e uma frequência de 40 Hz .
- 19.3** Uma partícula se move em movimento harmônico simples. Sabendo que a amplitude é de 300 mm e a aceleração máxima é de 5 m/s^2 , determine a velocidade máxima da partícula e a frequência de seu movimento.
- 19.4** Um bloco de 15 kg é suportado pela mola como mostrado na figura. Se o bloco é movido verticalmente para baixo até sua posição de equilíbrio e liberado, determine (a) o período e a frequência do movimento resultante, (b) a velocidade máxima e a aceleração máxima do bloco se a amplitude de seu movimento é 50 mm .
- 19.5** Um bloco de 32 kg é ligado a uma mola e pode mover-se sem atrito em um rasgo como mostrado na figura. O bloco está na sua posição de equilíbrio quando é atingido por um martelo que lhe confere uma velocidade inicial de 250 mm/s . Determine (a) o período e a frequência do movimento resultante, (b) a amplitude do movimento e a aceleração máxima do bloco.

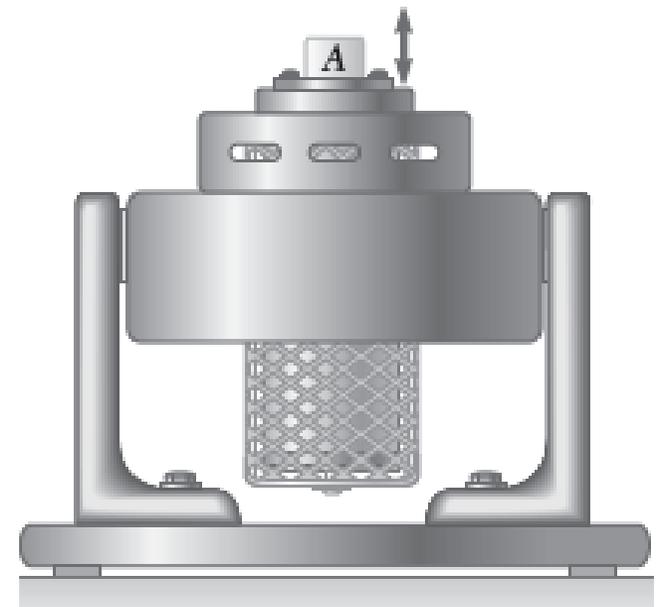
exercícios



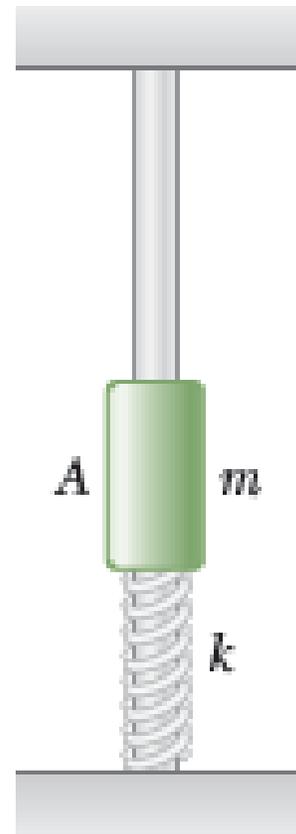
19.6 Um pêndulo simples consistindo de um peso ligado a uma corda oscila em um plano vertical com um período de 1,3 s. Considerando um movimento harmônico simples e sabendo que a velocidade máxima do pêndulo é de 400 mm/s, determine (a) a amplitude do movimento em graus, (b) a aceleração tangencial máxima do peso.

19.7 Um pêndulo simples consistindo de um peso ligado a uma corda de comprimento $l = 800$ mm oscila em um plano vertical. Considerando um movimento harmônico simples e sabendo que o pêndulo é liberado do repouso quando $\theta = 6^\circ$, determine (a) a frequência de oscilação, (b) a velocidade máxima do peso.

19.8 Uma caixa de instrumento A está aparafusada numa mesa vibratória como mostrado na figura. A mesa se movimenta verticalmente em movimento harmônico simples na mesma frequência do motor de rotação variável que a impulsiona. A caixa deve ser testada para uma aceleração de pico de 50 m/s^2 . Sabendo que a amplitude da mesa vibratória é de 60 mm, determine (a) a rotação requerida do motor em rpm, (b) a velocidade máxima da mesa.

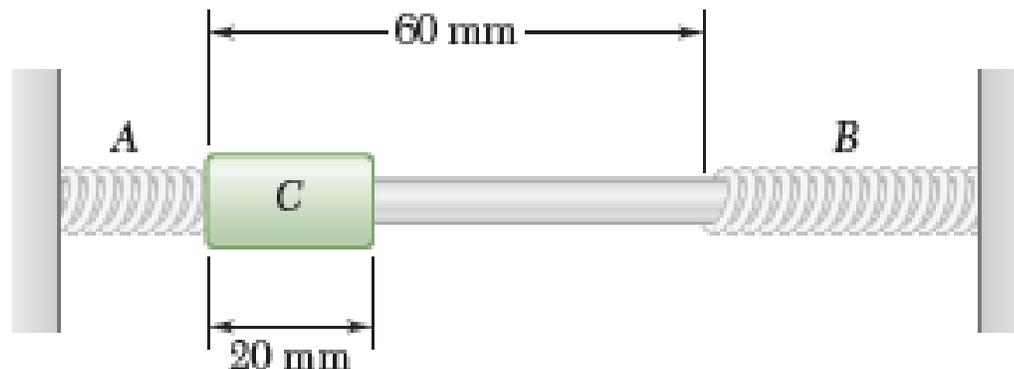


exercícios



19.15 Um colar de 5 kg repousa sobre a mola mostrada na figura, à qual não está preso. Observa-se que quando o colar é empurrado 180 mm ou mais para baixo e liberado, ele perde contato com a mola. Determine (a) a constante da mola, (b) a posição, a velocidade e a aceleração do colar 0,16 s após ter sido empurrado 180 mm para baixo e liberado.

19.16 Um colar C de 8 kg pode deslizar sem atrito sobre uma barra horizontal entre duas molas idênticas A e B nas quais não está preso. Cada mola tem uma constante $k = 600 \text{ N/m}$. O colar é empurrado para a esquerda contra a mola A, comprimindo esta em 20 mm, e liberado na posição mostrada na figura. Ele então desliza ao longo da barra para a direita e atinge a mola B. Após comprimir esta mola em 20 mm, o colar desliza para esquerda e atinge a mola A, que é comprimida de 20 mm. O ciclo é então repetido. Determine (a) o período do movimento do colar, (b) a velocidade do colar 1,5 s depois de ter sido liberado. (Nota: Isto é um movimento periódico, mas não um movimento harmônico simples.)



Vibrações forçadas

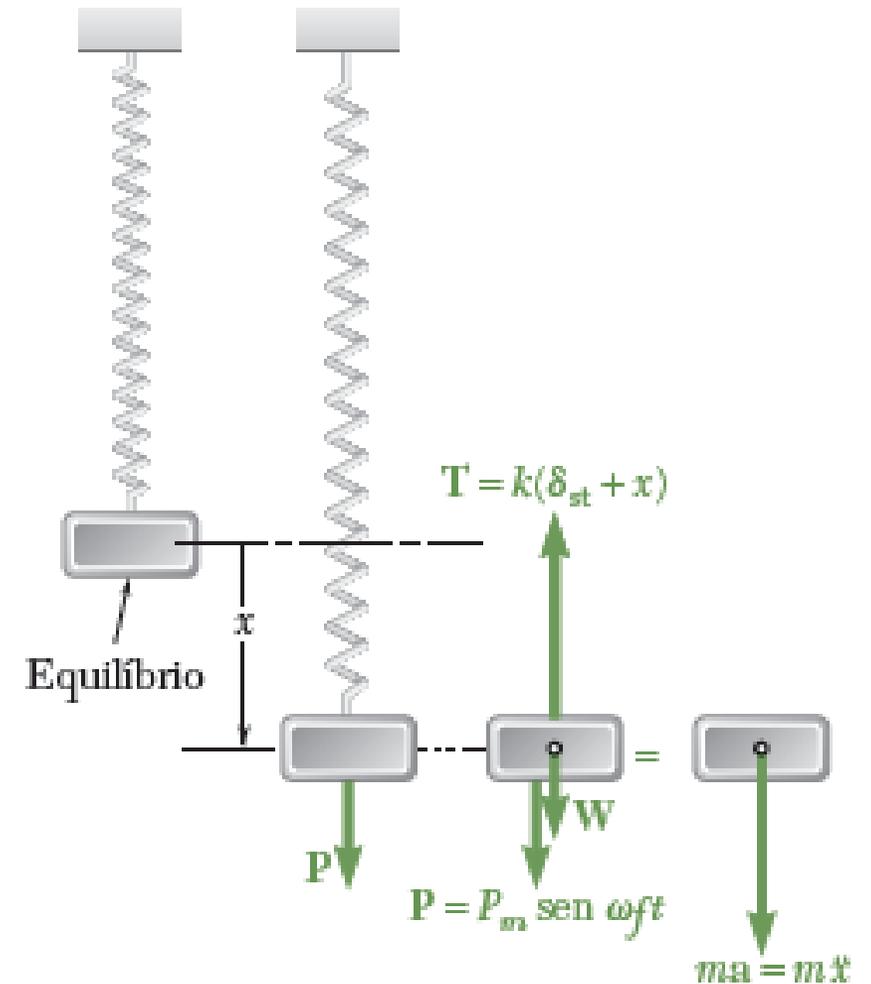
As vibrações mais importantes do ponto de vista de aplicações da engenharia são as *vibrações forçadas* de um sistema. Essas vibrações ocorrem quando um sistema está sujeito a uma força periódica ou quando ele está elasticamente conectado a um suporte que tem um movimento alternado.

Considere primeiramente o caso de um corpo de massa m suspenso por uma mola e sujeito a uma força periódica \mathbf{P} de intensidade $P = P_m \sin \omega_f t$, onde ω_f é a frequência circular de \mathbf{P} e é referenciada como a *frequência forçada circular* do movimento (Fig. 19.7). Essa força pode ser uma força real externa aplicada ao corpo, ou pode ser uma força centrífuga produzida pela rotação de alguma parte desbalanceada do corpo (veja o Problema Resolvido 19.5). Representando por x o deslocamento do corpo medido a partir de sua posição de equilíbrio, escrevemos a equação de movimento

$$+ \downarrow \Sigma F = ma: \quad P_m \sin \omega_f t + W - k(\delta_{est} + x) = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$ temos

$$m\ddot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t$$



Vibrações forçadas

A seguir, consideramos o caso de um corpo de massa m suspenso por uma mola ligada a um suporte móvel cujo deslocamento δ é igual a $\delta_m \text{ sen } \omega_f t$ (Fig. 19.8). Medindo o deslocamento x do corpo a partir da posição de equilíbrio estático correspondente a $\omega_f t = 0$, encontramos que o alongamento total da mola no instante t é $\delta_{est} + x - \delta_m \text{ sen } \omega_f t$. A equação do movimento é, então,

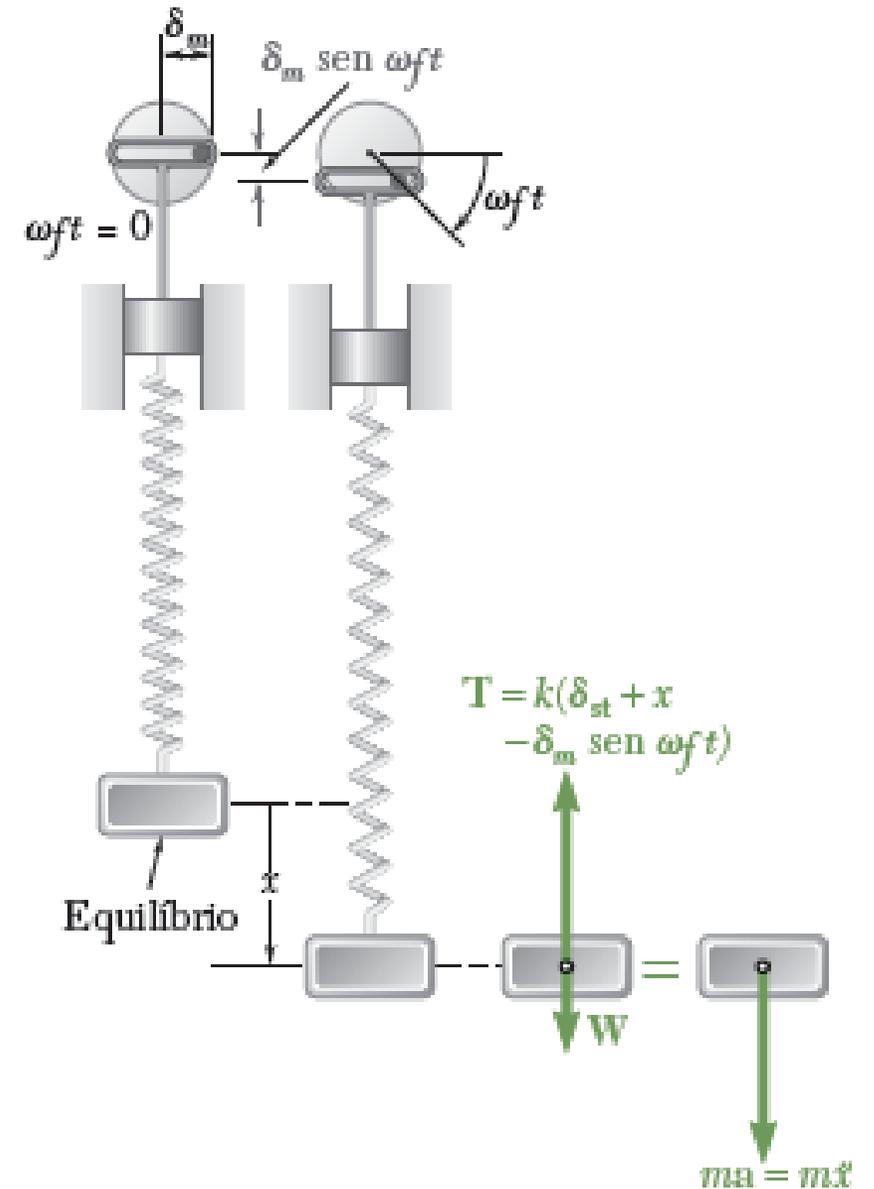
$$+\downarrow \Sigma F = ma: \quad W - k(\delta_{est} + x - \delta_m \text{ sen } \omega_f t) = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, temos

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \text{ sen } \omega_f t \quad (19.31)$$

Uma equação diferencial tal como (19.30) ou (19.31), que tem um segundo membro diferente de zero, é chamada *não homogênea*. Sua solução geral é obtida adicionando-se uma solução particular da equação dada à solução geral da correspondente equação *homogênea* (com o segundo membro igual a zero). Uma *solução particular* de (19.30) ou (19.31) pode ser obtida tentando-se uma solução da forma

$$x_{part} = x_m \text{ sen } \omega_f t \quad (19.32)$$



Vibrações forçadas

$$-m\omega_f^2 x_m \text{ sen } \omega_f t + kx_m \text{ sen } \omega_f t = P_m \text{ sen } \omega_f t$$

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

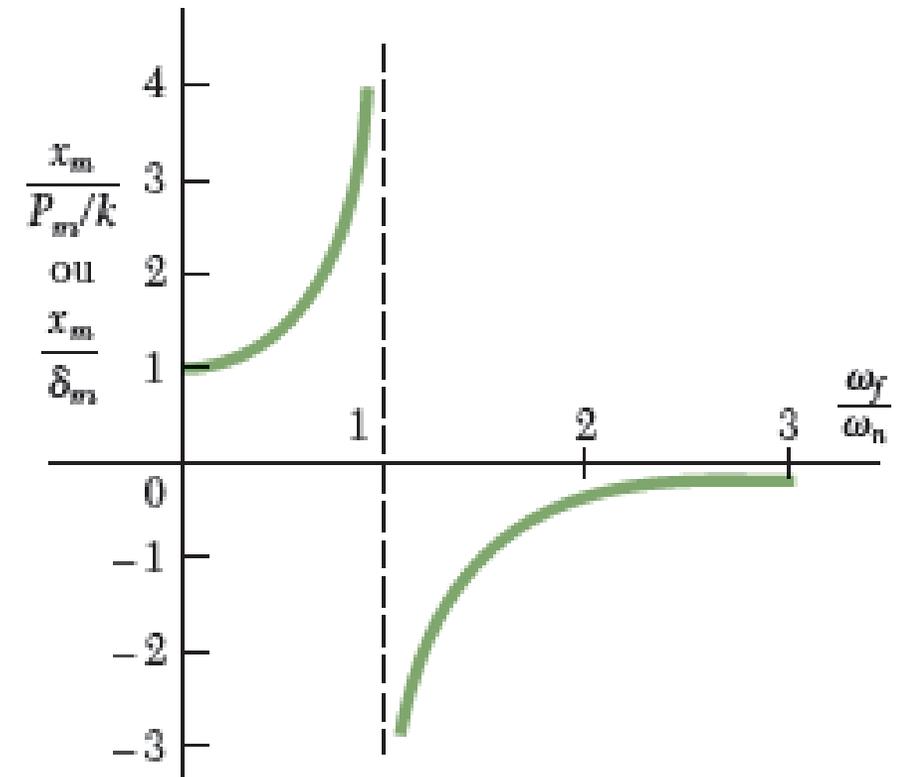
$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2}$$

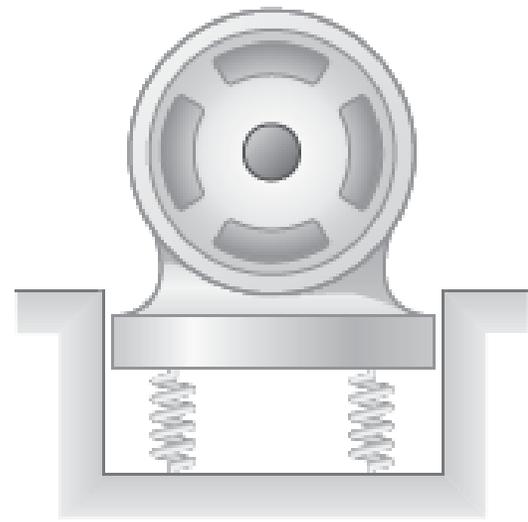
$$x_{\text{comp}} = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \text{ cos } \omega_n t$$

$$x = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \text{ cos } \omega_n t + x_m \text{ sen } \omega_f t$$

$$\text{Fator de ampliação} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

$$v_m = x_m \omega_f \quad a_m = x_m \omega_f^2$$





PROBLEMA RESOLVIDO 19.5

Um motor que pesa 200 kg é suportado por quatro molas, cada uma tendo uma constante de 150 kN/m. O desbalanceamento do rotor é equivalente a um peso de 30 g localizado a 15 cm do eixo de rotação. Sabendo que o motor é restringido a mover-se verticalmente, determine (a) a rotação em rpm na qual ocorrerá ressonância, (b) a amplitude da vibração do motor a uma rotação de 1.200 rpm.

SOLUÇÃO

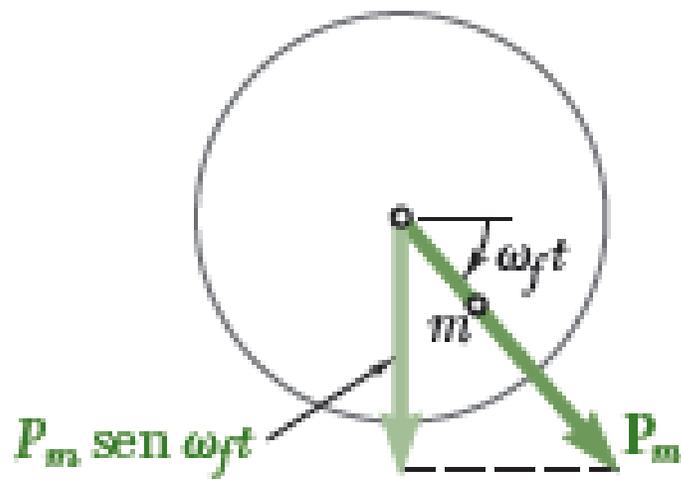
a. Rotação de ressonância. A rotação de ressonância é igual à frequência natural circular ω_n (em rpm) da vibração livre do motor. A massa do motor e a constante equivalente das molas de sustentação são

$$m = 200 \text{ kg}$$

$$k = 4(150 \text{ kN/m}) = 600.000 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{600.000}{200}} = 54,8 \text{ rad/s} = 523 \text{ rpm}$$

Rotação de ressonância = 523 rpm ◀



b. Amplitude de vibração a 1.200 rpm. A velocidade angular do motor e a massa equivalente ao peso de 0,28 N são

$$\omega_n = 1.200 \text{ rpm} = 125,7 \text{ rad/s}$$

$$m = 0,03 \text{ kg}$$

A intensidade da força centrífuga causada pelo desbalanceamento do rotor é

$$P_m = ma_n = mr\omega^2 = (0,03 \text{ kg})(0,15 \text{ m})(125,7 \text{ rad/s})^2 = 71,1 \text{ N}$$

A deflexão estática que seria causada por uma carga constante P_m é

$$\frac{P_m}{k} = \frac{71,1 \text{ N}}{600.000 \text{ N/m}} = \times 1.000 \text{ mm} = 0,1185 \text{ mm}$$

A frequência forçada circular ω_f do movimento é a velocidade angular do motor,

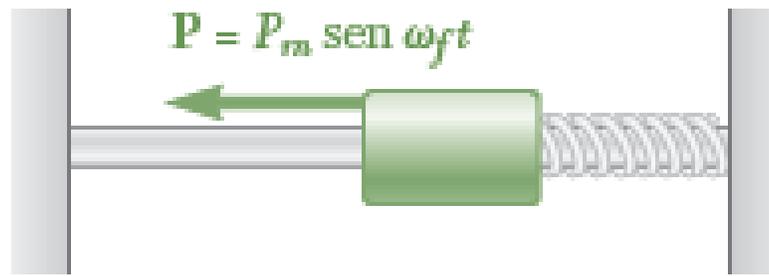
$$\omega_f = \omega = 125,7 \text{ rad/s}$$

Substituindo os valores de P_m/k , ω_f e ω_n na Eq. (19.33), obtemos

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} = \frac{0,1185 \text{ mm}}{1 - (125,7/54,8)^2} = -0,0278 \text{ mm}$$

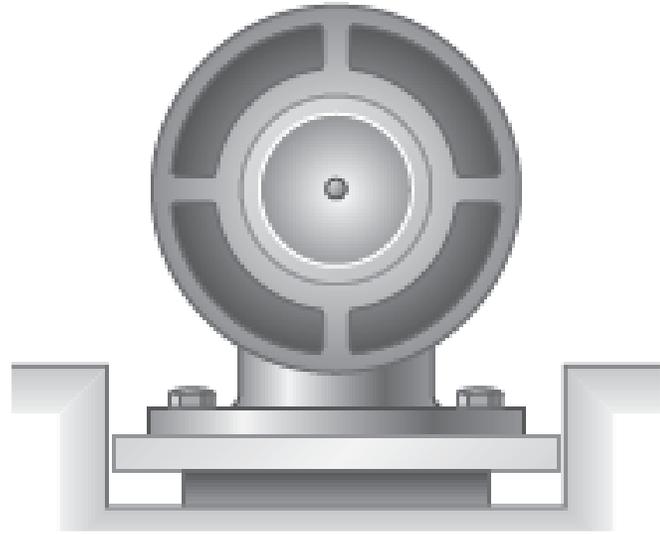
$$x_m = 0,0278 \text{ mm (defasado)} \quad \blacktriangleleft$$

exercícios



- 19.100** Um cursor de 5 kg pode deslizar sobre uma barra horizontal sem atrito e está ligado a uma mola de constante 550 N/m. Sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m \sin \omega_f t$, onde $P_m = 15$ N. Determine a amplitude do movimento do cursor se (a) $\omega_f = 5$ rad/s, (b) $\omega_f = 10$ rad/s.
- 19.101** Um cursor de 5 kg pode deslizar sobre uma barra horizontal sem atrito e está ligado a uma mola de constante k . Sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m \sin \omega_f t$, onde $P_m = 10$ N e $\omega_f = 5$ rad/s. Determine o valor da constante de mola k sabendo que o movimento do cursor tem uma amplitude de 150 mm e está (a) em fase com a força aplicada, (b) defasado com a força aplicada.
- 19.102** Um cursor de massa m que desliza sobre uma barra horizontal sem atrito está ligado a uma mola de constante k e sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m \sin \omega_f t$. Determine o intervalo de valores de ω_f para o qual a amplitude da vibração excede três vezes a deflexão estática causada por uma força constante de intensidade P_m .

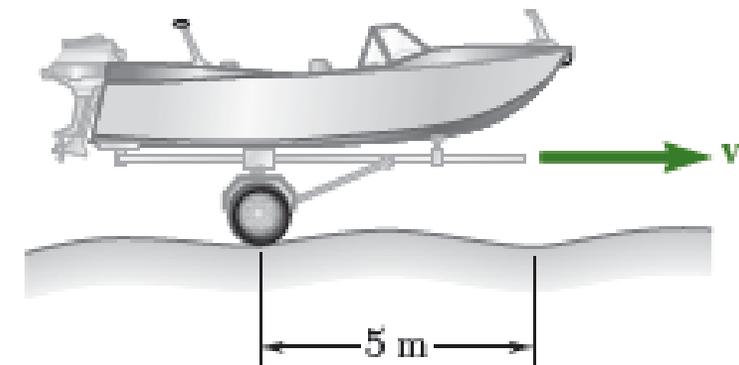
exercícios



19.119 O desbalanceamento do rotor de um motor de 200 kg é equivalente a uma massa de 100 g localizada a 150 mm do eixo de rotação. A fim de limitar para 1 N a intensidade da força oscilante exercida na fundação quando o motor gira a velocidades de 100 rpm ou acima, uma base amortecedora é colocada entre o motor e a fundação. Determine (a) a constante máxima admissível da mola k da base, (b) a amplitude correspondente da força oscilante exercida na fundação quando o motor está girando a 200 rpm.

19.120 Um motor de 180 kg é suportado por molas de constante total 150 kN/m. O desbalanceamento do rotor é equivalente a uma massa de 28 g localizado a 150 mm do eixo de rotação. Determine o intervalo de velocidades do motor para o qual a amplitude da força oscilante exercida na fundação é menor que 20 N.

19.125 Um pequeno reboque e sua carga têm uma massa total de 250 kg. O reboque é suportado por duas molas, cada uma de constante 10 kN/m, e puxado sobre uma estrada cuja superfície pode ser aproximada por uma curva senoidal com amplitude de 40 mm e comprimento de onda de 5 m (ou seja, a distância entre cristas sucessivas é de 5 m e a distância vertical da crista para a depressão é de 80 mm). Determine (a) a velocidade em que ocorrerá ressonância, (b) a amplitude da vibração do reboque a uma velocidade de 50 km/h.



Vibrações livres amortecidas

Como um exemplo, vamos novamente considerar um corpo de massa m suspenso por uma mola de constante k , considerando que o corpo está ligado ao êmbolo de um amortecedor (Fig. 19.10). A intensidade da força de atrito exercida sobre o êmbolo pelo fluido que o envolve é igual a $c\dot{x}$; onde a constante c , expressa em $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$ e conhecida como o *coeficiente de amortecimento viscoso*, depende das propriedades físicas do fluido e da construção do amortecedor. A equação de movimento é

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \quad W - k(\delta_{\text{est}} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad x = e^{\lambda t}$$

equação característica

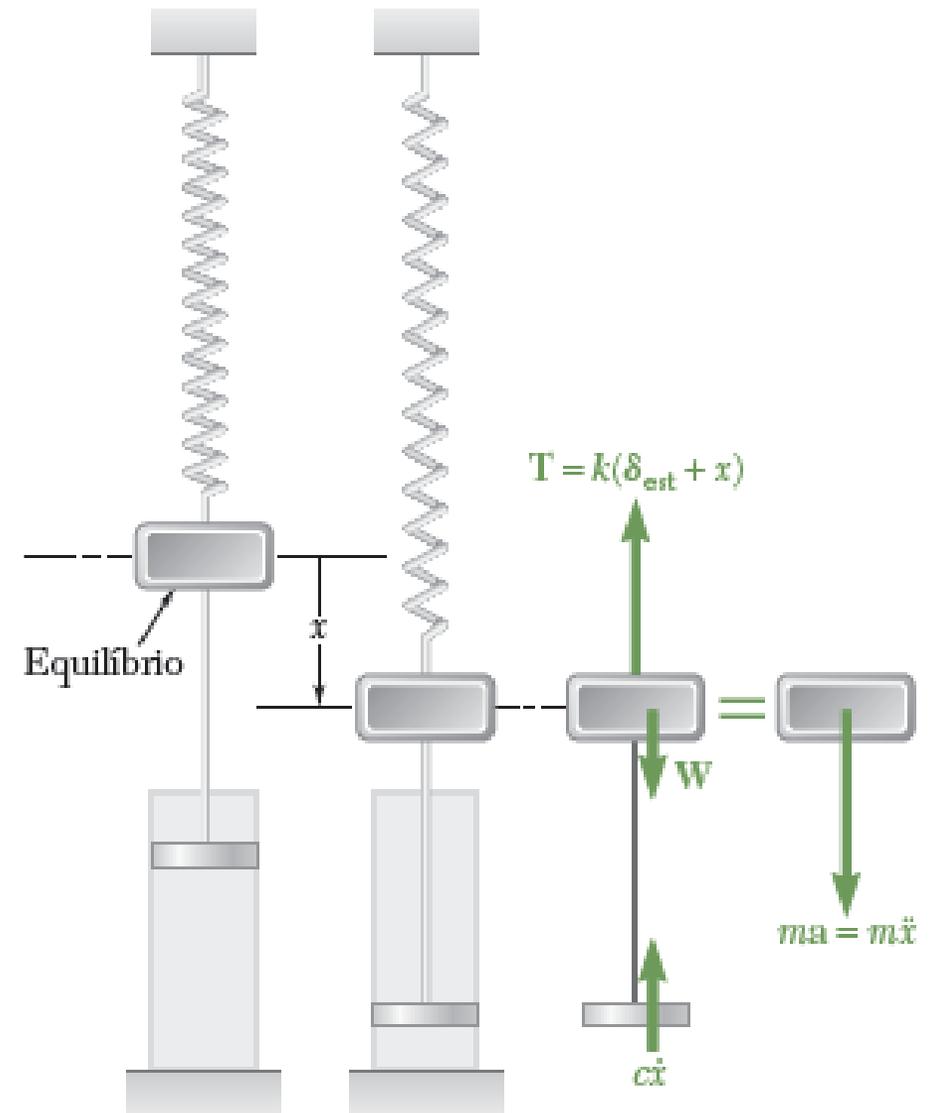
$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

coeficiente de amortecimento crucial c_c

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$



Vibrações livres amortecidas

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

1. *Amortecimento supercrucial*; $c > c_c$. As raízes λ_1 e λ_2 da equação característica (19.39) são reais e distintas e a solução geral da equação diferencial (19.38) é

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (19.42)$$

Essa solução corresponde a um movimento não vibratório. Como λ_1 e λ_2 são negativos, x tende a zero quando t aumenta indefinidamente. Contudo, o sistema na realidade retorna à sua posição de equilíbrio após um tempo finito.

2. *Amortecimento crucial*: $c = c_c$. A equação característica tem uma raiz dupla $\lambda = -c_c/2m = -\omega_n$ e a solução geral de (19.38) é

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (19.43)$$

O movimento obtido é novamente não vibratório. Sistemas criticamente amortecidos são de interesse especial em aplicações de engenharia, pois eles retornam à sua posição de equilíbrio no menor tempo possível sem oscilação.

Vibrações livres amortecidas

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

3. *Amortecimento subcrucial*: $c < c_c$ As raízes da Eq. (19.39) são complexas e conjugadas, e a solução geral de (19.38) é da forma

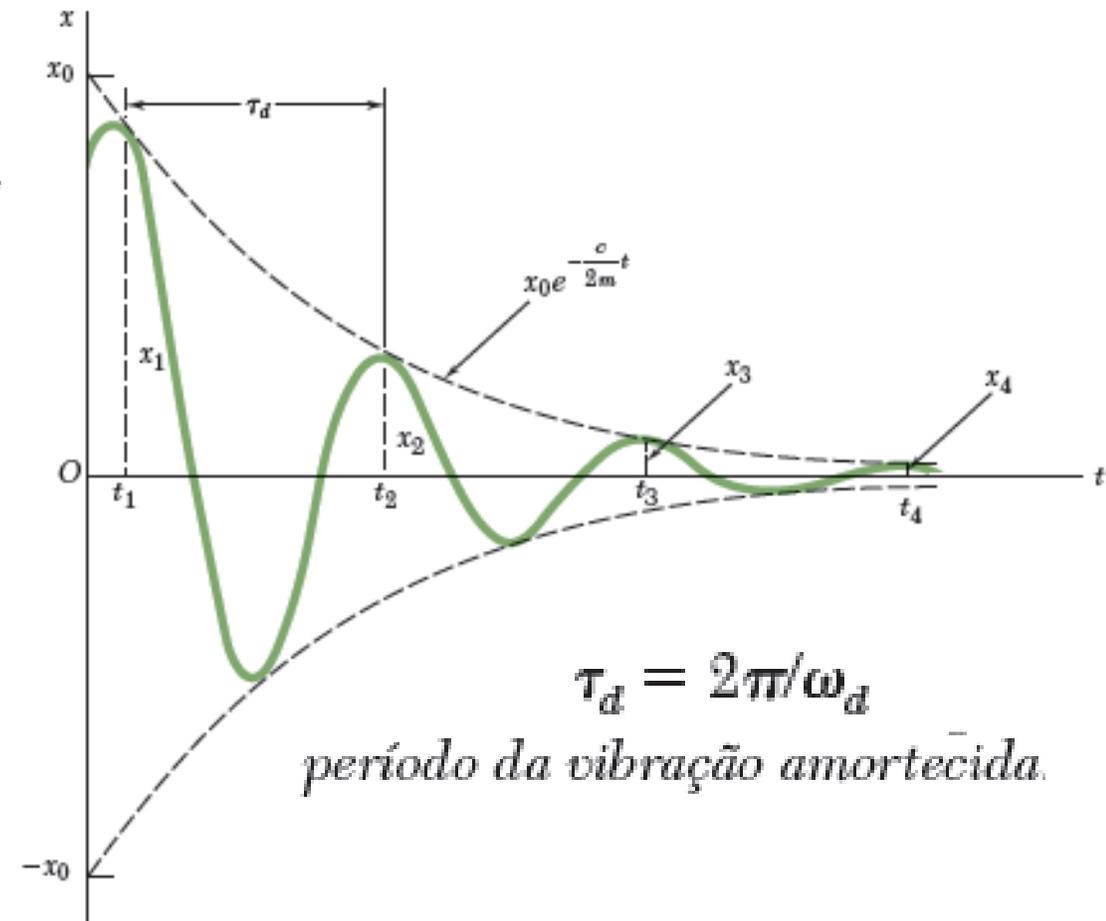
$$x = e^{-(c/2m)t}(C_1 \text{ sen } \omega_d t + C_2 \text{ cos } \omega_d t) \quad (19.44)$$

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad \omega_d < \omega_n$$

ω_d *frequência circular* da vibração amortecida

c/c_c *fator de amortecimento*

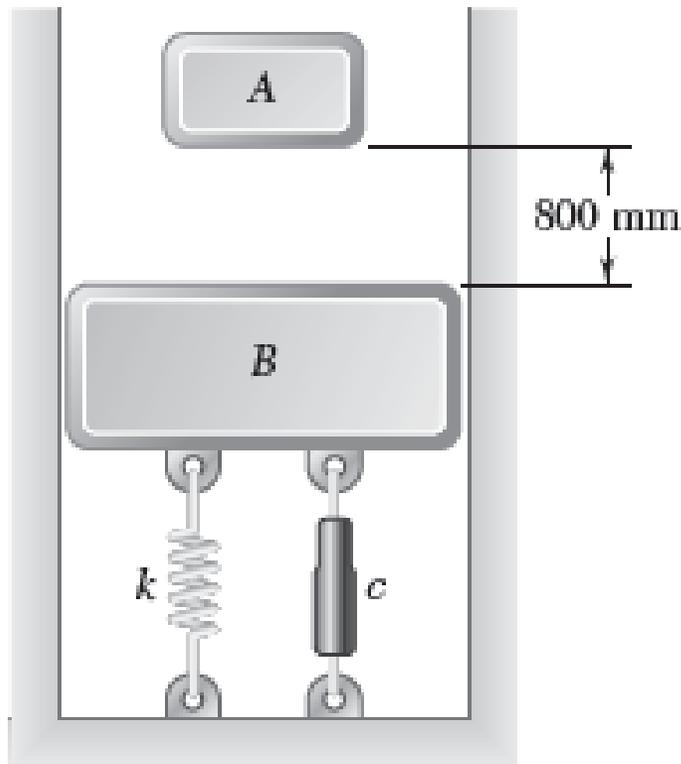
$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \text{ sen } (\omega_d t + \phi)$$



exercícios

19.127 Mostre que, no caso de amortecimento supercrucial ($c > c_c$), um corpo nunca passa pela sua posição de equilíbrio O (a) se ele é liberado sem velocidade inicial de uma posição arbitrária, ou (b) se ele parte de O com uma velocidade inicial arbitrária.

19.128 Mostre que, no caso de amortecimento supercrucial ($c > c_c$), um corpo liberado de uma posição arbitrária com uma velocidade inicial arbitrária não pode passar mais de uma vez pela sua posição de equilíbrio.



19.134 Um bloco A de 4 kg é solto de uma altura de 800 mm sobre um bloco B de 9 kg que está em repouso. O bloco B é suportado por uma mola de constante $k = 1.500 \text{ N/m}$ e está unido a um amortecedor de coeficiente de amortecimento $c = 230 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. Sabendo que não há rebote, determine a distância máxima a que os blocos vão se mover após o impacto.