

LOM3100 Dinâmica - 2017

4. Dinâmica do corpo rígido.

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Equações de movimento para um corpo rígido

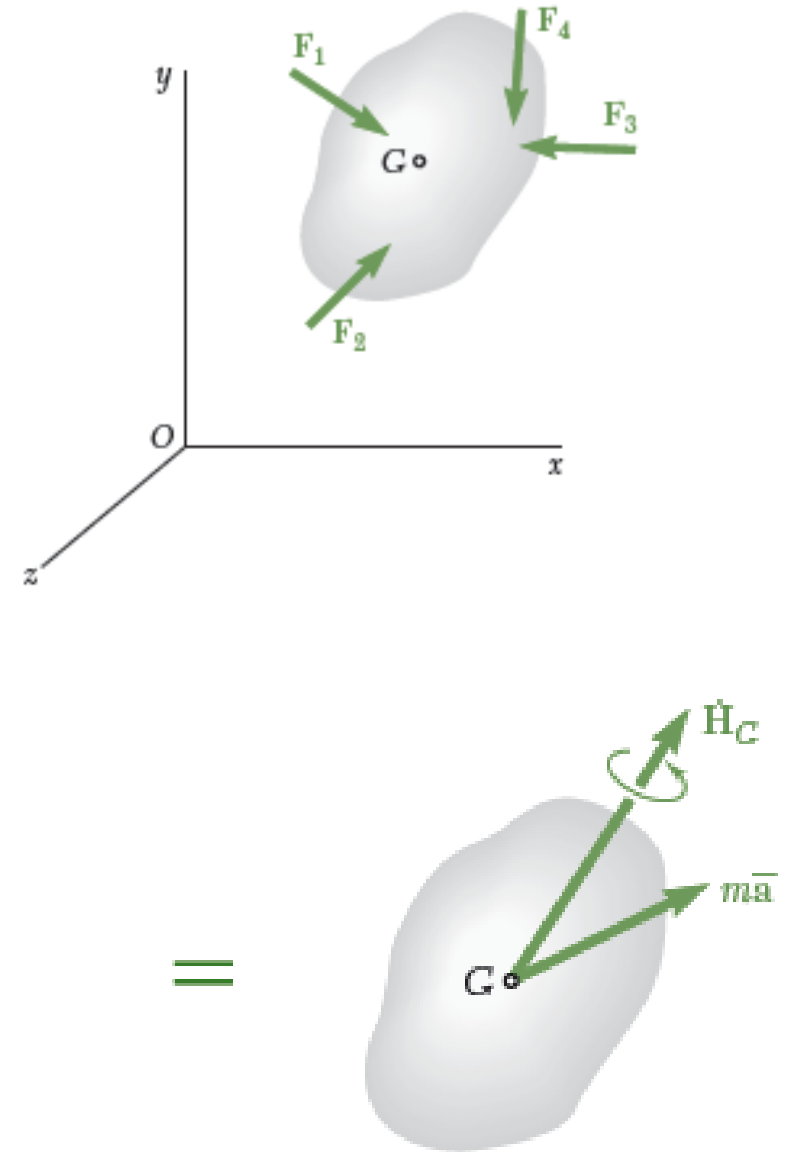
Considere um corpo rígido sob a ação de várias forças externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ (Fig. 16.1). Podemos assumir que o corpo é constituído de um grande número n de partículas de massas Δm_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e aplicar os resultados obtidos no Cap. 14 para um sistema de partículas (Fig. 16.2). Considerando inicialmente o movimento do centro de massa G do corpo em relação ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$, recordamos a Eq. (14.16) e escrevemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m \bar{\mathbf{a}} \quad (16.1)$$

onde m é a massa do corpo e $\bar{\mathbf{a}}$ é a aceleração do centro de massa G . Voltando-nos agora ao movimento do corpo em relação ao sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$, recordamos a Eq. (14.23) e escrevemos

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (16.2)$$

onde $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa a taxa de variação de $\mathbf{H}_G$, a quantidade de movimento angular em relação a G do sistema de partículas que formam o corpo rígido. No que se segue, vamos nos referir a $\mathbf{H}_G$ simplesmente como a *quantidade de movimento angular do corpo rígido em relação a seu centro de massa G* . As Eqs. (16.1) e (16.2), juntas, expressam que o sistema das forças externas é equipolente ao sistema constituído do vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G e ao binário de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 16.3).*



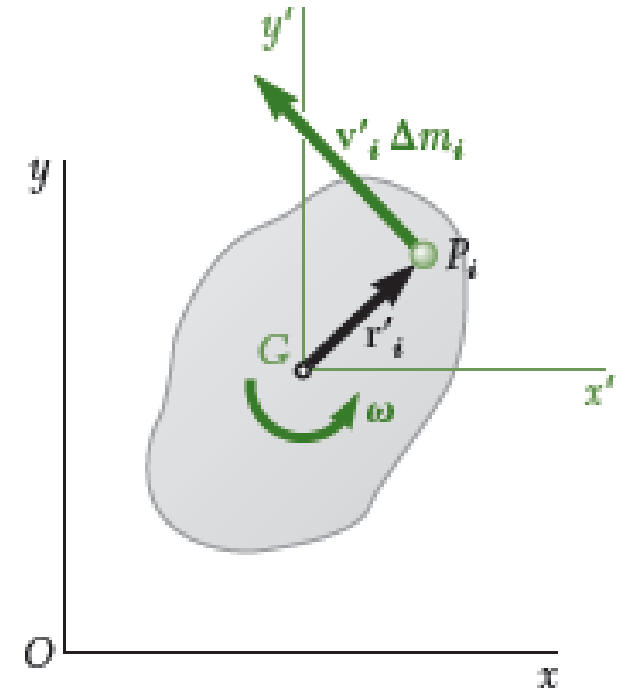
Movimento plano de um corpo rígido: quantidade de movimento angular

Considere uma placa rígida em movimento plano. Assumindo que a placa é constituída de um grande número n de partículas P_i de massas Δm_i e recordando a Eq. (14.24) da Seção 14.5, notamos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ da placa em relação a seu centro de massa G pode ser calculada tomando-se os momentos em relação a G das quantidades de movimento das partículas da placa em seu movimento em relação aos referenciais Oxy ou $Gx'y'$ (Fig. 16.4). Escolhendo o último método, escrevemos

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \Delta m_i) \quad (16.3)$$

onde $\mathbf{r}'_i$ e $\mathbf{v}'_i \Delta m_i$ representam, respectivamente, o vetor de posição e a quantidade de movimento linear da partícula P_i em relação ao sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'$. Mas como a partícula pertence à placa, temos $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da placa no instante considerado. Escrevemos

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \Delta m_i]$$



Movimento plano de um corpo rígido: quantidade de movimento angular

a soma $\sum r_i'^2 \Delta m_i$ representa o momento de inércia $\bar{I}$ da placa em relação a um eixo perpendicular à placa passando pelo centro de massa, concluímos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_C$ da placa em relação ao seu centro de massa é

$$\mathbf{H}_C = \bar{I} \boldsymbol{\omega} \quad (16.4)$$

Diferenciando ambos os membros da Eq. (16.4), obtemos

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \bar{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I} \boldsymbol{\alpha} \quad (16.5)$$

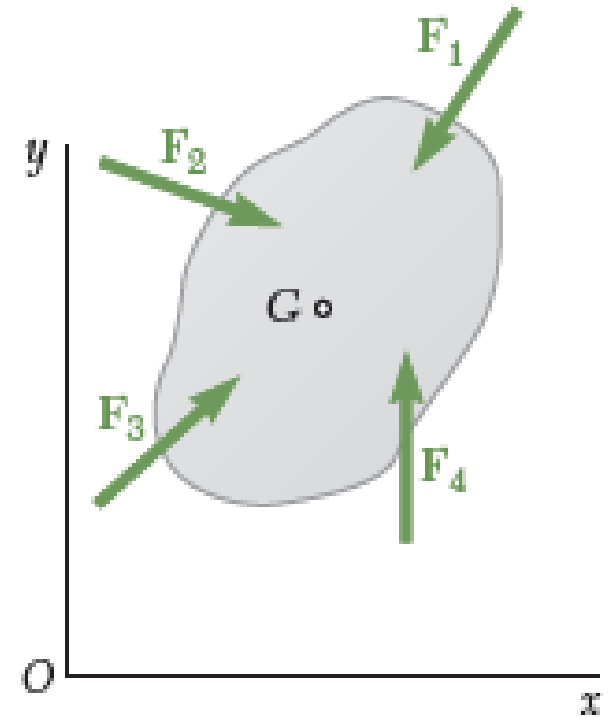
Portanto, a taxa da variação da quantidade de movimento angular da placa é representada por um vetor de mesma direção e sentido que $\boldsymbol{\alpha}$ (isto é, perpendicular à placa) e de intensidade $\bar{I} \alpha$.

Movimento plano de um corpo rígido: Princípio de D'Alembert

Considere uma placa rígida de massa m que se desloca sob a ação de várias forças externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, contidas no plano da placa (Fig. 16.5). Substituindo o valor de $\mathbf{H}_G$ da Eq. (16.5) na Eq. (16.2) e escrevendo as equações fundamentais do movimento (16.1) e (16.2) na forma escalar, temos

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \quad (16.6)$$

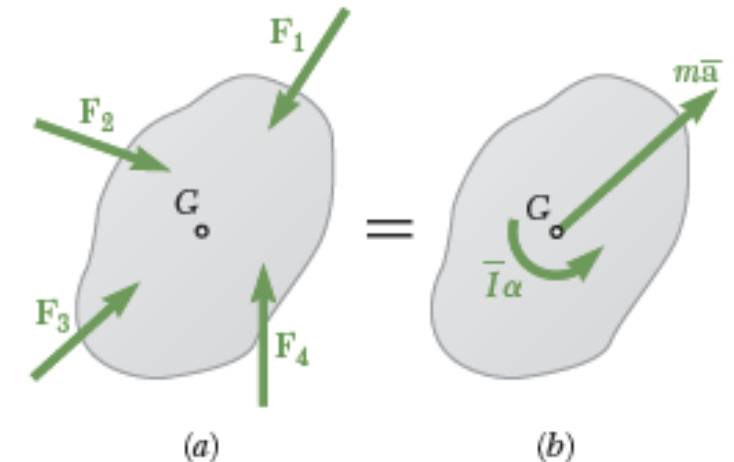
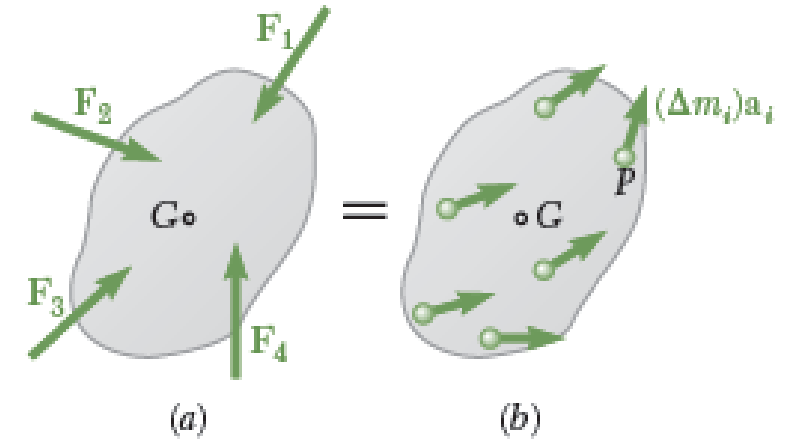
As equações de (16.6) mostram que a aceleração do centro de massa G da placa e sua aceleração angular α podem ser facilmente obtidas quando a resultante das forças externas que atuam na placa e seu momento resultante em relação a G tiverem sido determinados. Dadas as condições iniciais apropriadas, as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa e a coordenada angular θ da placa podem então ser obtidas por integração em qualquer instante t . Portanto, *o movimento da placa é completamente definido pela resultante e pelo momento resultante em relação a G das forças externas que atuam sobre ela.*



Movimento plano de um corpo rígido: Princípio de D'Alembert

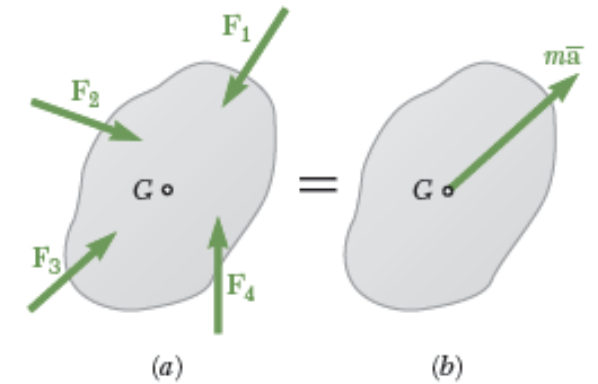
Como o movimento de um corpo rígido depende somente da resultante e do momento resultante das forças externas que atuam sobre ele, segue-se que *dois sistemas de forças que são equipolentes*, isto é, que têm a mesma resultante e o mesmo momento resultante, *são também equivalentes*; isto é, eles têm exatamente o mesmo efeito sobre um dado corpo rígido.*

Considere, em particular, o sistema de forças externas que atuam sobre um corpo rígido (Fig. 16.6a) e o sistema das forças efetivas associadas às partículas que formam esse corpo rígido (Fig. 16.6b). Foi mostrado na Seção 14.2 que os dois sistemas assim definidos são equipolentes. Mas como as partículas consideradas formam agora um corpo rígido, segue-se que os dois sistemas são também equivalentes. Podemos então afirmar que *as forças externas que atuam sobre um corpo rígido são equivalentes às forças efetivas das várias partículas que formam o corpo*. Essa afirmação é conhecida como *princípio de d'Alembert*, devido ao matemático francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), apesar do enunciado original de d'Alembert ter sido escrito de forma um pouco diferente.

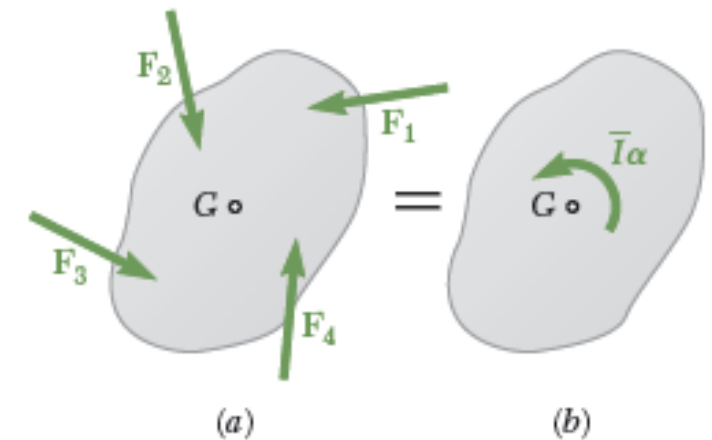


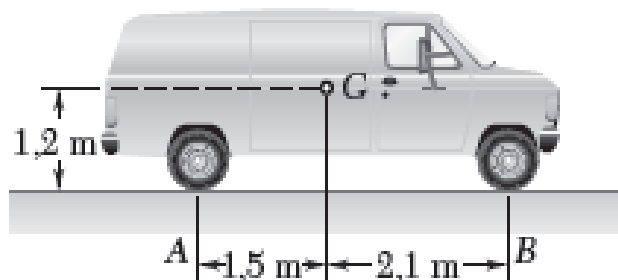
Movimento plano de um corpo rígido: translação e rotação

Translação. No caso particular de um corpo em translação, a aceleração angular do corpo é identicamente igual a zero e suas forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G (Fig. 16.8). Assim, a resultante das forças externas que atuam sobre um corpo rígido em translação passa pelo centro de massa do corpo e é igual a $m\bar{\mathbf{a}}$.



Rotação em torno do centro de massa. Quando uma placa, ou, mais genericamente, um corpo simétrico em relação ao plano de referência, gira em torno de um eixo fixo perpendicular ao plano de referência, passando pelo seu centro de massa G , dizemos que o corpo está em *rotação em torno do centro de massa*. Como a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ é identicamente igual a zero, as forças efetivas do corpo se reduzem ao binário $\bar{I}\alpha$ (Fig. 16.9). Assim, as forças externas que atuam em um corpo em rotação em torno do centro de massa são equivalentes a um binário de momento $\bar{I}\alpha$.





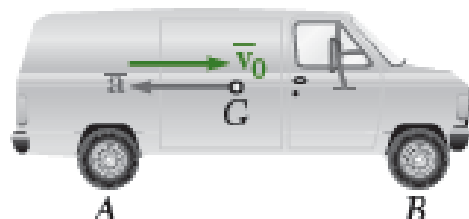
PROBLEMA RESOLVIDO 16.1

Quando a velocidade escalar de avanço do caminhão mostrado na figura era de 10 m/s, os freios foram acionados bruscamente, fazendo com que as quatro rodas parassem de girar. Foi observado que o caminhão derrapou sobre 7 m de pista até o repouso. Determine a intensidade da reação normal e da força de atrito em cada roda enquanto o caminhão derrapava até o repouso.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Escolhendo o sentido positivo para a direita e usando as equações de movimento uniformemente acelerado, escrevemos

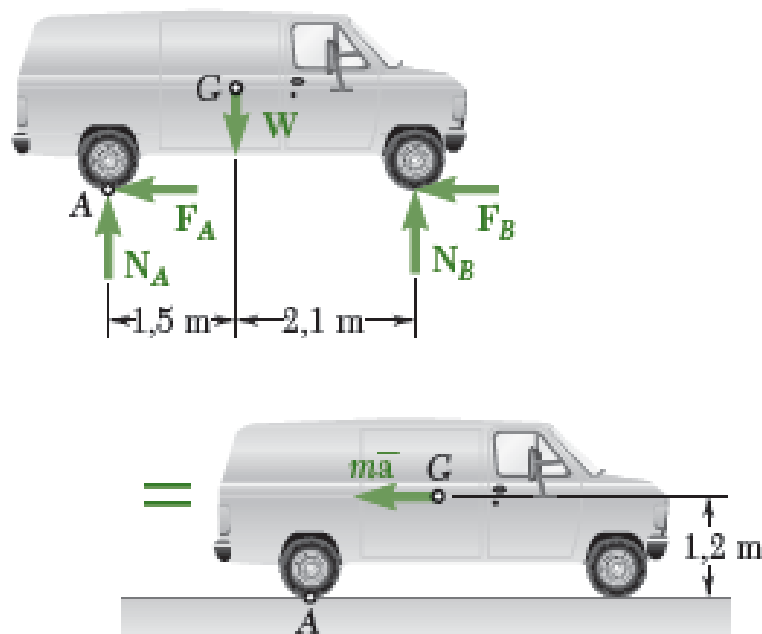
$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= +10 \text{ m/s} & \bar{v}^2 &= \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}\bar{x} & 0 &= (10)^2 + 2\bar{a}(7) \\ \bar{a} &= -7,14 \text{ m/s}^2 & \bar{a} &= 7,14 \text{ m/s}^2 \leftarrow \end{aligned}$$



Equações de movimento. As forças externas consistem no peso W do caminhão, nas reações normais e nas forças de atrito nas rodas. (Os vetores N_A e F_A representam a soma das reações nas rodas traseiras, enquanto N_B e F_B representam a soma das reações nas rodas dianteiras.) Como o caminhão está em translação, as forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{a}$ ligado a G . Três equações de movimento são obtidas ao expressar-se que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas.

$$+ \uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}} :$$

$$N_A + N_B - W = 0$$



Como $F_A = \mu_k N_A$ e $F_B = \mu_k N_B$, onde μ_k é o coeficiente de atrito cinético, encontramos que

$$F_A + F_B = \mu_k (N_A + N_B) = \mu_k mg$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{efet}}: \quad -(F_A + F_B) = -m\bar{a}$$

$$-\mu_k mg = -m(-7,14)$$

$$\mu_k = \frac{7,14}{9,81} = 0,728$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = \Sigma (M_A)_{\text{efet}}: \quad -W(1,5 \text{ m}) + N_B(3,6 \text{ m}) = m\bar{a}(1,2 \text{ m})$$

$$-W(1,5 \text{ m}) + N_B(3,6 \text{ m}) = \frac{W}{9,81 \text{ m/s}^2} (7,14 \text{ m/s})^2 (1,2 \text{ m})$$

$$N_B = 0,659W$$

$$F_B = \mu_k N_B = (0,728)(0,659W) \quad F_B = 0,48W$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: \quad N_A + N_B - W = 0$$

$$N_A + 0,659W - W = 0$$

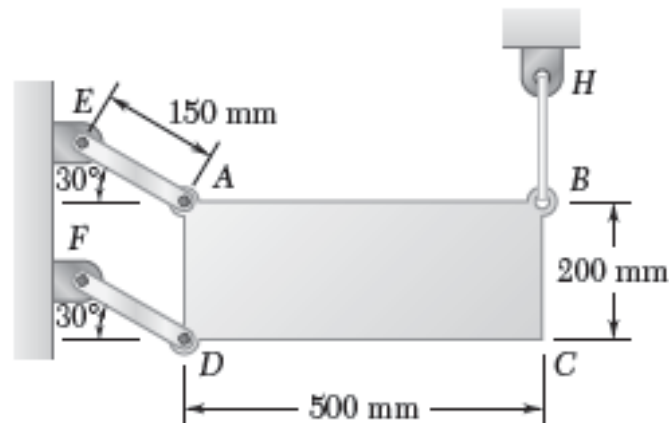
$$N_A = 0,341W$$

$$F_A = \mu_k N_A = (0,728)(0,341W) \quad F_A = 0,248W$$

Reações em cada roda. Recordando que os valores calculados anteriormente representam a soma das reações nas duas rodas dianteiras ou nas duas rodas traseiras, obtemos as intensidades das reações em cada roda escrevendo

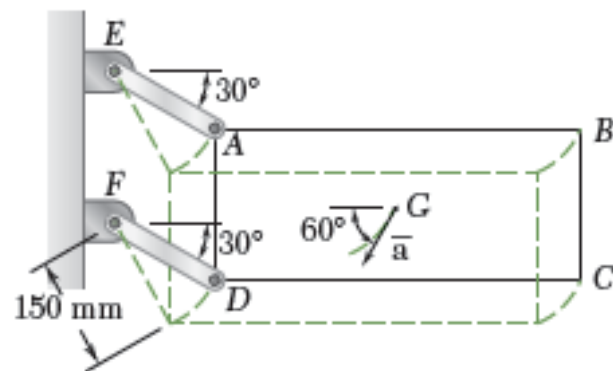
$$N_{\text{diam.}} = \frac{1}{2} N_B = 0,3295W \quad N_{\text{tras.}} = \frac{1}{2} N_A = 0,1705W \quad \blacktriangleleft$$

$$F_{\text{diam.}} = \frac{1}{2} F_B = 0,24W \quad F_{\text{tras.}} = \frac{1}{2} F_A = 0,124W \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 16.2

A placa fina $ABCD$ de 8 kg de massa é mantida na posição mostrada pelo fio BH e pelas duas hastes de conexão AE e DF . Desprezando as massas das hastes de conexão, determine, imediatamente após o fio BH ser cortado, (a) a aceleração da placa e (b) a força em cada haste de conexão.

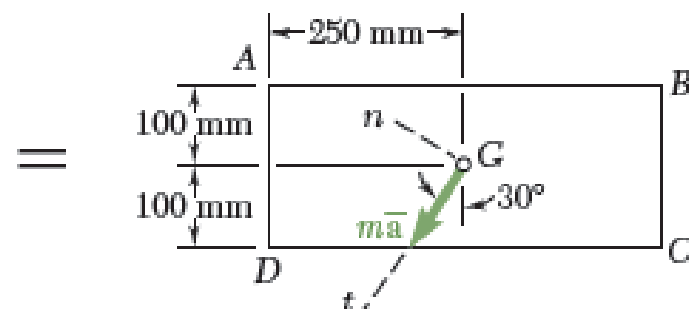
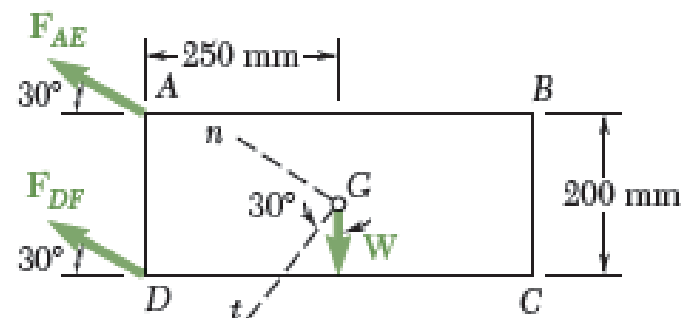


SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Depois de o fio BH ter sido cortado, observamos que os cantos A e D se movem ao longo de circunferências paralelas de raios iguais a 150 mm centradas, respectivamente, em E e F . O movimento da placa é, portanto, uma translação curvilínea; as partículas que formam a placa se movem ao longo de circunferências paralelas de 150 mm de raio.

No instante em que o fio BH é cortado, a velocidade da placa é nula. Assim, a aceleração $\bar{a}$ do centro de massa G da placa é tangente à trajetória circular que será descrita por G .

Equações de movimento. As forças externas consistem no peso W e nas forças F_{AE} e F_{DF} exercidas pelas hastes de conexão. Como a placa está em translação, as forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{a}$ ligado a G e dirigido ao longo do eixo t . Uma equação de diagrama de corpo livre é traçada para mostrar que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas.



a. Aceleração da placa.

$$+ \swarrow \Sigma F_t = \Sigma (F_t)_{\text{efet}}:$$

$$W \cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$mg \cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = g \cos 30^\circ = (9,81 \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ \quad (1)$$

$$\bar{a} = 8,50 \text{ m/s}^2 \nearrow 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b. Forças nas hastes de conexão AE e DF.

$$+\searrow \Sigma F_n = \Sigma (F_n)_{\text{efet}}: \quad F_{AE} + F_{DF} - W \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$+\downarrow \Sigma M_G = \Sigma (M_G)_{\text{efet}}:$$

$$(F_{AE} \sin 30^\circ)(250 \text{ mm}) - (F_{AE} \cos 30^\circ)(100 \text{ mm}) \\ + (F_{DF} \sin 30^\circ)(250 \text{ mm}) + (F_{DF} \cos 30^\circ)(100 \text{ mm}) = 0$$

$$38,4F_{AE} + 211,6F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = -0,1815F_{AE} \quad (3)$$

Substituindo F_{DF} de (3) em (2), escrevemos

$$F_{AE} - 0,1815F_{AE} - W \sin 30^\circ = 0$$

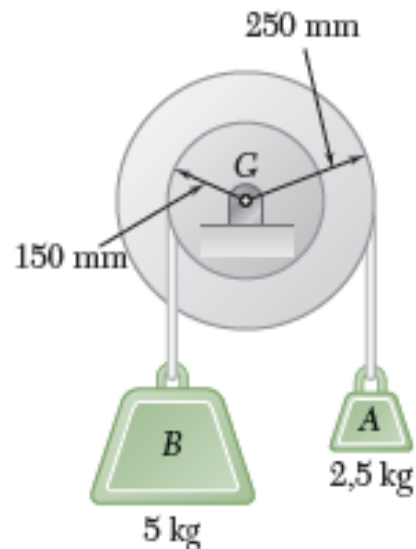
$$F_{AE} = 0,6109W$$

$$F_{DF} = 0,1815(0,6109W) = -0,1109W$$

Observando que $W = mg = (8 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 78,48 \text{ N}$, temos

$$F_{AE} = 0,6109(78,48 \text{ N}) \quad F_{AE} = 47,9 \text{ N } T \quad \blacktriangleleft$$

$$F_{DF} = -0,1109(78,48 \text{ N}) \quad F_{DF} = 8,70 \text{ N } C \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 16.3

Uma polia que pesa 6 kg e tem um raio de giração de 200 mm está unida a dois blocos, como mostrado na figura. Considerando que não exista atrito no eixo, determine a aceleração angular da polia e a aceleração de cada bloco.

SOLUÇÃO

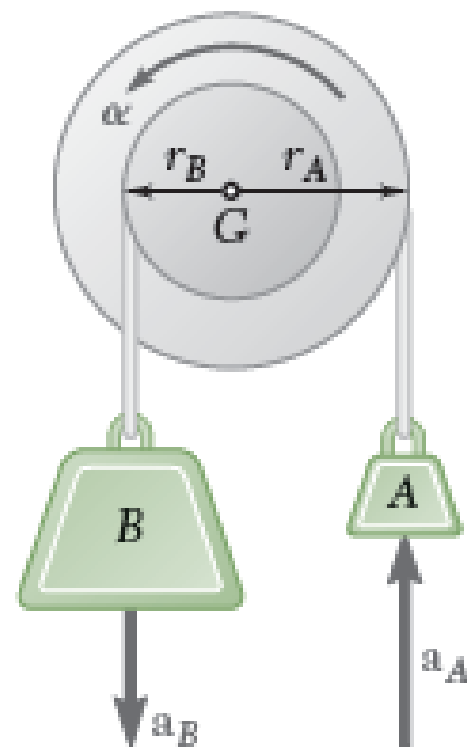
Sentido do movimento. Embora um sentido arbitrário para o movimento possa ser considerado (já que as forças de atrito não estão envolvidas) e posteriormente verificado pelo sinal da resposta, é provável preferirmos determinar em primeiro lugar o sentido real de rotação da polia. O peso do bloco B necessário para manter o equilíbrio da polia quando ela está sob a ação do bloco A de 2,5 kg é determinado inicialmente. Escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0: \quad m_B g (150 \text{ mm}) - (2,5 \text{ kg})g (250 \text{ mm}) = 0 \quad m_B = 4,167 \text{ kg}$$

Como o bloco B pesa realmente 5 kg, a polia girará no sentido anti-horário.

Cinemática do movimento. Supondo que α tenha o sentido anti-horário e observando que $a_A = r_A \alpha$ e $a_B = r_B \alpha$, obtemos

$$\mathbf{a}_A = (0,25 \text{ m})\alpha \uparrow \quad \mathbf{a}_B = (0,15 \text{ m})\alpha \downarrow$$



Equações de movimento. Um sistema único constituído pela polia e pelos dois blocos é considerado. As forças externas a este sistema são os pesos da polia e dos dois blocos e a reação em G . (As forças exercidas pelos cabos sobre a polia e sobre os blocos, são internas ao sistema considerado e se anulam.) Como o movimento da polia é uma rotação em torno do centro de massa e o movimento de cada bloco é uma translação, as forças efetivas se reduzem ao binário $\bar{I}\alpha$ e aos dois vetores $m\mathbf{a}_A$ e $m\mathbf{a}_B$. O momento de inércia em torno do centro de massa da polia é

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (6 \text{ kg})(0,2 \text{ m})^2 = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Como o sistema das forças externas é equipolente ao sistema de forças efetivas, escrevemos

$$+\curvearrowright \Sigma M_G = \Sigma (M_G)_{\text{efet}}:$$

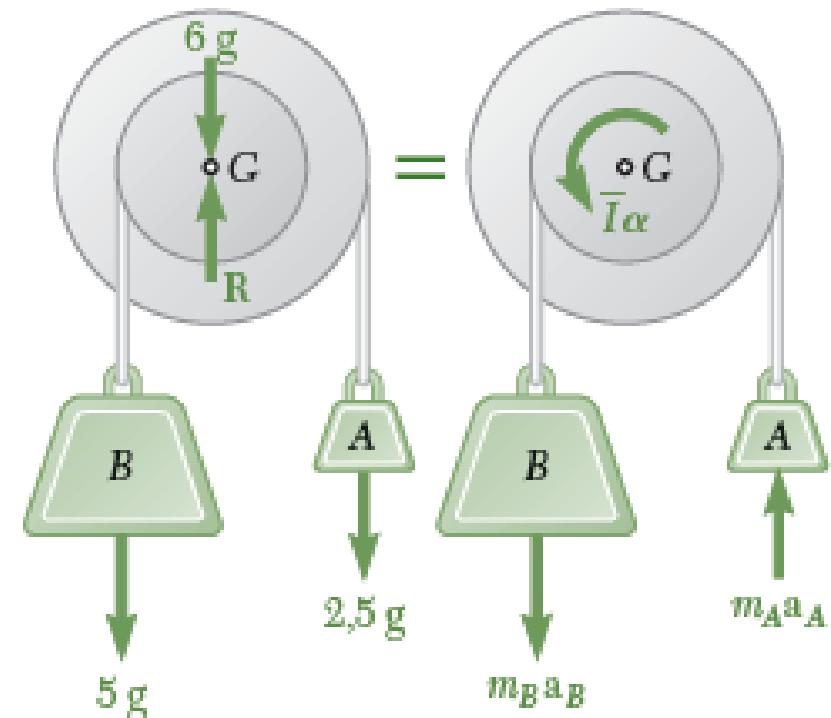
$$(5 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(0,15 \text{ m}) - (2,5 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(0,25 \text{ m}) = +\bar{I}\alpha + m_B a_B (0,15 \text{ m}) + m_A a_A (0,25 \text{ m})$$

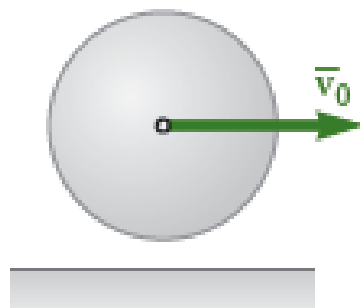
$$7,3575 - 6,1312 = 0,24\alpha + 5(0,15\alpha)(0,15) + 2,5(0,25\alpha)(0,25)$$

$$\alpha = +2,41 \text{ rad/s}^2 \quad \alpha = 2,41 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \blacktriangleleft$$

$$a_A = r_A \alpha = (0,25 \text{ m})(2,41 \text{ rad/s}^2) \quad \mathbf{a}_A = 0,603 \text{ m/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

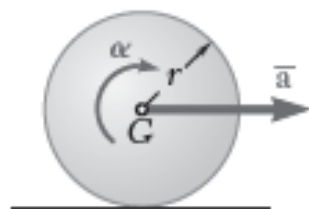
$$a_B = r_B \alpha = (0,15 \text{ m})(2,41 \text{ rad/s}^2) \quad \mathbf{a}_B = 0,362 \text{ m/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESOLVIDO 16.5

Uma esfera uniforme de massa m e raio r é lançada sobre uma superfície horizontal rugosa com uma velocidade linear $\bar{v}_0$ e velocidade angular nula. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e o piso, determine (a) o instante t_1 em que a esfera começa a rolar sem deslizar e (b) a velocidade linear e a velocidade angular da esfera no instante t_1 .



SOLUÇÃO

Equações de movimento. O sentido positivo é escolhido para a direita para $\bar{a}$ e no sentido horário para α . As forças externas que atuam sobre a esfera consistem no peso $\mathbf{W}$, na reação normal $\mathbf{N}$ e na força de atrito $\mathbf{F}$. Como o ponto da esfera em contato com a superfície está deslizando para a direita, a força de atrito $\mathbf{F}$ está dirigida para a esquerda. Enquanto a esfera está deslizando, a intensidade da força de atrito é $F = \mu_k N$. As forças efetivas consistem no vetor $m\bar{a}$ ligado a G e no binário $\bar{I}\alpha$. Expressando que o sistema das forças externas é equivalente ao sistema das forças efetivas, escrevemos

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y &= \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: & N - W &= 0 \\
 & & N = W = mg & & F = \mu_k N = \mu_k mg \\
 +\rightarrow \Sigma F_x &= \Sigma (F_x)_{\text{efet}}: & -F &= m\bar{a} & -\mu_k mg = m\bar{a} & \bar{a} = -\mu_k g \\
 +\curvearrowright \Sigma M_G &= \Sigma (M_G)_{\text{efet}}: & Fr &= \bar{I}\alpha
 \end{aligned}$$

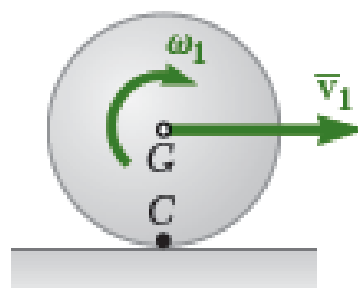
Observando que $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ e substituindo o valor obtido para F , escrevemos

$$(\mu_k mg)r = \frac{2}{5}mr^2\alpha \quad \alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r}$$

Cinemática do movimento. Enquanto a esfera estiver girando e deslizando, seus movimentos linear e angular serão uniformemente acelerados.

$$t = 0, \bar{v} = \bar{v}_0 \quad \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t = \bar{v}_0 - \mu_k g t \quad (1)$$

$$t = 0, \omega_0 = 0 \quad \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \left(\frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} \right) t \quad (2)$$



A esfera vai começar a rolar sem deslizar quando a velocidade $\mathbf{v}_C$ do ponto de contato C for zero. Nesse instante, $t = t_1$, o ponto C se torna o centro instantâneo de rotação e temos

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 \quad (3)$$

Substituindo em (3) os valores obtidos para $\bar{v}_1$ e ω_1 , quando fazemos $t = t_1$ em (1) e (2), respectivamente, escrevemos

$$\bar{v}_0 - \mu_k g t_1 = r \left(\frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t_1 \right) \quad t_1 = \frac{2}{7} \frac{\bar{v}_0}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

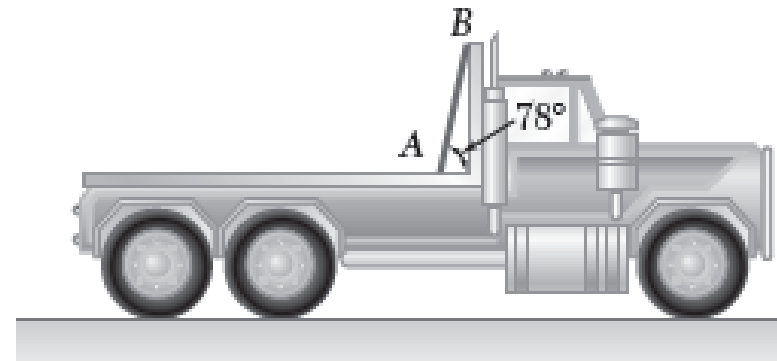
Substituindo o valor de t_1 em (2), temos

$$\omega_1 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t_1 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} \left(\frac{2}{7} \frac{\bar{v}_0}{\mu_k g} \right) \quad \omega_1 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_0}{r} \quad \omega_1 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_0}{r} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

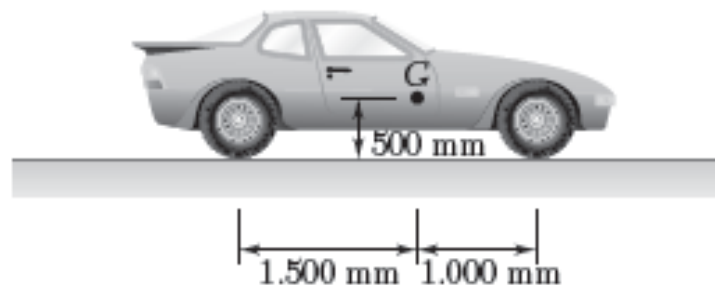
$$\bar{v}_1 = r\omega_1 = r \left(\frac{5}{7} \frac{\bar{v}_0}{r} \right) \quad \bar{v}_1 = \frac{5}{7} \bar{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 = \frac{5}{7} \bar{v}_0 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

exercícios

- 16.3** Um quadro de 2 m é colocado em um caminhão com uma extremidade repousando sobre um bloco preso no piso e a outra apoiada em uma divisória vertical. Determine a máxima aceleração admissível do caminhão para que o quadro permaneça na posição mostrada na figura.



- 16.5** Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada é de 0,80 para o veículo mostrado na figura, determine a aceleração máxima possível, em uma estrada nivelada, considerando (a) tração nas quatro rodas, (b) tração nas rodas traseiras, (c) tração nas rodas dianteiras.



- 16.25** Um volante de motor de 3.000 kg leva 10 minutos para desacelerar até o repouso a partir de uma velocidade angular de 300 rpm. Sabendo que o raio de giração do volante é de 900 mm, determine a intensidade média do binário devida ao atrito cinético nos mancais.

exercícios

- 16.14** Uma placa retangular uniforme tem uma massa de 5 kg e é mantida na posição por três cordas como mostrado na figura. Sabendo que $\theta = 30^\circ$, determine, imediatamente depois da corda CF ter sido cortada, (a) a aceleração da placa, (b) a tração nas cordas AD e BE .

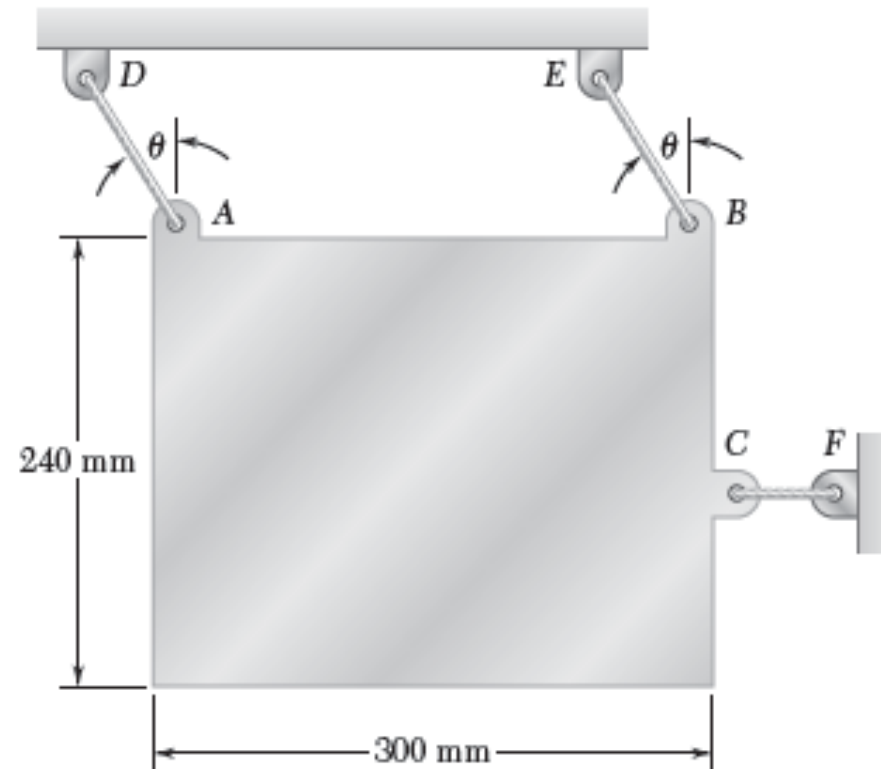


Figura P16.14 e P16.15

- 16.15** Uma placa retangular uniforme tem massa de 5 kg e é mantida na posição por três cordas como mostrado na figura. Determine o maior valor de θ para que ambas as cordas AD e BE permaneçam esticadas imediatamente depois da corda CF ter sido cortada.

exercícios

- 16.35** Cada uma das engrenagens *A* e *B* tem massa de 10 kg e um raio de giração de 150 mm; a engrenagem *C* tem uma massa de 2,5 kg e um raio de giração de 60 mm. Se o binário *M* de intensidade constante $6 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicada à engrenagem *C*, determine (a) a aceleração angular da engrenagem *A*, (b) a força tangencial que a engrenagem *C* exerce na engrenagem *A*.

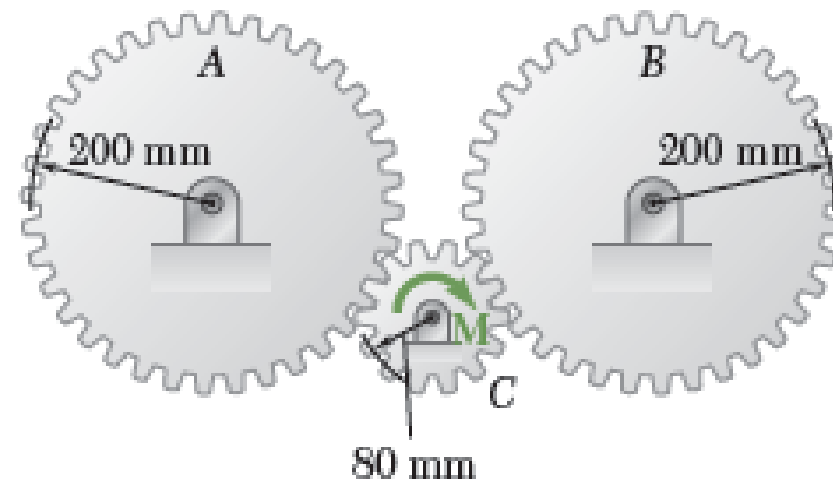
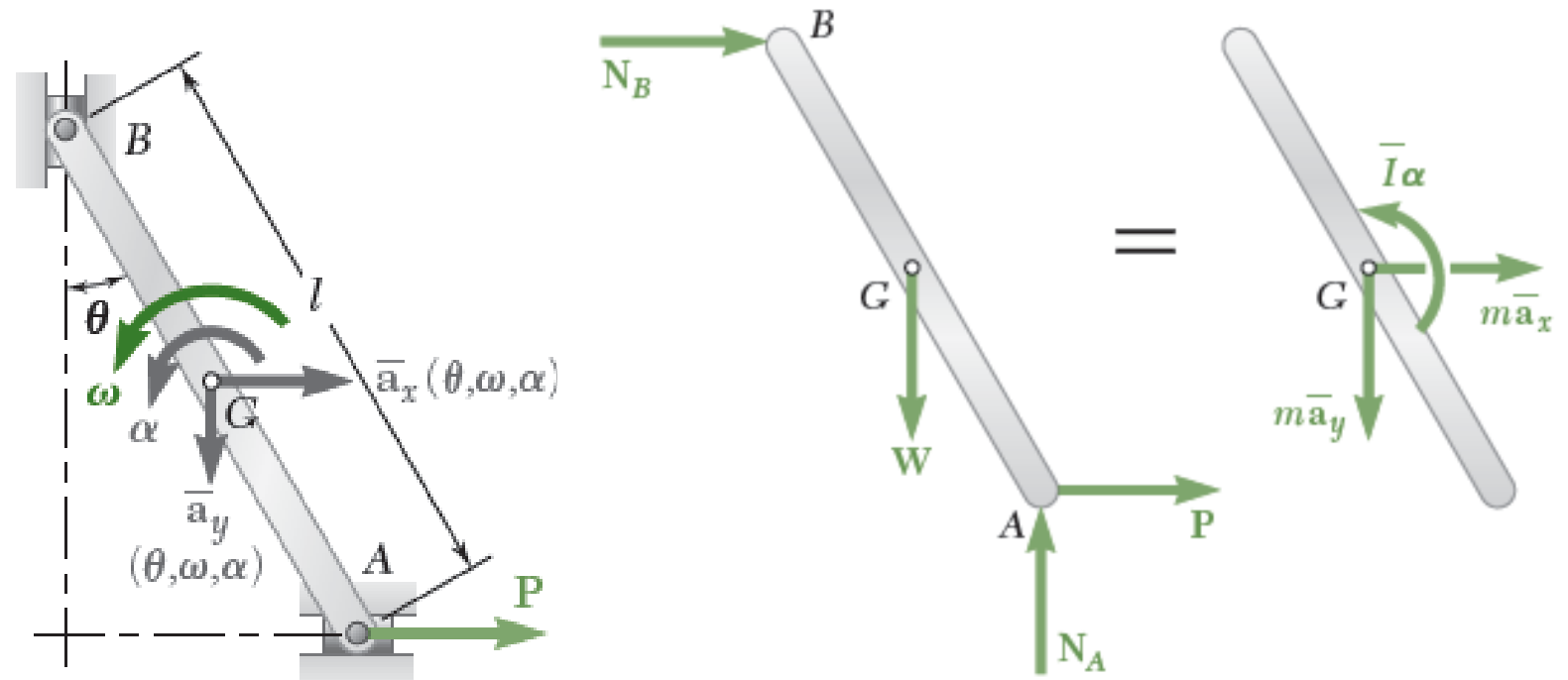


Figura P16.35

- 16.36** Resolva o Problema 16.35, considerando que o binário *M* é aplicado ao disco *A*.

Movimento plano com restrições

A maioria das aplicações de engenharia trata de corpos rígidos que estão em movimento sob a ação de determinadas restrições. Por exemplo, manivelas têm de girar em torno de um eixo fixo, rodas devem rolar sem deslizar e barras de ligação devem descrever certos movimentos prescritos. Em todos esses casos, existem relações definidas entre os componentes da aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do centro de massa G do corpo considerado e sua aceleração angular α ; o movimento correspondente é chamado de *movimento restrito*.



Movimento plano com restrições

Rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa. O movimento de um corpo rígido restrito a girar em torno de um eixo fixo que não passa por seu centro de massa é chamado *rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa*. O centro de massa G do corpo se desloca ao longo de uma circunferência de raio $\bar{r}$ centrada no ponto O , onde o eixo de rotação intercepta o plano de referência (Fig. 16.14). Representando, respectivamente, por ω e α a velocidade angular e a aceleração angular da linha OG , obtemos as seguintes expressões para os componentes tangencial e normal da aceleração de G :

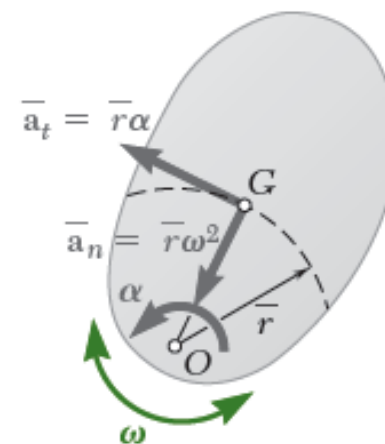


Figura 16.14

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \quad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \quad (16.7)$$

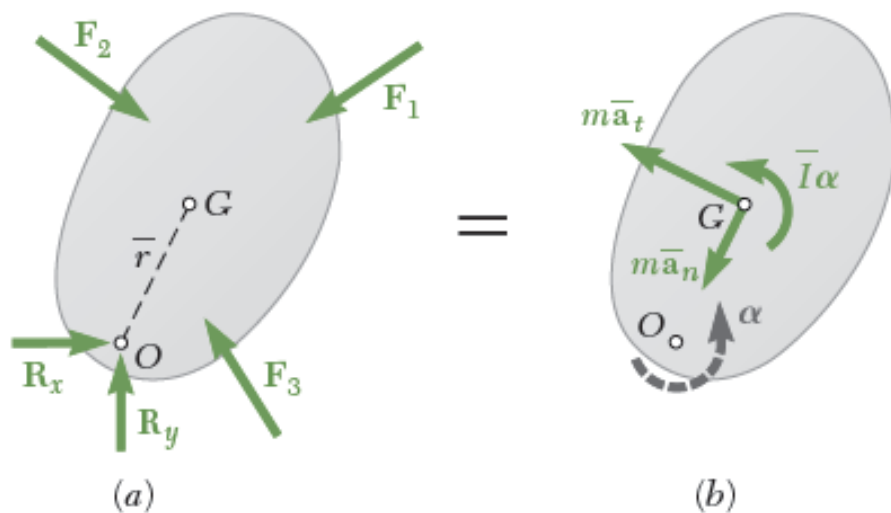


Figura 16.15

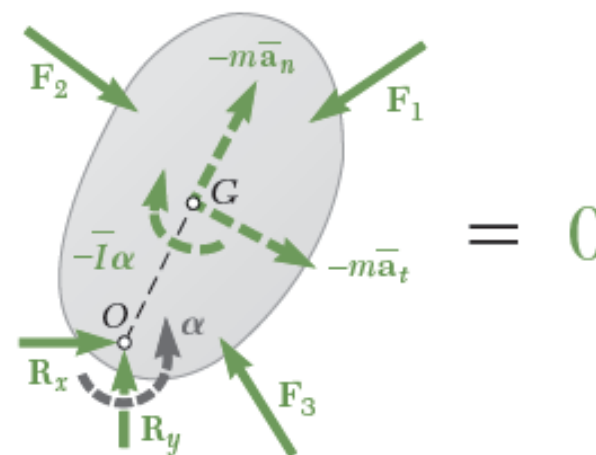


Figura 16.16

Rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa

Uma relação interessante é obtida igualando-se os momentos, em relação ao ponto fixo O , das forças e vetores mostrados, respectivamente, nas partes a e b da Fig. 16.15. Escrevemos

$$+\uparrow \Sigma M_O = \bar{I}\alpha + (m\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha$$

Mas, de acordo com o teorema dos eixos paralelos, temos $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_O$, onde I_O representa o momento de inércia do corpo rígido em torno do eixo fixo. Portanto, escrevemos

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \quad (16.8)$$

Um caso particular de rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa é de especial interesse – o caso da *rotação uniforme*, no qual a velocidade angular ω é constante. Como α é zero, o binário de inércia na Fig. 16.16 desaparece e o vetor de inércia se reduz a seu componente normal. Esse componente (também chamado *força centrífuga*) representa a tendência que o corpo rígido tem de escapar do eixo de rotação.

Movimento plano com restrições

Movimento de rolamento. Outro caso importante de movimento plano é o movimento de um disco ou roda que rola sobre uma superfície plana. Se o disco é restringido a rolar sem deslizar, a aceleração $\bar{a}$ de seu centro de massa G e sua aceleração angular α não são independentes. Considerando que o disco está balanceado, de modo que seu centro de massa coincide com seu centro geométrico, escrevemos em primeiro lugar que a distância x percorrida por G durante uma rotação θ do disco é $\bar{x} = r\theta$, onde r é o raio do disco. Diferenciando essa relação duas vezes, escrevemos

$$\bar{a} = r\alpha$$

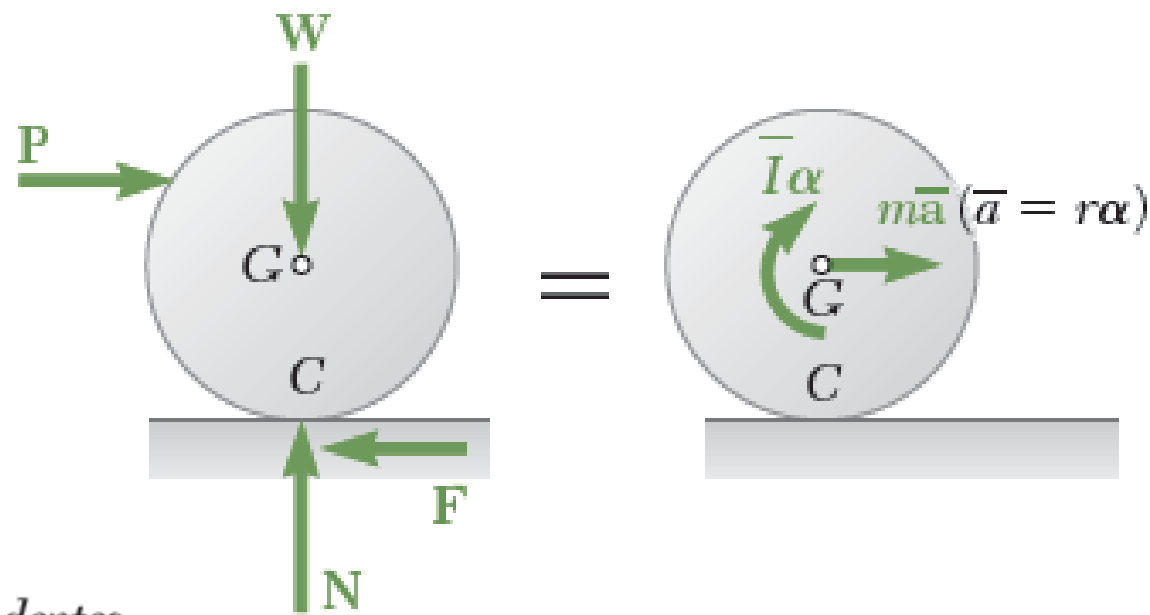
Rolamento, sem deslizamento:

$$F \leq \mu_s N \quad \bar{a} = r\alpha$$

Rolamento, com deslizamento iminente: $F = \mu_s N \quad \bar{a} = r\alpha$

Rotação e deslizamento:

$$F = \mu_k N \quad \bar{a} \text{ e } \alpha \text{ independentes}$$



Movimento de rolamento

Quando um disco está *desbalanceado*, ou seja, quando seu centro de massa G não coincide com seu centro geométrico O , a relação (16.9) entre $\bar{a}$ e α não se verifica. Entretanto, uma relação similar se verifica entre a intensidade a_O da aceleração do centro geométrico e a aceleração angular α de um disco desbalanceado que rola sem deslizar. Temos

$$a_O = r\alpha \quad (16.10)$$

Para determinar $\bar{a}$ em termos da aceleração angular α e da velocidade angular ω do disco, podemos usar a fórmula da aceleração relativa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_G &= \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{G/O} \\ &= \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_t + (\mathbf{a}_{G/O})_n \end{aligned} \quad (16.11)$$

onde os três componentes da aceleração obtida têm as direções e sentidos indicados na Fig. 16.18 e as intensidades $a_O = r\alpha$, $(a_{G/O})_t = (OG)\alpha$ e $(a_{G/O})_n = (OG)\omega^2$.

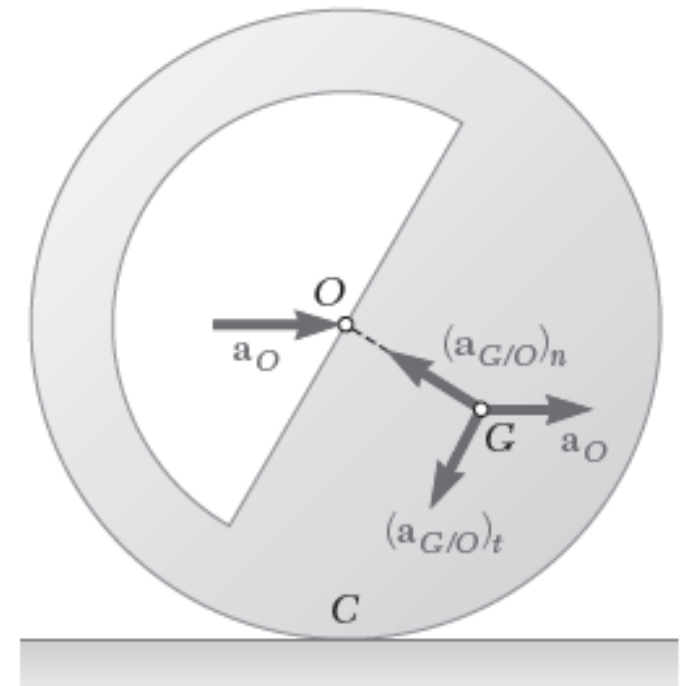
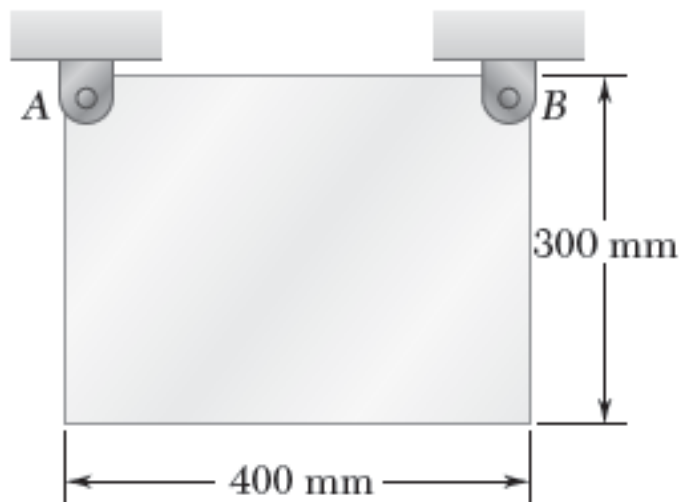


Figura 16.18



PROBLEMA RESOLVIDO 16.7

Uma placa retangular de 300×400 de massa 30 kg está suspensa por dois pinos A e B . Se o pino B for removido repentinamente, determine (a) a aceleração angular da placa e (b) os componentes da reação no pino A imediatamente após o pino B ter sido removido.

SOLUÇÃO

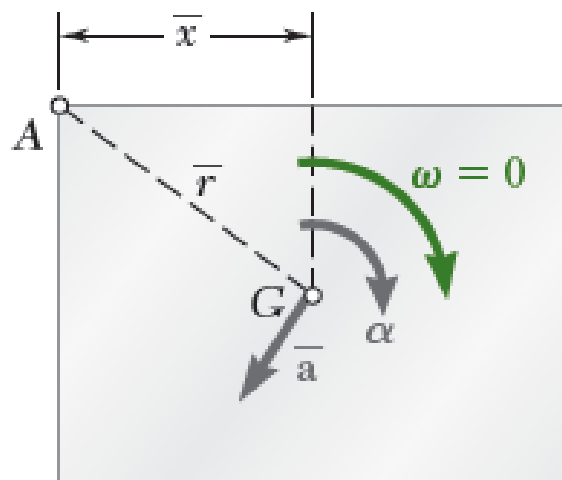
a. Aceleração angular. Observamos que, à medida que a placa gira em torno do ponto A , seu centro de massa G descreve uma circunferência de raio $\bar{r}$ com centro em A .

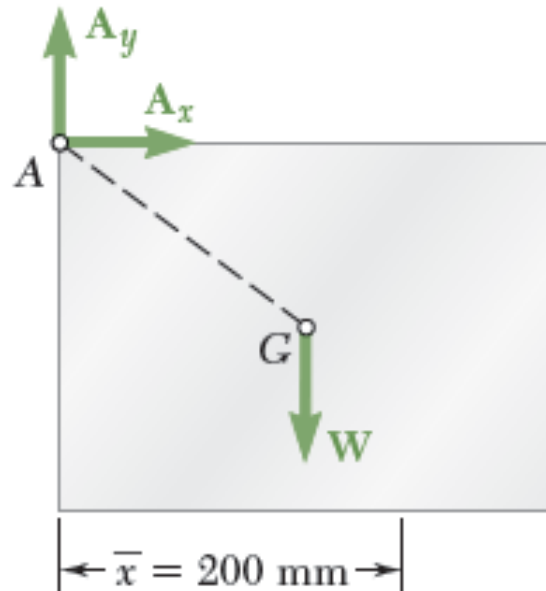
Como a placa parte do repouso ($\omega = 0$), o componente normal da aceleração de G é zero. A intensidade da aceleração $\bar{a}$ do centro de massa G é, portanto, $\bar{a} = \bar{r}\alpha$. Traçamos o diagrama mostrado para expressar que as forças externas são equivalentes às forças efetivas:

$$+\downarrow \Sigma M_A = \Sigma (M_A)_{\text{efet.}}: \quad W\bar{x} = (m\bar{a})\bar{r} + \bar{I}\alpha$$

Como $\bar{a} = \bar{r}\alpha$, temos

$$W\bar{x} = m(\bar{r}\alpha)\bar{r} + \bar{I}\alpha \quad \alpha = \frac{mg\bar{x}}{m\bar{r}^2 + \bar{I}} \quad (1)$$





O momento de inércia em torno do centro de massa da placa é

$$\bar{I} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{(30 \text{ kg}) [(0,4 \text{ m})^2 + (0,3 \text{ m})^2]}{12} = 0,625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Substituindo este valor de $\bar{I}$ junto com $W = mg = 294,3 \text{ N}$, $\bar{r} = 0,25 \text{ m}$ e $\bar{x} = 0,2 \text{ m}$ na Eq. (1), obtemos

$$\alpha = +23,54 \text{ rad/s}^2 \quad \alpha = 23,5 \text{ rad/s}^2 \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

b. Reação em A. Usando o valor calculado de α , determinamos a intensidade do vetor $m\bar{a}$ ligado a G.

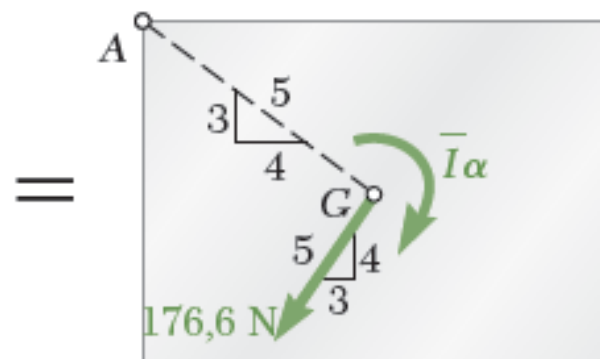
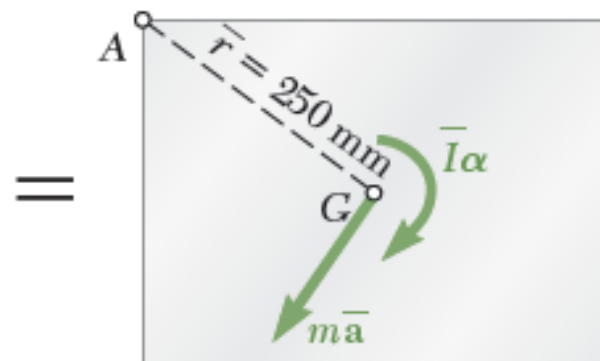
$$m\bar{a} = m\bar{r}\alpha = (30 \text{ kg})(0,25 \text{ m})(23,54 \text{ rad/s}^2) = 176,6 \text{ N}$$

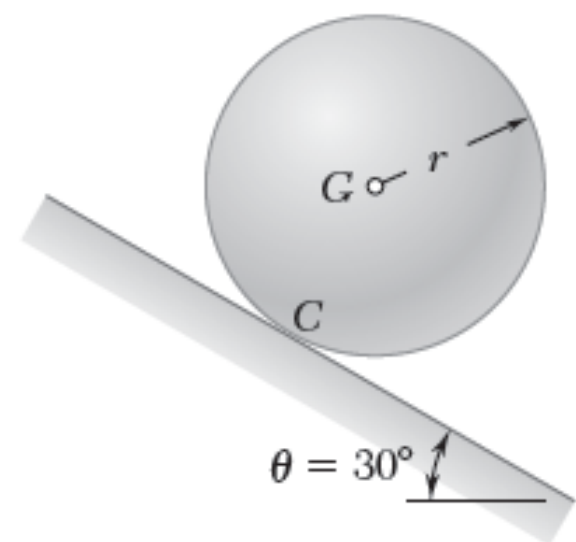
Mostrando esse resultado no diagrama, escrevemos as equações de movimento

$$\begin{aligned} \xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{efet.}}: \quad A_x &= -\frac{3}{5}(176,6) \\ &= -106 \text{ N} \end{aligned} \quad \mathbf{A_x = 106 \text{ N} \leftarrow} \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet.}}: \quad A_y - 294,3 \text{ N} &= -\frac{4}{5}(176,6) \\ A_y &= +153,0 \text{ N} \end{aligned} \quad \mathbf{A_y = 153 \text{ N} \uparrow} \quad \blacktriangleleft$$

O binário $\bar{I}\alpha$ não está envolvido nas duas últimas equações; entretanto, ele deve ser indicado no diagrama.





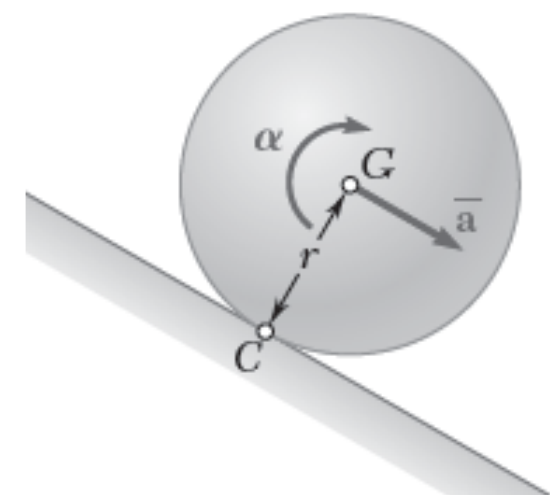
PROBLEMA RESOLVIDO 16.8

Uma esfera de raio r e peso W é liberada com velocidade inicial nula sobre um plano inclinado e rola sem deslizar. Determine (a) o valor mínimo do coeficiente de atrito estático compatível com o movimento de rolamento, (b) a velocidade do centro G da esfera após ela ter rolado 3 m e (c) a velocidade de G se a esfera tivesse percorrido 3 m descendo em um plano inclinado de 30° sem atrito.

SOLUÇÃO

a. Valor mínimo μ_s para o movimento de rolamento. As forças externas W , N e F formam um sistema equivalente ao sistema de forças efetivas representado pelo vetor $m\bar{a}$ e pelo binário $\bar{I}\alpha$. Como a esfera rola sem deslizar, temos que $\bar{a} = r\alpha$.

$$\begin{aligned}
 +\downarrow \Sigma M_C &= \Sigma (M_C)_{\text{efet}}: & (W \sin \theta)r &= (m\bar{a})r + \bar{I}\alpha \\
 & & (W \sin \theta)r &= (mr\alpha)r + \bar{I}\alpha
 \end{aligned}$$



Notando que $m = W/g$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$, escrevemos

$$(W \sin \theta)r = \left(\frac{W}{g}r\alpha\right)r + \frac{2}{5}\frac{W}{g}r^2\alpha \quad \alpha = +\frac{5g \sin \theta}{7r}$$

$$\bar{a} = r\alpha = \frac{5g \sin \theta}{7} = \frac{5(9,81 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ}{7} = 3,50 \text{ m/s}^2$$

$$+\searrow \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{efet}}: \quad W \sin \theta - F = m\bar{a}$$

$$W \sin \theta - F = \frac{W}{g} \frac{5g \sin \theta}{7}$$

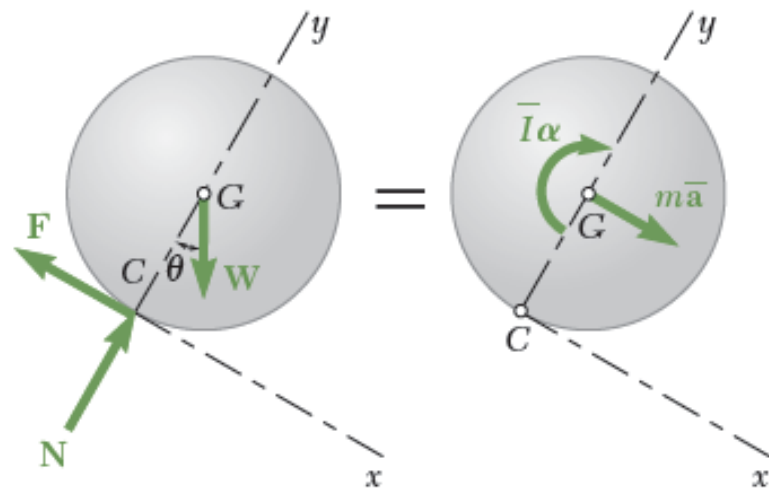
$$F = +\frac{2}{7}W \sin \theta = \frac{2}{7}W \sin 30^\circ \quad \mathbf{F} = 0,143W \nearrow 30^\circ$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: \quad N - W \cos \theta = 0$$

$$N = W \cos \theta = 0,866W \quad \mathbf{N} = 0,866W \nearrow 60^\circ$$

$$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{0,143W}{0,866W}$$

$$\mu_s = 0,165$$



b. Velocidade de rolamento da esfera. Temos um movimento uniformemente acelerado:

$$\bar{v}_0 = 0 \quad \bar{a} = 3,504 \text{ m/s}^2 \quad \bar{x} = 3 \text{ m} \quad \bar{x}_0 = 0$$

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad \bar{v}^2 = 0 + 2(3,504 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})$$

$$\bar{v} = 4,59 \text{ m/s}$$

$$\bar{\mathbf{v}} = 4,59 \text{ m/s} \nearrow 30^\circ$$

c. Velocidade de deslizamento da esfera. Supondo agora a ausência de atrito, temos $F = 0$ e obtemos

$$+\downarrow \Sigma M_G = \Sigma (M_G)_{\text{efet}}: \quad 0 = \bar{I}\alpha \quad \alpha = 0$$

$$+\searrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: \quad W \sin 30^\circ = m\bar{a} \quad 0,50W = \frac{W}{g}\bar{a}$$

$$\bar{a} = +4,905 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{\mathbf{a}} = 4,905 \text{ m/s}^2 \nearrow 30^\circ$$

Substituindo $\bar{a} = 4,905 \text{ m/s}^2$ nas equações de movimento uniformemente acelerado, obtemos

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad \bar{v}^2 = 0 + 2(4,905 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})$$

$$\bar{v} = 5,42 \text{ m/s}$$

$$\bar{\mathbf{v}} = 5,42 \text{ m/s} \nearrow 30^\circ$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.10

As extremidades de uma barra de 1,2 m com massa de 25 kg podem se deslocar livremente e sem atrito ao longo de dois trilhos retos como mostra a figura. Se a barra é liberada da posição mostrada com velocidade nula, determine (a) a aceleração angular da barra e (b) as reações em A e B.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Como o movimento é restrito, a aceleração de G deve estar relacionada com a aceleração angular α . Para obter essa relação, determinamos primeiro a intensidade da aceleração $\mathbf{a}_A$ do ponto A em função de α . Supondo que α é dirigido no sentido anti-horário e observando que $a_{B/A} = 1,2\alpha$, escrevemos:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$[a_B \nearrow 45^\circ] = [a_A \rightarrow] + [1,2\alpha \nearrow 60^\circ]$$

Observando que $\phi = 75^\circ$ e usando a lei dos senos, obtemos:

$$a_A = 1,64\alpha \quad a_B = 1,47\alpha$$

A aceleração de G é agora obtida escrevendo-se:

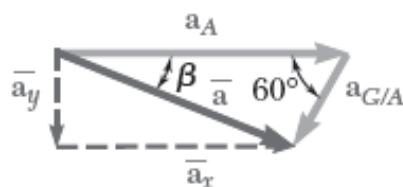
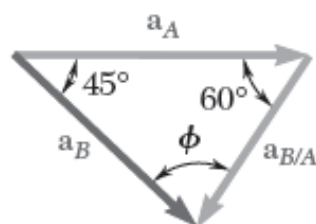
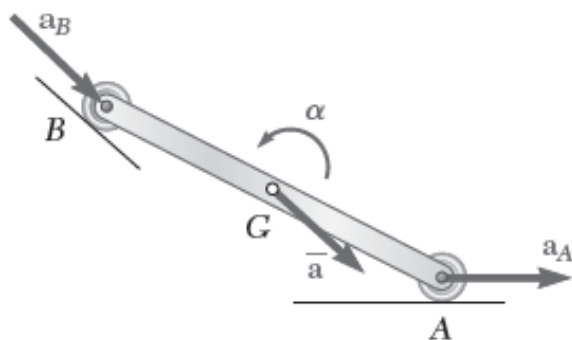
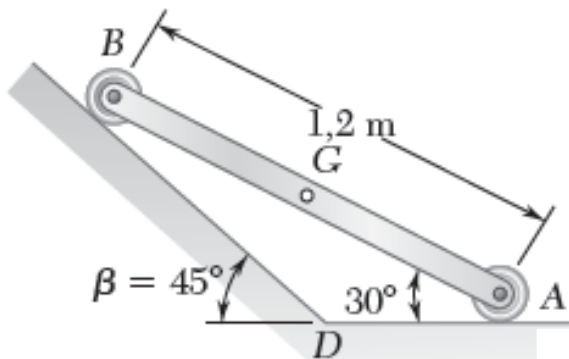
$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = [1,64\alpha \rightarrow] + [0,6\alpha \nearrow 60^\circ]$$

Decompondo $\bar{\mathbf{a}}$ em componentes em x e em y, obtemos:

$$\bar{a}_x = 1,64\alpha - 0,6\alpha \cos 60^\circ = 1,34\alpha \quad \bar{a}_x = 1,34\alpha \rightarrow$$

$$\bar{a}_y = -0,6\alpha \sin 60^\circ = -0,52\alpha \quad \bar{a}_y = 0,52\alpha \downarrow$$



Cinética do movimento. Traçamos uma equação de diagrama de corpo livre expressando que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas representado pelo vetor de componentes $m\bar{a}_x$ e $m\bar{a}_y$ ligados a G e pelo binário $\bar{I}\alpha$. Calculamos as seguintes intensidades:

$$\bar{I} = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{25}{12} \text{ kg} (1,2 \text{ m})^2 = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \bar{I}\alpha = 3\alpha$$

$$m\bar{a}_x = 25 (1,34\alpha) = 33,5\alpha \quad m\bar{a}_y = -25(0,52\alpha) = -13,0\alpha$$

Equações de movimento

$$+\uparrow \Sigma M_E = \Sigma (M_E)_{\text{efet}}:$$

$$(25)(9,81)(0,52) = (33,5\alpha)(1,34) + (13,0\alpha)(0,52) + 3\alpha$$

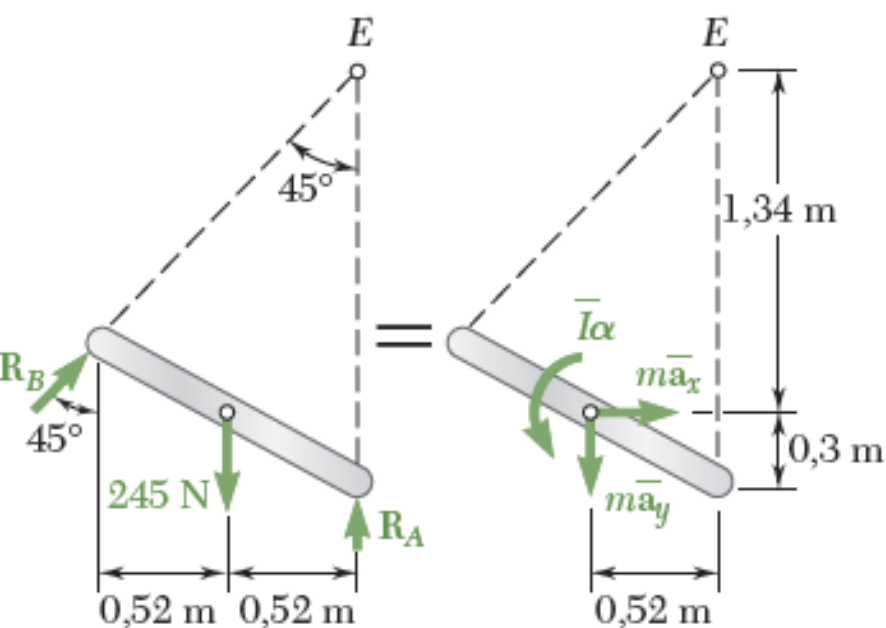
$$\alpha = +2,33 \text{ rad/s}^2 \quad \alpha = 2,33 \text{ rad/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{efet}}: \quad R_B \sin 45^\circ = (33,5)(2,33)$$

$$R_B = 110,4 \text{ N} \quad R_B = 110,4 \text{ N} \nearrow 45^\circ \blacktriangleleft$$

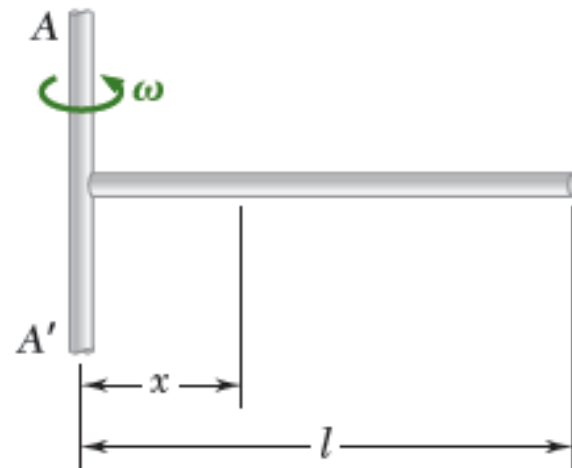
$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: R_A + R_B \cos 45^\circ - (25)(9,81) = -(13,0)(2,33)$$

$$R_A = -30,29 - 78,06 + 245,25 = 136,9 \text{ N} \quad R_A = 136,9 \text{ N} \uparrow \blacktriangleleft$$

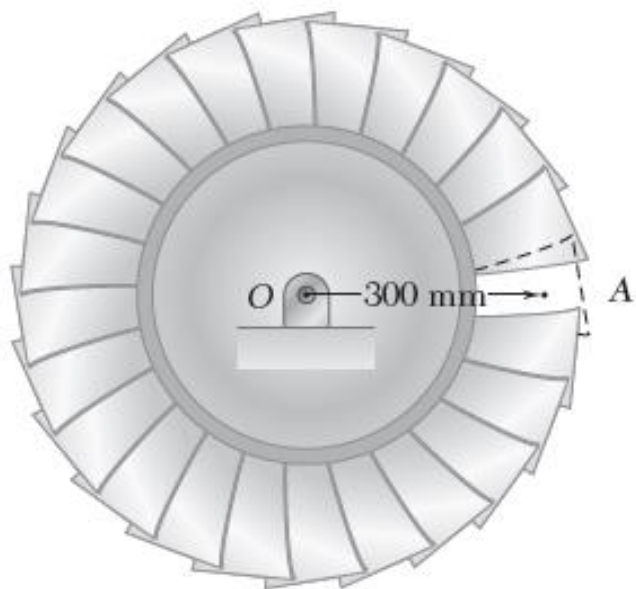


exercícios

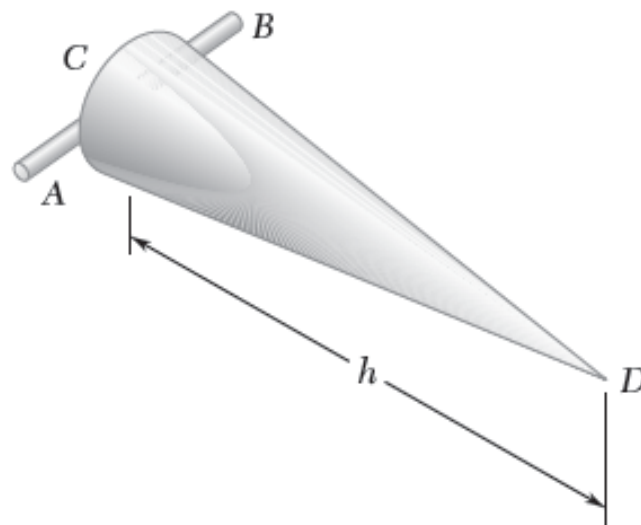
- 16.80** Uma barra delgada uniforme l e massa m gira em torno do eixo vertical AA' com velocidade angular constante ω . Determine a tração na barra a uma distância x do eixo de rotação.



- 16.82** Um disco de turbina de massa 26 kg gira a uma taxa constante de 9.600 rpm. Sabendo que o centro de massa do disco coincide com o centro de rotação O , determine a reação em O imediatamente depois que uma única pá em A , de massa de 45 g, fica solta e é jogada fora.



- 16.86** Um cone delgado uniforme de massa m pode balançar livremente em torno da barra horizontal AB . Se o cone é liberado do repouso na posição mostrada na figura, determine (a) a aceleração da ponta D , (b) a reação em C .



16.94 Uma roda de raio r e raio de giração em torno do centro de massa $\bar{k}$ é liberada a partir do repouso no declive e rola sem deslizar. Deduza uma expressão para aceleração do centro da roda em termos de r , $\bar{k}$, β e g .

16.95 Um volante de motor está rigidamente preso a um eixo de 40 mm de raio que pode rolar ao longo de trilhos paralelos como mostra a figura. Quando liberado a partir do repouso, o sistema rola 5 m em 40 s. Determine o raio de giração em torno do centro de massa do sistema.

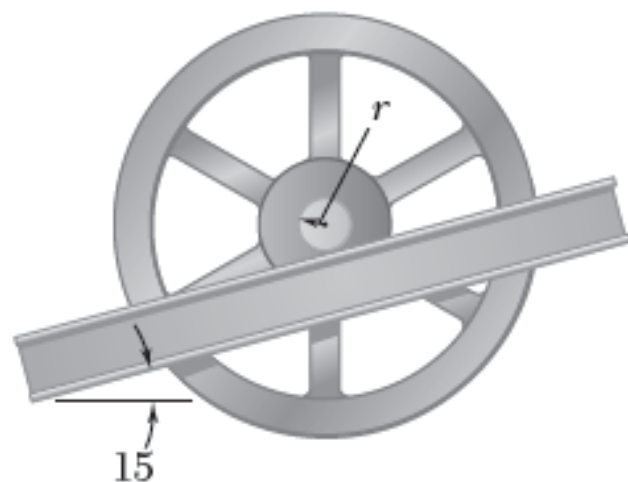
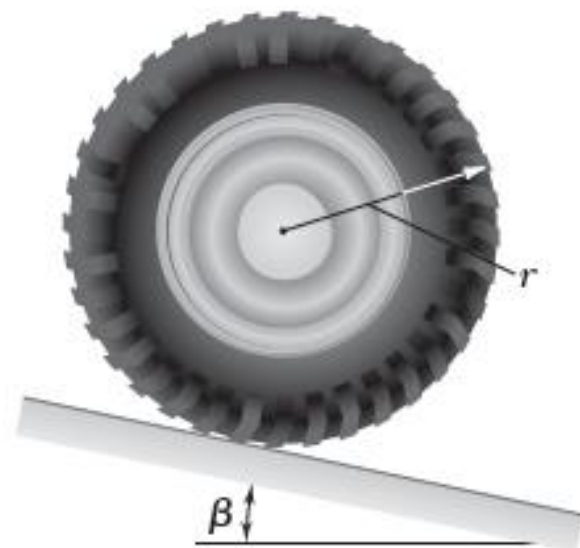


Figura P16.95, P16.96

16.96 Um volante de motor de raio de giração em torno do centro de massa $\bar{k}$ é preso rigidamente a um eixo que pode rolar ao longo de trilhos paralelos. Representando por μ_s o coeficiente de atrito estático entre o eixo e os trilhos, deduza uma expressão para o maior ângulo de inclinação β no qual não ocorrerá deslizamento.



exercícios

- 16.111** A metade da seção do cilindro uniforme de massa m está em repouso quando a força $\mathbf{P}$ é aplicada como mostra a figura. Considerando que a seção rola sem deslizamento, determine (a) sua aceleração angular, (b) o mínimo valor de μ_s compatível com o movimento.

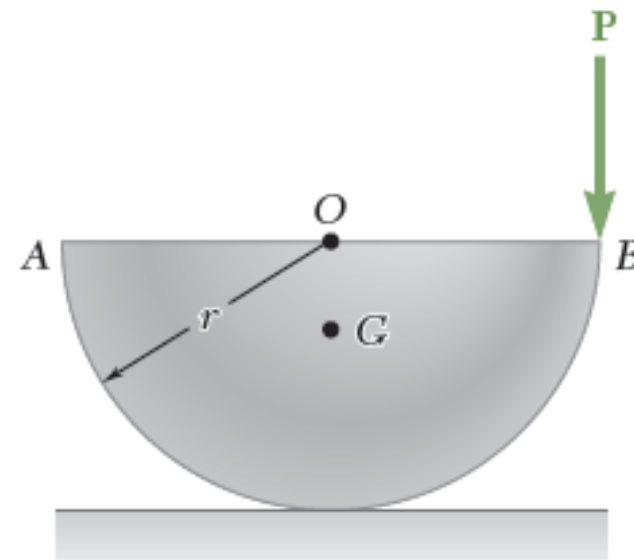


Figura P16.111

- 16.112** Resolva o Problema 16.111, considerando que a força $\mathbf{P}$ aplicada em B é dirigida horizontalmente para a direita.

exercícios

- 16.117** As extremidades da haste uniforme AB de 10 kg são presas a cursores de peso desprezível que deslizam sem atrito ao longo de hastes fixas. Se a haste é liberada a partir do repouso, quando $\theta = 25^\circ$, determine imediatamente após sua liberação (*a*) a aceleração angular da haste, (*b*) a reação em A , (*c*) a reação em B .

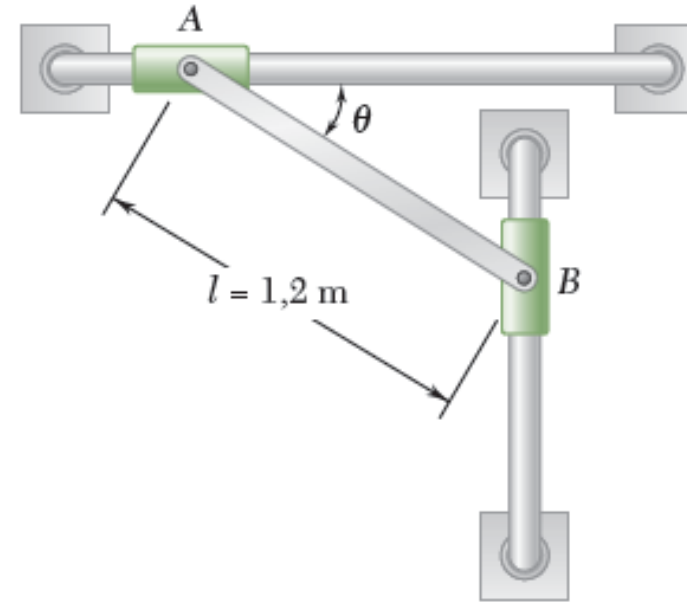


Figura P16.117 e P16.118

- 16.118** As extremidades da haste uniforme AB de 10 kg são presas a cursores de peso desprezível que deslizam sem atrito ao longo de hastes fixas. Uma força vertical $\mathbf{P}$ é aplicada ao cursor B quando $\theta = 25^\circ$, fazendo o cursor partir do repouso com uma aceleração para cima de 12 m/s^2 . Determine (*a*) a força $\mathbf{P}$, (*b*) a reação em A .

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

onde T_1, T_2 = valores inicial e final da energia cinética total das partículas constituintes do corpo rígido

$U_{1 \rightarrow 2}$ = trabalho de todas as forças que agem sobre as várias partículas do corpo.

A energia cinética total

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2 \quad (17.2)$$

é obtida adicionando-se as grandezas escalares positivas, sendo ela mesma uma grandeza escalar positiva. Veremos adiante que T pode ser determinada para vários tipos de movimento de um corpo rígido.

Princípio de trabalho e energia

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

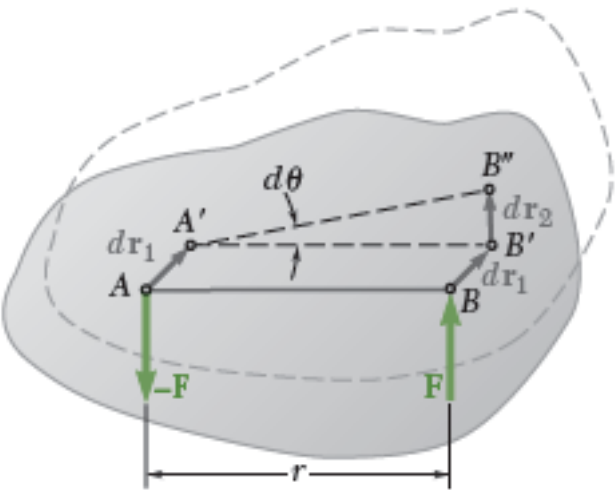
$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds$$

O trabalho do binário durante uma rotação finita do corpo rígido é obtido por integração de ambos os membros de (17.4) desde o valor inicial θ_1 do ângulo θ até seu valor final θ_2 . Escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (17.5)$$

Quando o momento M do binário é constante, a Eq. (17.5) reduz-se a

$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \quad (17.6)$$

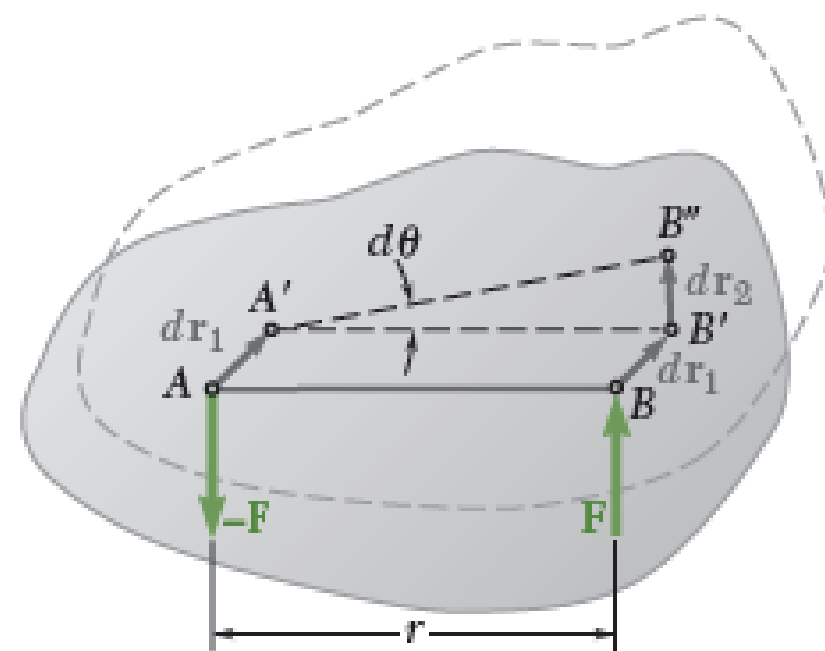


Princípio de trabalho e energia

os pontos A e B realizam deslocamentos iguais a $d\mathbf{r}_1$ na outra parte, A' permanece fixo, enquanto B' move-se para B'' por meio de um deslocamento $d\mathbf{r}_2$ de intensidade $ds_2 = r d\theta$. Na primeira parte do movimento, o trabalho de $\mathbf{F}$ é igual em intensidade e tem sinal oposto ao trabalho de $-\mathbf{F}$, e sua soma é igual a zero. Na segunda parte do movimento, apenas a força $\mathbf{F}$ realiza trabalho, igual a $dU = F ds_2 = Fr d\theta$. Mas o produto Fr é igual à intensidade M do momento do binário. Portanto, o trabalho de um binário de momento $\mathbf{M}$ que age sobre um corpo rígido é

$$dU = M d\theta \quad (17.4)$$

onde $d\theta$ é o pequeno ângulo, expresso em radianos, por meio do qual o corpo gira. Observamos novamente que o trabalho deve ser expresso em unidades obtidas pelo produto das unidades de força e de comprimento.

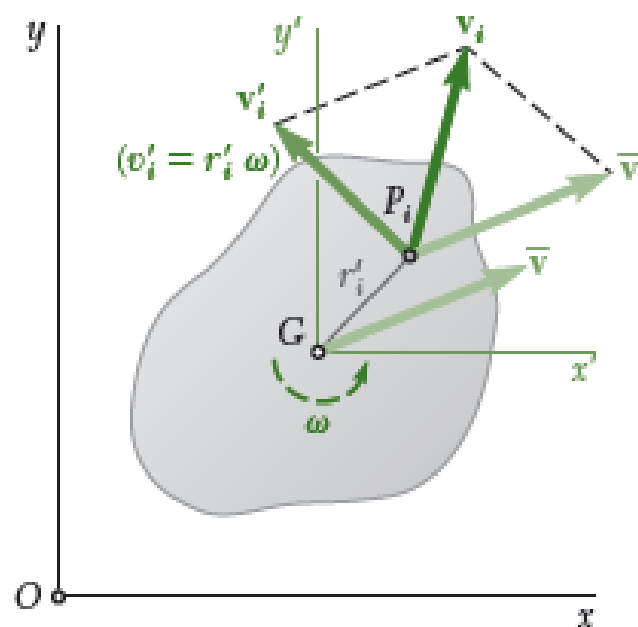


quando um corpo rígido rola sem deslizar

sobre uma superfície fixa, a força de atrito $\mathbf{F}$ no ponto de contato C não realiza trabalho. A velocidade $\mathbf{v}_C$ do ponto de contato C é nula e o trabalho da força de atrito $\mathbf{F}$ durante um pequeno deslocamento do corpo rígido é

$$dU = F ds_C = F(v_C dt) = 0$$

Energia cinética em movimento plano



$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i'^2 \qquad T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n r_i'^2 \Delta m_i \right) \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

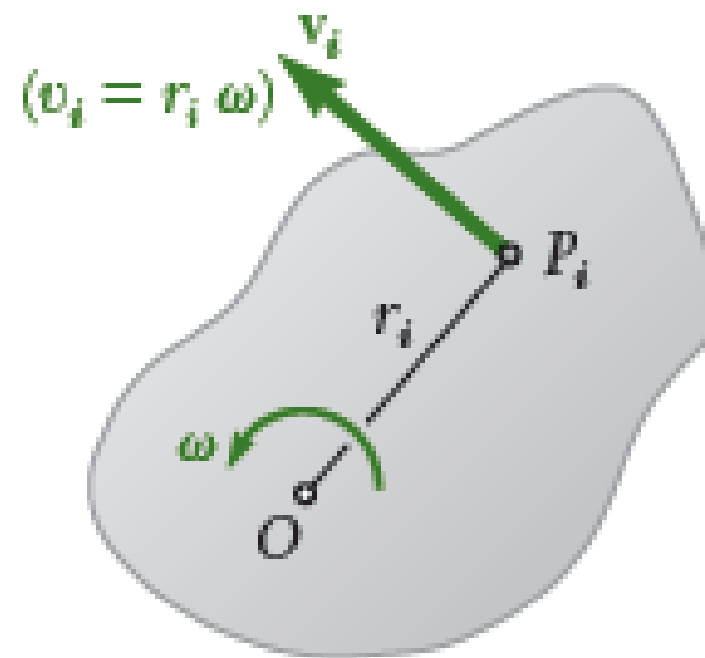
Notemos que, no caso particular de um corpo em translação ($\omega = 0$), a expressão obtida reduz-se a $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ enquanto no caso de uma rotação centroidal ($\bar{v} = 0$), ela se reduz a $\frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$. Concluimos que a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano pode ser separada em duas partes: (1) a energia cinética $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ associada ao movimento do centro de massa G do corpo e (2) a energia cinética $\frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$ associada à rotação do corpo em torno de G .

Rotação não centroidal

considerando-se que a velocidade v_i da partícula P_i é igual ao produto $r_i\omega$ da distância r_i de P_i do eixo fixo pela intensidade ω da velocidade angular do corpo no instante considerado. Substituindo em Eq. (17.2), escrevemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i \right) \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$



Conservação da energia

Vimos na Seção 13.6 que o trabalho de forças conservativas, tais como o peso de um corpo ou a força exercida por uma mola, pode ser expresso como uma variação da energia potencial. Quando um corpo rígido, ou um sistema de corpos rígidos, move-se sob a ação de forças conservativas, o princípio de trabalho e energia estabelecido na Seção 17.2 pode ser expresso por meio de uma forma modificada. Substituindo $U_{1\rightarrow 2}$ da Eq. (13.19') na Eq. (17.1), escrevemos

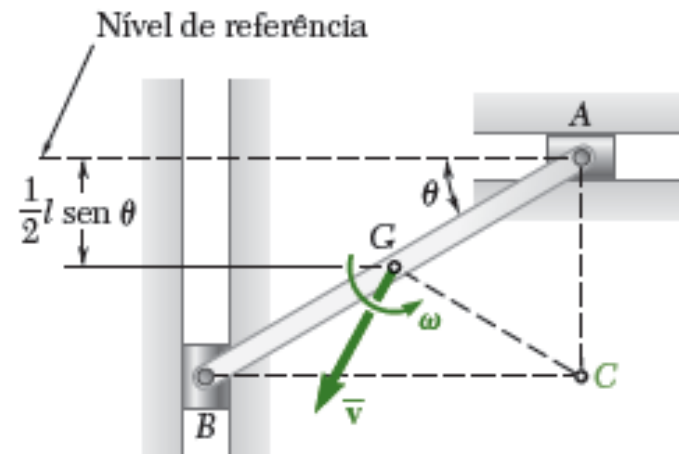
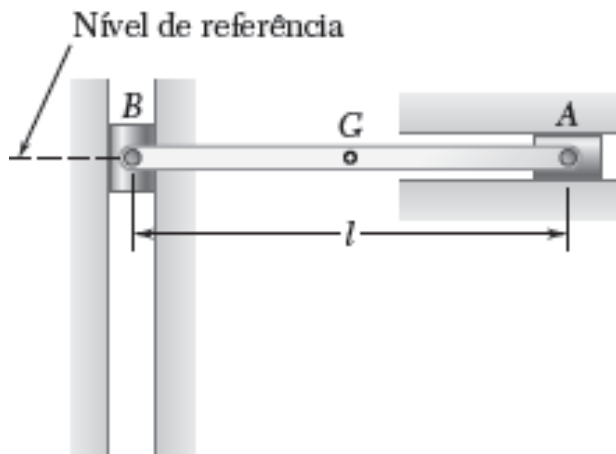
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (17.12)$$

A equação (17.12) estabelece que, quando um corpo rígido, ou um sistema de corpos rígidos, move-se sob a ação de forças conservativas, *a soma da energia cinética e da energia potencial do sistema permanece constante*. Deve-se notar que, no caso do movimento plano de um corpo rígido, a energia cinética do corpo deve incluir tanto o termo *translacional* $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ como o termo *rotacional* $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$.

Conservação da energia - exemplo

Como a velocidade inicial é nula, temos $T_1 = 0$. Medindo a energia potencial a partir do nível da pista horizontal, escrevemos $V_1 = 0$. Após o giro da barra por meio do ângulo θ , o centro de gravidade G da barra está a uma distância $\frac{1}{2}l \sin \theta$ abaixo do nível de referência e temos

$$V_2 = -\frac{1}{2}Wl \sin \theta = -\frac{1}{2}mgl \sin \theta$$



Observando que nessa posição o centro instantâneo de rotação da barra está localizado em C e que $CG = \frac{1}{2}l$, escrevemos $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}l\omega$, obtemos

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}l\omega\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 \end{aligned}$$

Aplicando o princípio da conservação da energia, escrevemos:

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\ 0 &= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 - \frac{1}{2}mgl \sin \theta \\ \omega &= \left(\frac{3g}{l} \sin \theta\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Potência

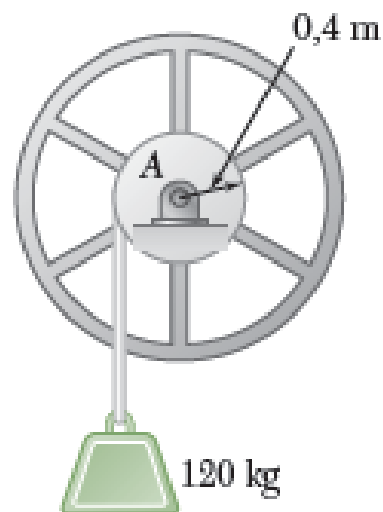
Potência foi definida na Seção 13.5 como sendo a taxa temporal em que o trabalho é realizado. No caso de um corpo sujeito a uma força $\mathbf{F}$, movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$, a potência foi expressa da seguinte maneira:

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.13)$$

No caso de um corpo rígido girando com velocidade angular ω e sujeito a um binário de momento $\mathbf{M}$ paralelo ao eixo de rotação, temos, pela Eq. (17.4),

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega \quad (17.13)$$

As diferentes unidades usadas para medir a potência, tais como o watt (W) e o cavalo-potência (hp), foram definidas na Seção 13.5.



PROBLEMA RESOLVIDO 17.1

Um bloco de 120 kg está suspenso por um cabo inextensível enrolado em torno de um tambor de 0,4 m de raio, preso rigidamente a um volante. O tambor e o volante têm um momento de inércia centroidal combinado $\bar{I} = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. No instante mostrado na figura, a velocidade do bloco é de 2 m/s para baixo. Sabendo que o mancal em A é pouco lubrificado e que seu atrito equivale a um binário M de intensidade de $90 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine a velocidade do bloco após ele ter se deslocado 1,25 m para baixo.

SOLUÇÃO

Consideremos o sistema formado pelo volante e pelo bloco. Como o cabo é inextensível, o trabalho realizado pelas forças internas exercidas pelo cabo se cancela. As posições inicial e final do sistema e as forças externas que agem sobre ele estão mostradas na figura.

Energia cinética. Posição 1.

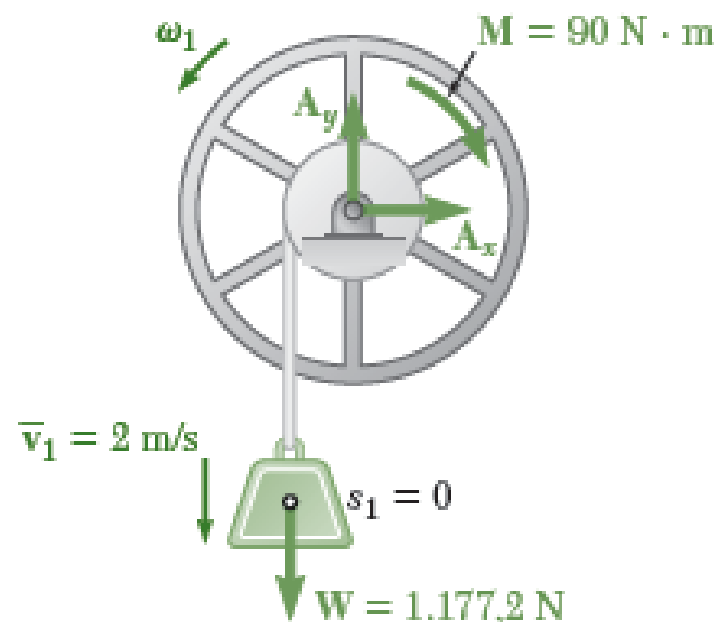
Bloco: $\bar{v}_1 = 2 \text{ m/s}$

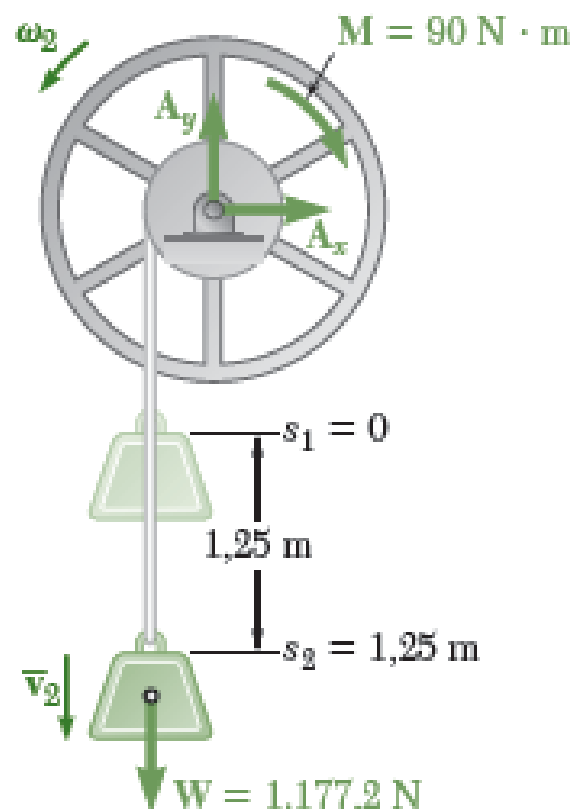
Volante: $\omega_1 = \frac{\bar{v}_1}{r} = \frac{2 \text{ m/s}}{0,4 \text{ m}} = 5 \text{ rad/s}$

$T_1 = \frac{1}{2} m \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_1^2$ (observe que a velocidade do centro da massa do tambor = 0)

$$= \frac{1}{2} (120 \text{ kg}) (2 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} (16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (5 \text{ rad/s})^2$$

$$= 440 \text{ J}$$





Posição 2. Observando que $\omega_2 = \bar{v}_2 / 0,4$, escrevemos

$$T_2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2} (120) \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} (16) \left(\frac{\bar{v}_2}{0,4} \right)^2 = 110 \bar{v}_2^2$$

Trabalho. Durante o movimento, apenas o peso **W** do bloco e o binário de atrito **M** realizam trabalho. Observando que **W** realiza trabalho positivo e que o binário de atrito **M** realiza trabalho negativo, escrevemos

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 1,25 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{s_2}{r} = \frac{1,25 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} = 3,125 \text{ rad}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = W(s_2 - s_1) - M(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= (120 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(1,25 \text{ m}) - (90 \text{ N} \cdot \text{m})(3,125 \text{ rad})$$

$$= 768 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

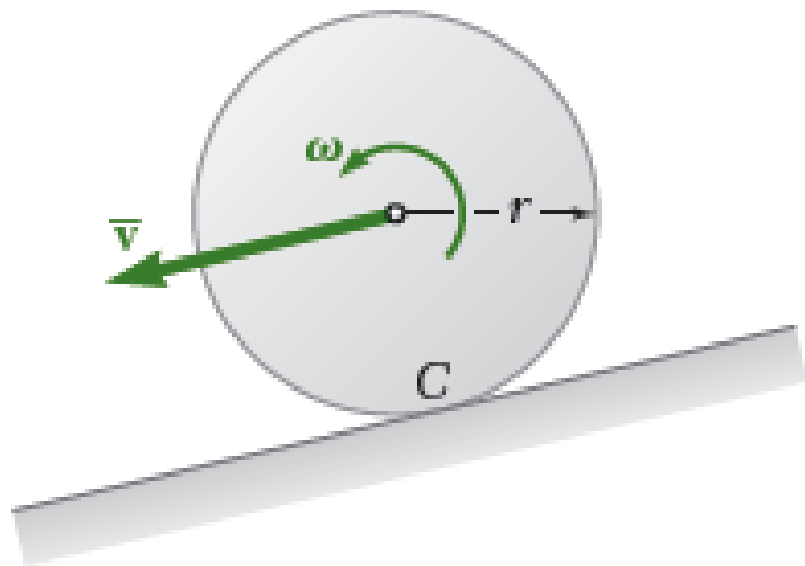
$$(440 \text{ J}) + (1.190 \text{ J}) = 110 \bar{v}_2^2$$

$$\bar{v}_2 = 3,85 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_2 = 3,85 \text{ m/s} \downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 17.3

Uma esfera, um cilindro e um aro, todos de mesma massa e mesmo raio, são liberados do repouso em um plano inclinado. Determine a velocidade de cada corpo depois de ele ter rolado por uma distância correspondente a uma variação de elevação h .



SOLUÇÃO

O problema será resolvido primeiro em termos gerais e, em seguida, serão encontrados os resultados para cada corpo. Representamos a massa por m , o momento de inércia centroidal por $\bar{I}$, o peso por W e o raio por r .

Cinemática. Como cada corpo rola, o centro instantâneo de rotação está localizado em C e escrevemos

$$\omega = \frac{\bar{v}}{r}$$

Energia cinética

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \left(\frac{\bar{v}}{r} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{\bar{I}}{r^2} \right) \bar{v}^2$$

Trabalho. Como a força de atrito $\mathbf{F}$ em movimento de rolagem não realiza trabalho,

$$U_{1 \rightarrow 2} = Wh$$

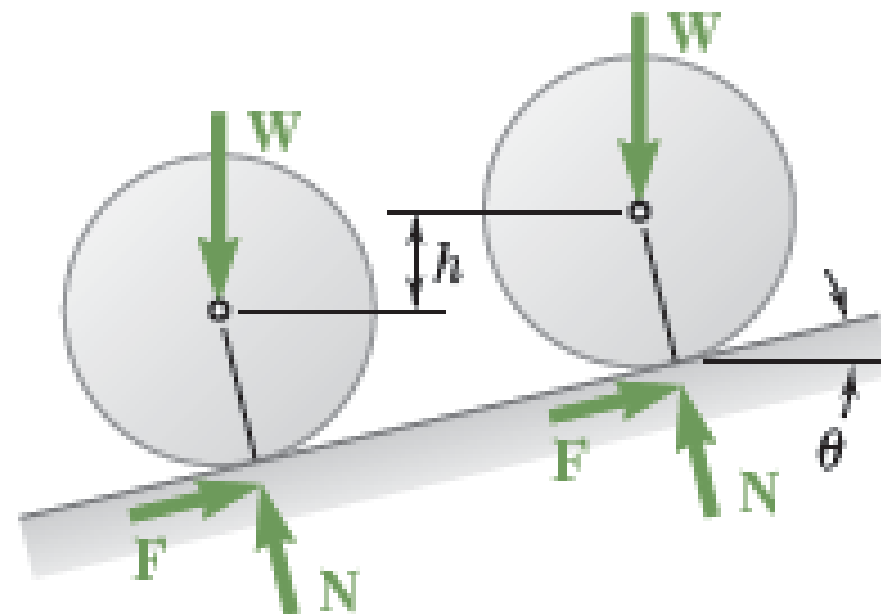
Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$0 + Wh = \frac{1}{2} \left(m + \frac{\bar{I}}{r^2} \right) \bar{v}^2 \quad \bar{v}^2 = \frac{2Wh}{m + \bar{I}/r^2}$$

Observando que $W = mg$, reordenamos o resultado e obtemos

$$\bar{v}^2 = \frac{2gh}{1 + \bar{I}/mr^2}$$



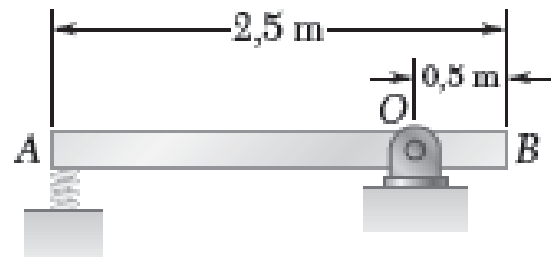
Velocidades da esfera, cilindro e aro. Introduzindo sucessivamente a expressão particular para $\bar{I}$, obtemos

Esfera: $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{v} = 0,845\sqrt{2gh}$ ◀

Cilindro: $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{v} = 0,816\sqrt{2gh}$ ◀

Aro: $\bar{I} = mr^2$ $\bar{v} = 0,707\sqrt{2gh}$ ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 17.4



Uma barra delgada AB de 15 kg tem $2,5\text{ m}$ de comprimento e está pivotada em um ponto O , situado a $0,5\text{ m}$ da extremidade B . A outra extremidade é pressionada contra uma mola de constante $k = 300\text{ kN/m}$, até que a mola esteja comprimida 40 mm . A barra fica, então, em uma posição horizontal. Se a barra é liberada dessa posição, determine a velocidade angular e a reação no pivô O quando a barra passa pela posição vertical.

SOLUÇÃO

Posição 1. Energia potencial. Como a mola está comprimida 40 mm , temos $x_1 = 40\text{ mm}$.

$$V_e = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} (300\,000\text{ N/m}) (0,040\text{ m})^2 = 240\text{ J}$$

Escolhendo o nível de referência mostrado na figura, temos $V_g = 0$; logo,

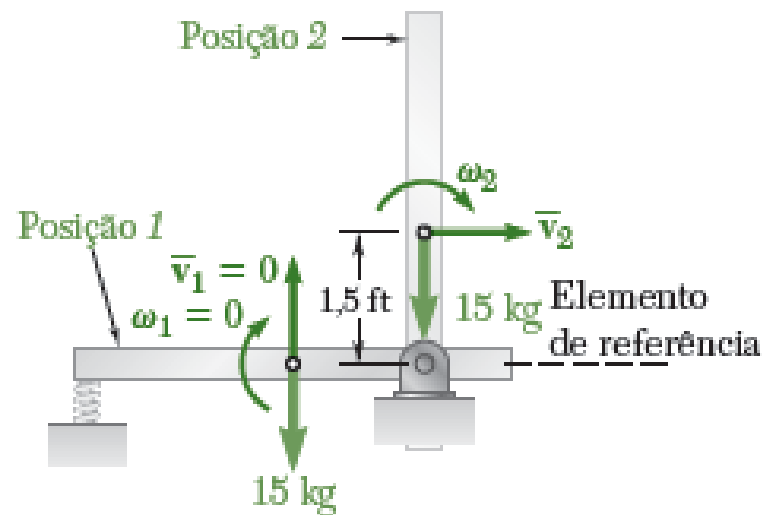
$$V_1 = V_e + V_g = 240\text{ J}$$

Energia cinética. Como a velocidade na posição 1 é nula, temos $T_1 = 0$.

Posição 2. Energia potencial. A elongação da mola é zero e temos $V_e = 0$. Como o centro de gravidade da barra está agora a $0,75\text{ m}$ acima do nível de referência,

$$V_g = (147,15\text{ N})(0,75\text{ m}) = 110,4\text{ J}$$

$$V_2 = V_e + V_g = 110,4\text{ J}$$



Energia cinética. Representando por ω_2 a velocidade angular da barra na posição 2, notamos que a barra gira em torno de O e escrevemos $\bar{v}_2 = \bar{r}\omega_2 = 0,75\omega_2$.

$$\bar{I} = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12}(1,5 \text{ kg})(2,5 \text{ m})^2 = 7,81 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_2^2 = \frac{1}{2} (15) (0,75\omega_2)^2 + \frac{1}{2} (7,81) \omega_2^2 = 8,12 \omega_2^2$$

Conservação da energia

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 240 \text{ J} = 8,12 \omega_2^2 + 110,4 \text{ J}$$

$$\omega_2 = 3,995 \text{ rad/s} \downarrow \blacktriangleleft$$

Reação na posição 2. Como $\omega_2 = 3,995 \text{ rad/s}$, os componentes da aceleração de G quando a barra passa pela posição 2 são

$$\bar{a}_n = \bar{r}\omega_2^2 = (0,75 \text{ m})(3,995 \text{ rad/s})^2 = 11,97 \text{ m/s}^2 \quad \bar{\mathbf{a}}_n = 11,97 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \quad \bar{\mathbf{a}}_t = \bar{r}\alpha \rightarrow$$

Expressamos que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas, representado pelo vetor de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_t$ e $m\bar{\mathbf{a}}_n$, ligados a G , e pelo binário $\bar{I}\alpha$.

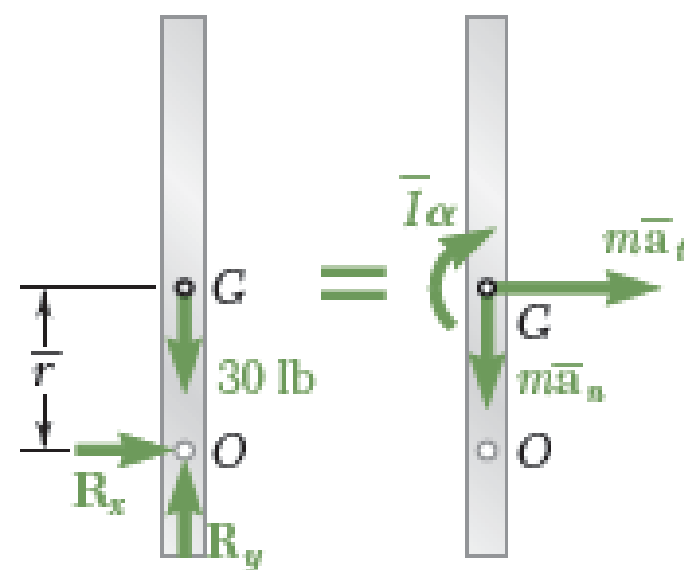
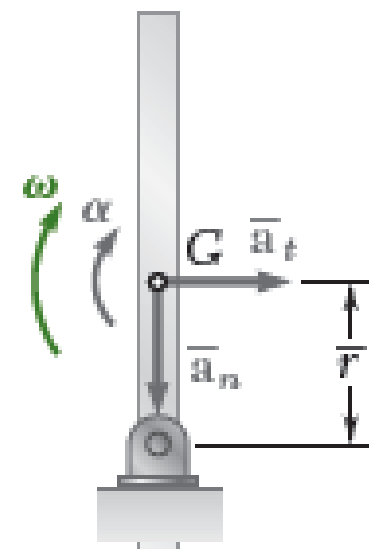
$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma (M_O)_{\text{efet}}: \quad 0 = \bar{I}\alpha + m(\bar{r}\alpha)r \quad \alpha = 0$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{efet}}: \quad R_x = m(\bar{r}\alpha) \quad R_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: \quad R_y - 147,15 \text{ N} = -m\bar{a}_n$$

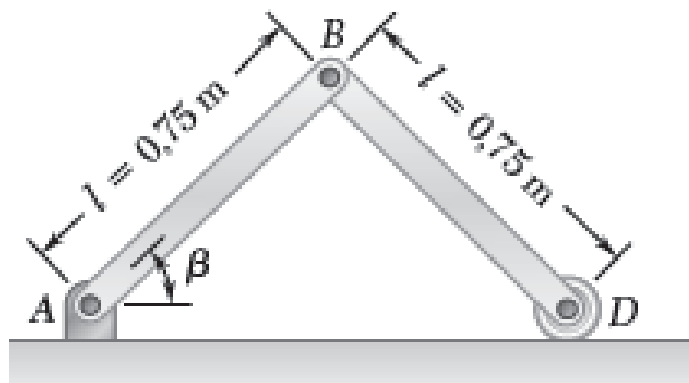
$$R_y - 147,15 \text{ N} = - (15 \text{ kg})(11,97 \text{ m/s}^2)$$

$$R_y = +32,4 \text{ N} \quad \mathbf{R} = 32,4 \text{ N} \uparrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 17.5

Cada uma das barras delgadas mostradas tem 0,75 m de comprimento e 6 kg de massa. Se o sistema é liberado do repouso com $\beta = 60^\circ$, determine (a) a velocidade angular da barra AB quando $\beta = 20^\circ$ e (b) a velocidade do ponto D no mesmo instante.



SOLUÇÃO

Cinemática do movimento quando $\beta = 20^\circ$. Como $\mathbf{v}_B$ é perpendicular à barra AB e $\mathbf{v}_D$ é horizontal, o centro instantâneo de rotação da barra BD está localizado em C . Considerando a geometria da figura, obtemos

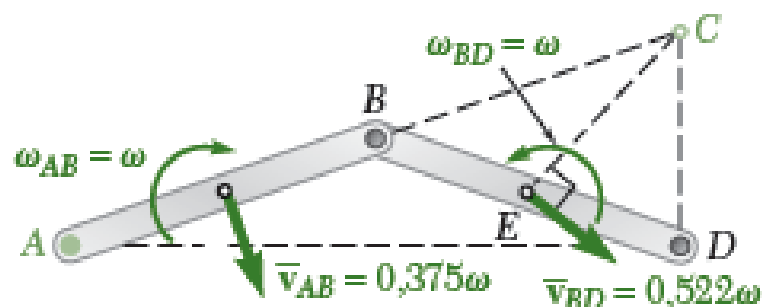
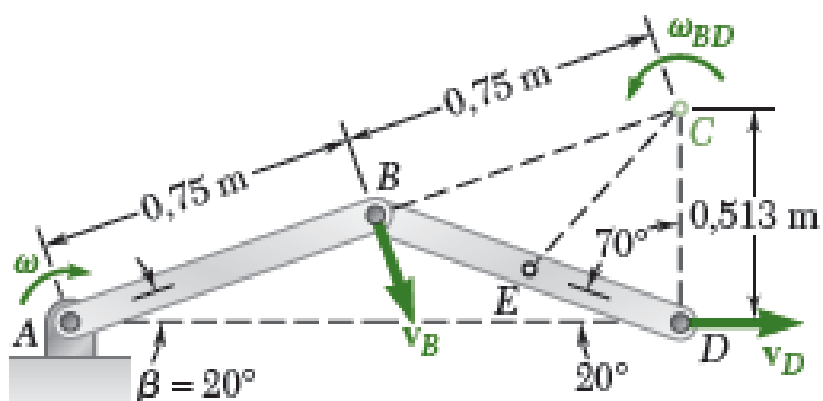
$$BC = 0,75 \text{ m} \quad CD = 2(0,75 \text{ m}) \sin 20^\circ = 0,513 \text{ m}$$

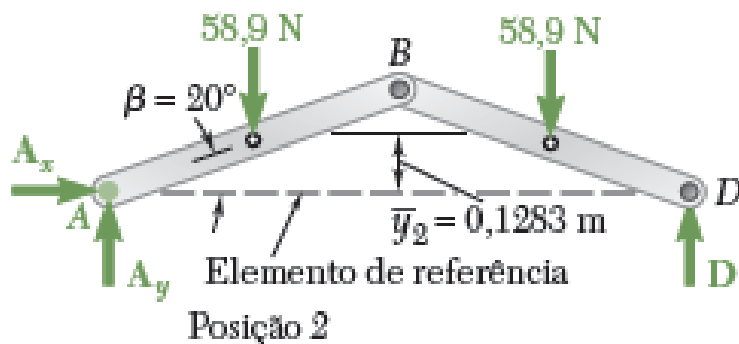
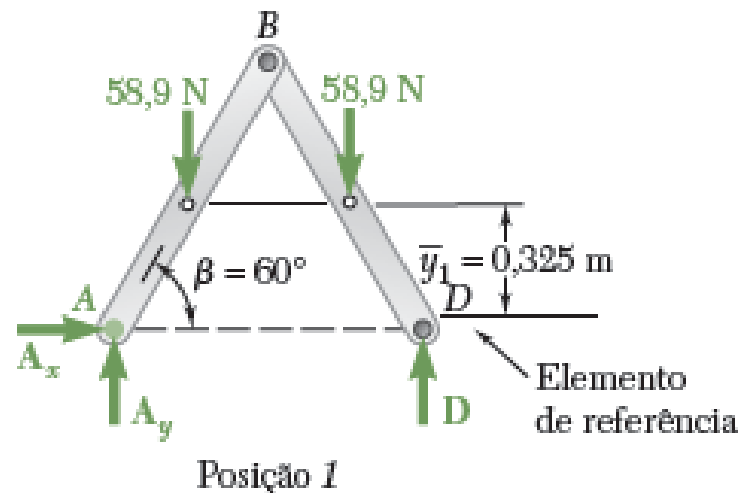
Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo CDE , estando E localizado no centro de massa da barra BD , encontramos $EC = 0,522 \text{ m}$. Representando por ω a velocidade angular da barra AB , temos

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB} &= (0,375 \text{ m})\omega & \bar{\mathbf{v}}_{AB} &= 0,375\omega \searrow \\ v_B &= (0,75 \text{ m})\omega & \mathbf{v}_B &= 0,75\omega \searrow \end{aligned}$$

Como a barra BD parece girar em torno do ponto C , escrevemos

$$\begin{aligned} v_B &= (BC)\omega_{BD} & (0,75 \text{ m})\omega &= (0,75 \text{ m})\omega_{BD} & \omega_{BD} &= \omega \uparrow \\ \bar{v}_{BD} &= (EC)\omega_{BD} = (0,522 \text{ m})\omega & \bar{\mathbf{v}}_{BD} &= 0,522\omega \searrow \end{aligned}$$





Posição 1. Energia potencial. Escolhendo o nível de referência mostrado e observando que $W = (6 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 58,86 \text{ N}$, temos

$$V_1 = 2W\bar{y}_1 = 2(58,86 \text{ N})(0,325 \text{ m}) = 38,26 \text{ J}$$

Energia cinética. Como o sistema está em repouso, $T_1 = 0$.

Posição 2. Energia potencial

$$V_2 = 2W\bar{y}_2 = 2(58,86 \text{ N})(0,1283 \text{ m}) = 15,10 \text{ J}$$

Energia cinética

$$I_{AB} = \bar{I}_{BD} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(6 \text{ kg})(0,75 \text{ m})^2 = 0,281 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_{AB}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{AB}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}_{BD}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{BD}\omega_{BD}^2 = \\ &= \frac{1}{2}(6)(0,375\omega)^2 + \frac{1}{2}(0,281)\omega^2 + \frac{1}{2}(6)(0,522\omega)^2 + \frac{1}{2}(0,281)\omega^2 = \\ &= 1,520\omega^2 \end{aligned}$$

Conservação da energia

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 38,26 \text{ J} = 1,520\omega^2 + 15,10 \text{ J}$$

$$\omega = 3,90 \text{ rad/s} \quad \omega_{AB} = 3,90 \text{ rad/s} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

Velocidade do ponto D

$$v_D = (CD)\omega = (0,513 \text{ m})(3,90 \text{ rad/s}) = 2,00 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_D = 2,00 \text{ m/s} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

exercícios

- 17.3** Dois discos de mesmo material estão presos a um eixo como mostrado na figura. O disco A tem raio r e espessura b , enquanto o disco B tem raio nr e espessura $3b$. Um binário M de intensidade constante é aplicado quando o sistema está em repouso e é removido após o sistema realizar duas revoluções. Determinar o valor de n que resulte na maior velocidade final para um ponto na aba do disco B .
- 17.4** Dois discos de mesmo material estão presos a um eixo como mostrado na figura. O disco A tem massa de 15 kg e um raio $r = 125$ mm. O disco B tem o triplo da espessura do disco A . Sabendo que um binário M de intensidade 20 N · m é aplicado ao disco A quando o sistema está em repouso, determine o raio nr do disco B para que a velocidade angular do sistema seja de 600 rpm após quatro revoluções.
- 17.18** Uma barra delgada de comprimento l e peso W é pivotada em uma extremidade como mostra a figura. Ela é liberada do repouso na posição horizontal e oscila livremente. (a) Determine a velocidade angular da barra quando ela passa por meio da posição vertical e determine a reação correspondente no pivô. (b) Resolva a parte a para $W = 10$ N e $l = 1$ m.

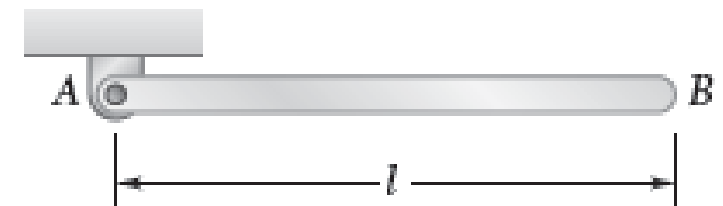
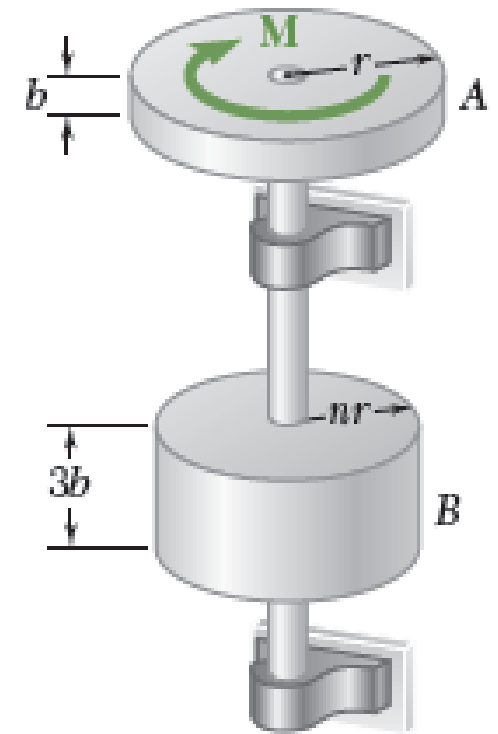


Figura P17.18

exercícios

- 17.24** Um rolo cilíndrico uniforme de 20 kg, inicialmente em repouso, está sujeito a uma força de 90 N como mostrado na figura. Sabendo que o corpo rola sem deslizar, determine (a) a velocidade do seu centro G após ele ter se deslocado 1,5 m, (b) a força de atrito requerida para evitar o deslizamento.

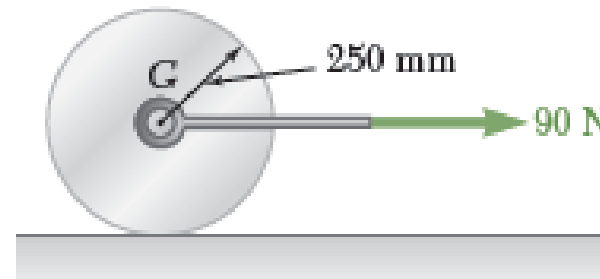
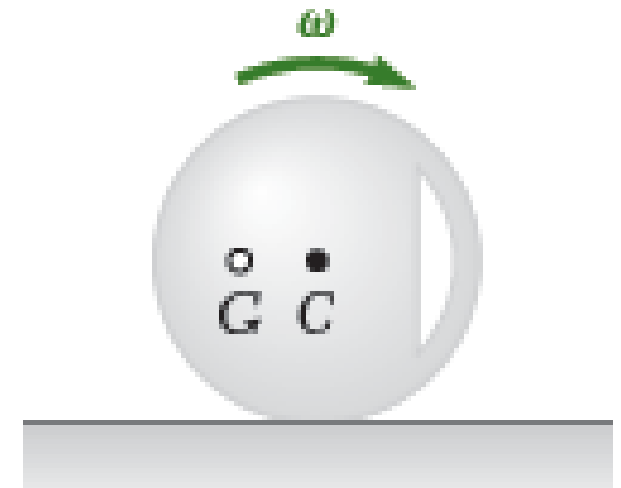


Figura P17.24

- 17.27** O centro de massa G de uma roda de 3 kg de raio $R = 180$ mm é localizado a uma distância $r = 60$ mm do centro geométrico C . O raio de giração centroidal da roda é $\bar{k} = 90$ mm. Como a roda rola sem deslizamento, observa-se que sua velocidade angular varia. Sabendo que $\omega = 8$ rad/s na posição mostrada na figura, determine (a) a velocidade angular da roda quando o centro de massa G está diretamente acima do centro geométrico C , (b) a reação na superfície horizontal no mesmo instante.



exercícios

17.33 **a** **17.35** O estrado de 9 kg está apoiado como mostrado na figura, por dois discos uniformes que rolam sem deslizar em todas as superfícies de contato. A massa de cada disco é $m = 6$ kg e o raio de cada disco é $r = 80$ mm. Sabendo que o sistema está inicialmente em repouso, determine a velocidade do estrado após ele ter se deslocado 250 mm.

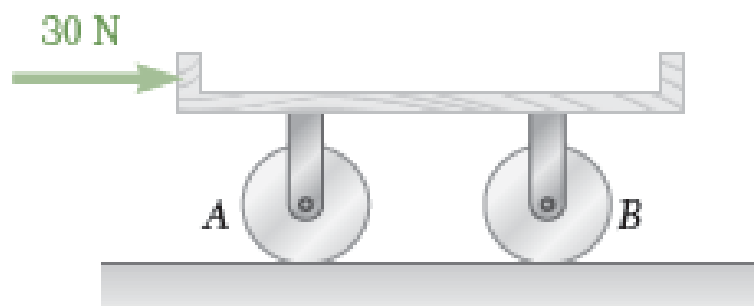


Figura P17.33



Figura P17.34

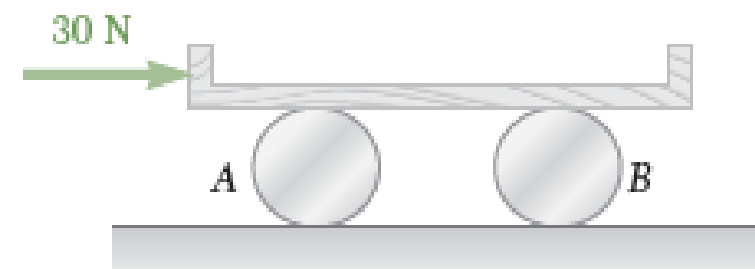
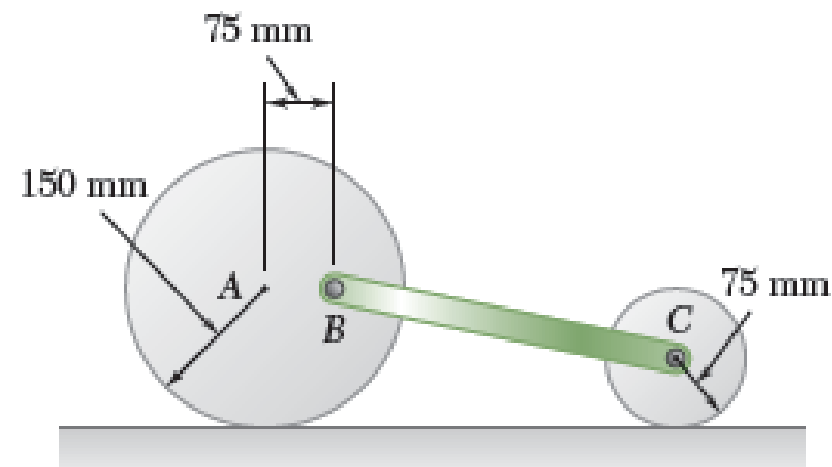


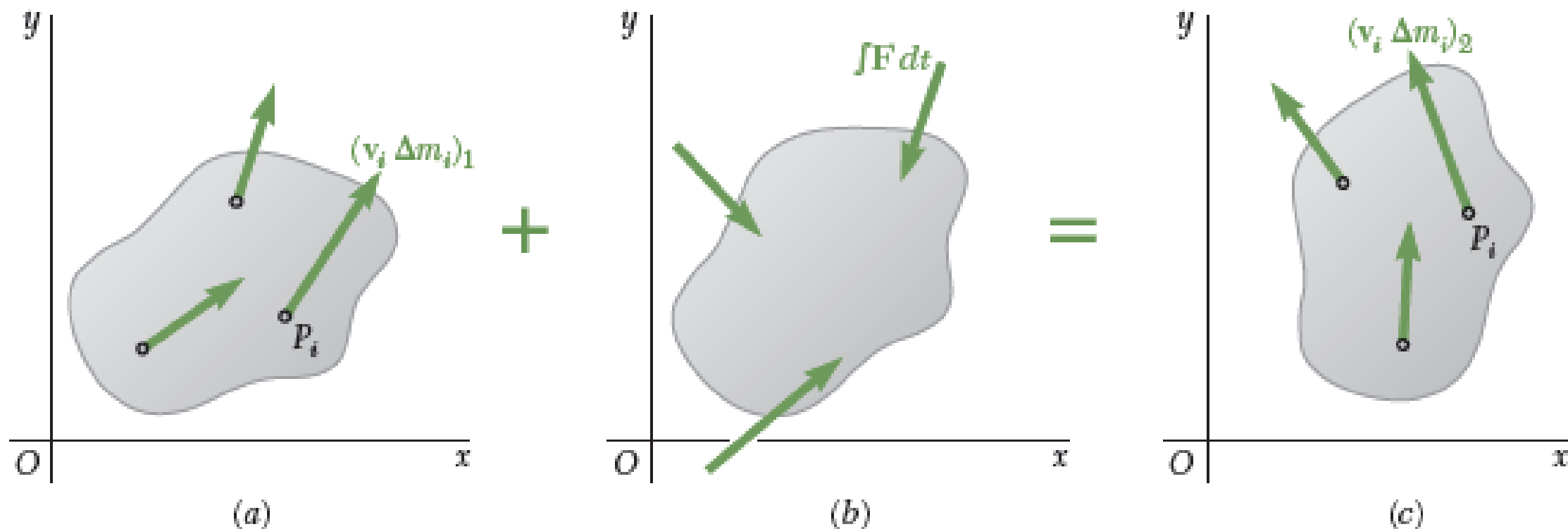
Figura P17.35

17.32 A barra BC de 5 kg é presa por pinos a dois discos uniformes como mostra a figura. A massa do disco de raio de 150 mm é 6 kg e que a massa do disco de raio de 75 mm é 1,5 kg. Sabendo que o sistema é liberado do repouso na posição mostrada, determine a velocidade da barra depois do disco A ter girado 90° .



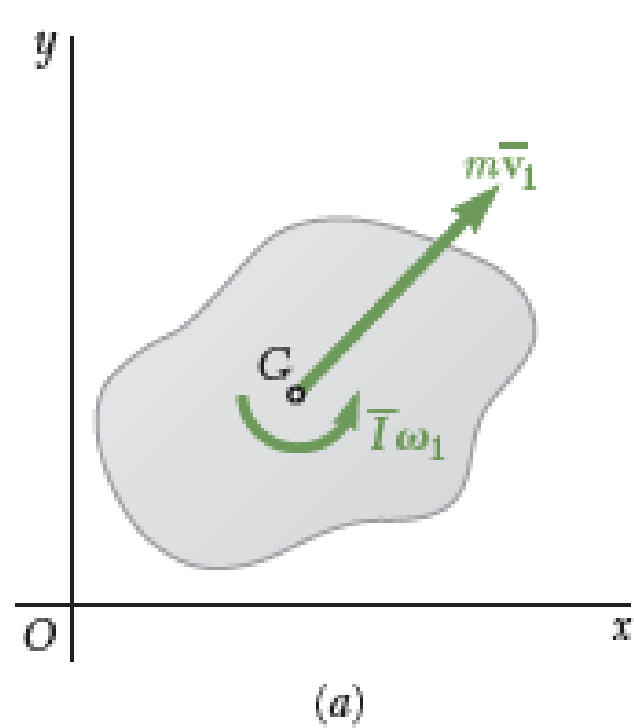
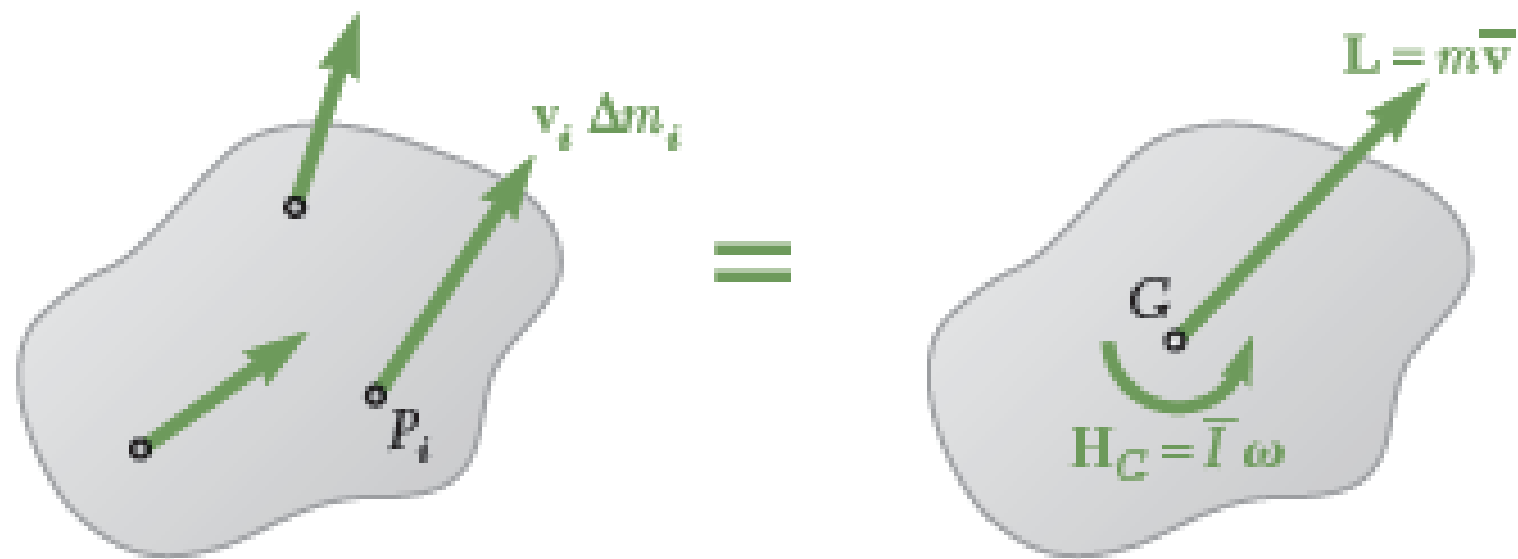
Impulso e quantidade de movimento

$$\text{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \text{Sist. de Imp. Ext.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Sist. de Quant. de Mov.}_2$$

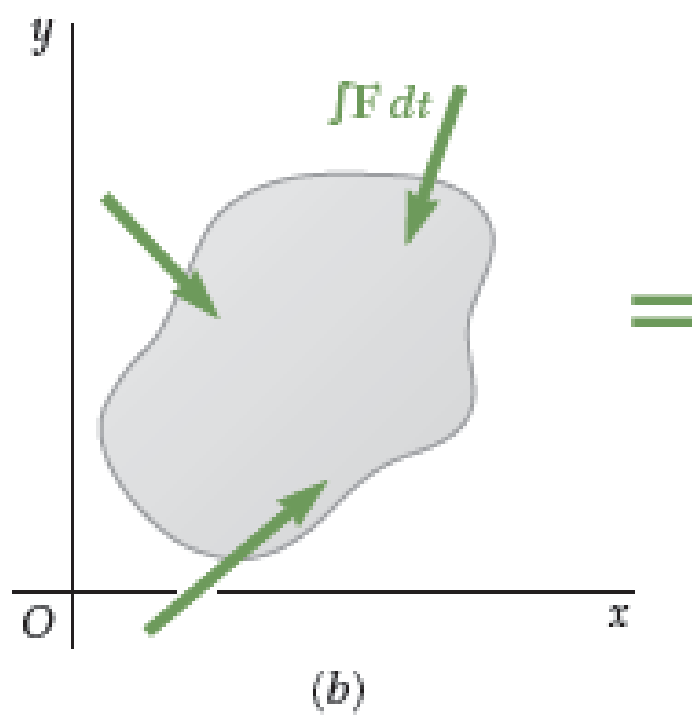


$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

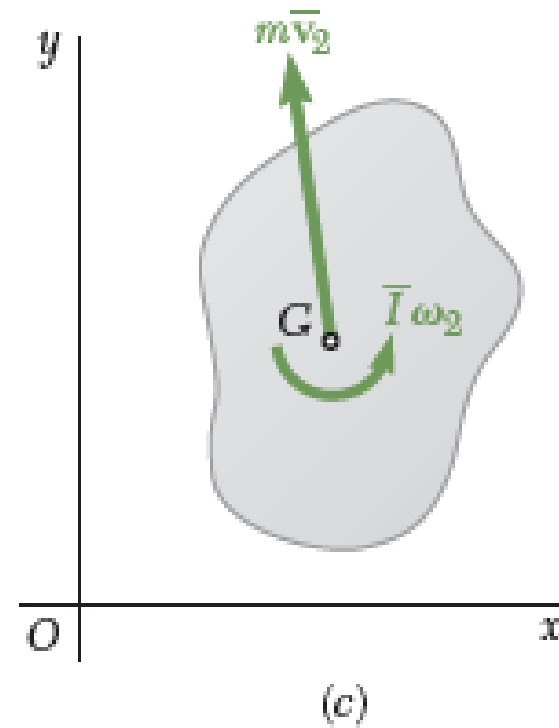
$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i \Delta m_i \quad \mathbf{H}_G = \bar{I} \omega.$$



+



=



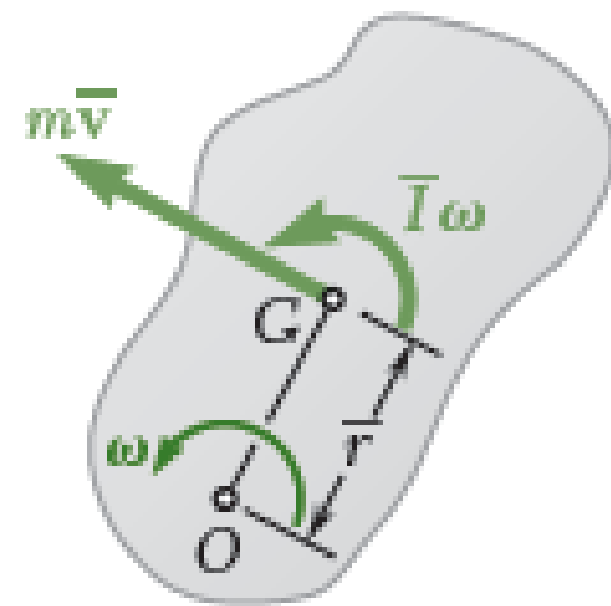
Quantidade de movimento

Rotação não centroidal. Nesse caso particular de movimento, a intensidade da velocidade do centro de massa do corpo é $\bar{v} = \bar{r}\omega$, onde $\bar{r}$ representa a distância do centro de massa ao eixo fixo de rotação e ω representa a velocidade angular do corpo no instante considerado; a intensidade do vetor quantidade de movimento ligado a G é, então, $m\bar{v} = m\bar{r}\omega$. Somando os momentos em relação a O do vetor quantidade de movimento e do binário quantidade de movimento angular (Fig. 17.9) e usando o teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia, verificamos que a quantidade de movimento angular H_O do corpo em relação a O tem a intensidade*

$$\bar{I}\omega + (m\bar{r}\omega)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega = I_O\omega \quad (17.15)$$

Igualando os momentos em relação a O das quantidades de movimento e impulsos em (17.14), escrevemos

$$I_O\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = I_O\omega_2 \quad (17.16)$$



Conservação de quantidade de movimento angular

Quando não há forças externas agindo sobre um corpo rígido ou sistema de corpos rígidos, os impulsos das forças externas são nulos, e o sistema de quantidades de movimento no tempo t_1 é equipolente ao sistema de quantidades de movimento no tempo t_2 . Somando e igualando sucessivamente os componentes em x , os componentes em y e os momentos das quantidades de movimento nos tempos t_1 e t_2 , concluimos que a quantidade de movimento linear total do sistema conserva-se em qualquer direção e que sua quantidade de movimento angular total conserva-se em relação a qualquer ponto.

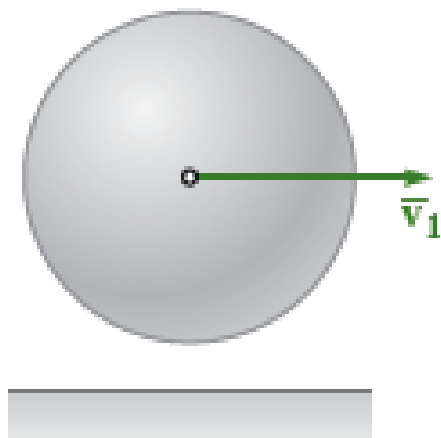
Entretanto, há muitas aplicações de engenharia em que *a quantidade de movimento linear não se conserva*, embora *a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a um dado ponto O seja conservada*, isto é, em que

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (17.17)$$

Tais casos ocorrem quando as linhas de ação de todas as forças externas passam por O ou, de modo mais geral, quando a soma dos impulsos angulares das forças externas em torno de O é nula.

PROBLEMA RESOLVIDO 17.7

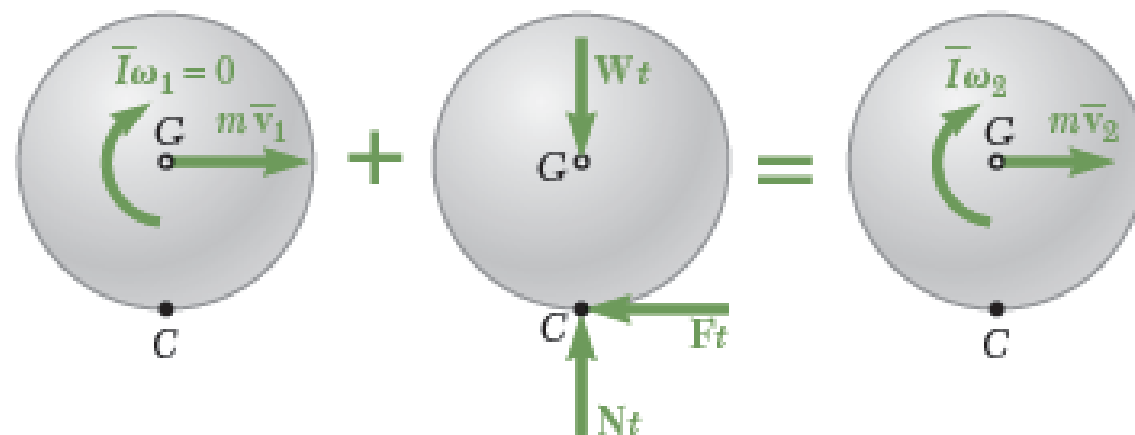
Uma esfera uniforme de massa m e raio r é lançada ao longo de uma superfície horizontal rugosa com uma velocidade linear $\bar{v}_1$ e sem velocidade angular. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e a superfície, determine (a) o tempo t_2 em que a esfera começará a rolar sem deslizar e (b) as velocidades linear e angular da esfera no tempo t_2 .



SOLUÇÃO

Enquanto a esfera está deslizando em relação à superfície, ela está sujeita à força normal $\mathbf{N}$, à força de atrito $\mathbf{F}$ e a seu peso $\mathbf{W}$ de intensidade $W = mg$.

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento à esfera desde o tempo $t_1 = 0$, quando ela é posta sobre a superfície, até o tempo $t_2 = t$, quando ela começa a rolar sem deslizar.



€

$$\begin{aligned} \text{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \text{Sist. de Imp. Ext.}_{1 \rightarrow 2} &= \\ &= \text{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \end{aligned}$$

$$+\uparrow \text{ componentes em } y: \quad Nt - Wt = 0 \quad (1)$$

$$+\rightarrow \text{ componentes em } x: \quad m\bar{v}_1 - Ft = m\bar{v}_2 \quad (2)$$

$$+\downarrow \text{ sobre o momento } G: \quad Ftr = \bar{I}\omega_2 \quad (3)$$

De (1), obtemos $N = W = mg$. Durante todo o intervalo de tempo considerado, ocorre deslizamento no ponto C e temos $F = \mu_k N = \mu_k mg$. Substituindo CS no lugar de F em (2), escrevemos

$$m\bar{v}_1 - \mu_k mgt = m\bar{v}_2 \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 - \mu_k gt \quad (4)$$

Substituindo $F = \mu_k mg$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ em (3),

$$\mu_k mgtr = \frac{2}{5}mr^2\omega_2 \quad \omega_2 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t \quad (5)$$

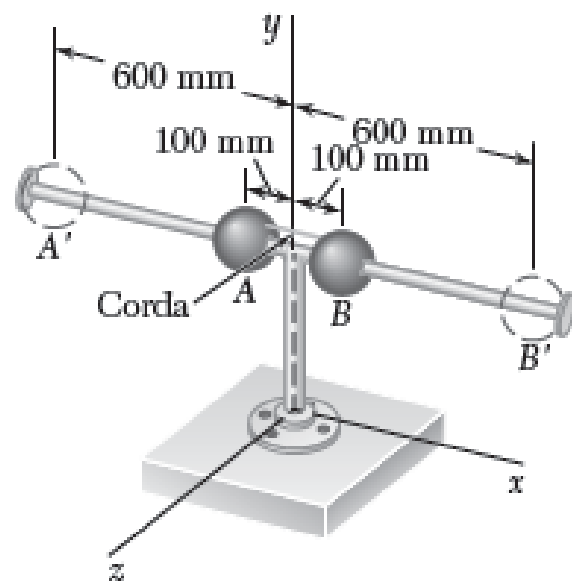
A esfera começará a rolar sem deslizar quando a velocidade v_C do ponto de contato for nula. Nesse instante, o ponto C torna-se o centro instantâneo de rotação e temos $\bar{v}_2 = r\omega_2$. Com essa consideração em (4) e (5), escrevemos

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \qquad \bar{v}_1 - \mu_k g t = r \left(\frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t \right) \qquad t = \frac{2}{7} \frac{\bar{v}_1}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

Substituindo essa expressão para t em (5),

$$\omega_2 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} \left(\frac{2}{7} \frac{\bar{v}_1}{\mu_k g} \right) \qquad \omega_2 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_1}{r} \qquad \omega_2 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_1}{r} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \qquad \bar{v}_2 = r \left(\frac{5}{7} \frac{\bar{v}_1}{r} \right) \qquad \bar{v}_2 = \frac{5}{7} \bar{v}_1 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

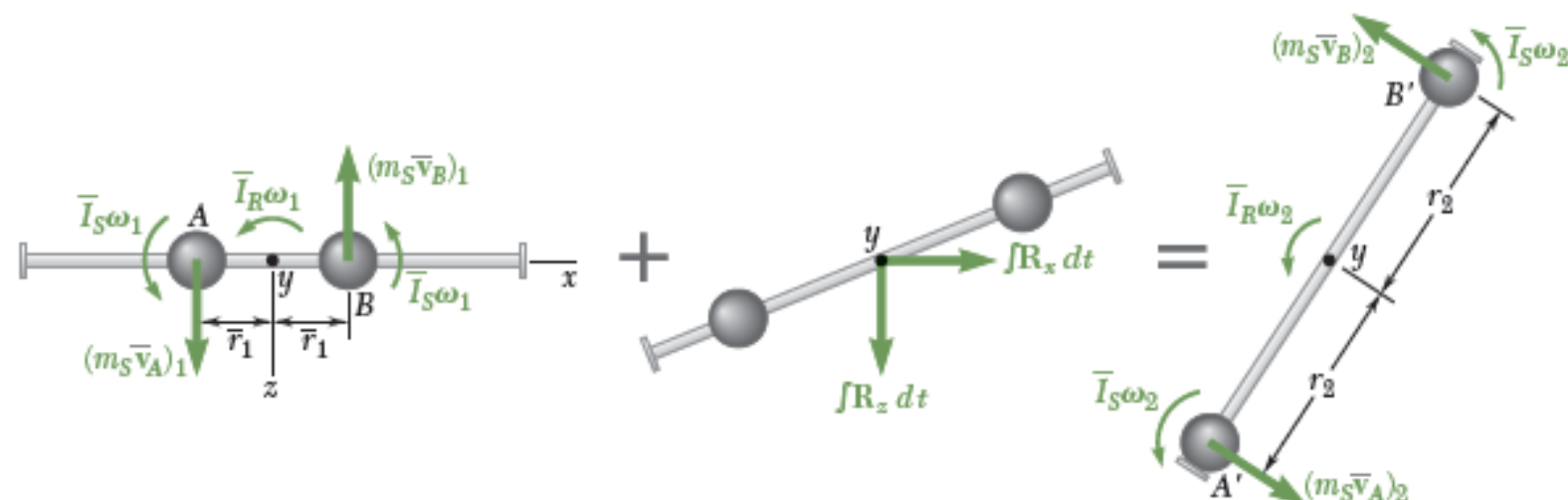


PROBLEMA RESOLVIDO 17.8

Duas esferas sólidas de raio de 100 mm, pesando 1 kg cada, estão montadas em A e B sobre a barra horizontal $A'B'$, que gira livremente em torno da vertical com uma velocidade angular de 6 rad/s no sentido anti-horário. As esferas são mantidas no lugar por uma corda que é subitamente cortada. Sabendo que o momento de inércia centroidal da barra e do pivô é $\bar{I}_R = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, determine (a) a velocidade angular da barra após as esferas terem se movido para as posições A' e B' e (b) a energia perdida devido ao impacto plástico das esferas e dos anteparos em A' e B' .

SOLUÇÃO

a. Princípio de impulso e quantidade de movimento. Para determinar a velocidade angular final da barra, expressaremos que as quantidades de movimento inicial das várias partes do sistema e os impulsos das forças externas são, em conjunto, equipolentes às quantidades de movimento finais do sistema.



$$\begin{aligned} \text{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \text{Sist. de Imp. Ext.}_{1 \rightarrow 2} &= \\ &= \text{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \end{aligned}$$

Observando que as forças externas consistem dos pesos e da reação no pivô, que não produzem momento em torno do eixo y , e notando que $\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{r}\omega$, igualamos os momentos em torno do eixo y :

$$\begin{aligned} 2(m_s \bar{r}_1 \omega_1) \bar{r}_1 + 2\bar{I}_S \omega_1 + \bar{I}_R \omega_1 &= 2(m_s \bar{r}_2 \omega_2) \bar{r}_2 + 2\bar{I}_S \omega_2 + \bar{I}_R \omega_2 \\ (2m_s \bar{r}_1^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R) \omega_1 &= (2m_s \bar{r}_2^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R) \omega_2 \end{aligned} \quad (1)$$

expressando que *a quantidade de movimento angular do sistema em relação ao eixo y conserva-se*. Calculamos agora

$$\bar{I}_S = \frac{2}{5} m_s a^2 = \frac{2}{5} (1 \text{ kg})(0,1 \text{ m})^2 = 0,004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m_s \bar{r}_1^2 = (1 \text{ kg})(0,1 \text{ m})^2 = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad m_s \bar{r}_2^2 = (1 \text{ kg})(0,6 \text{ m})^2 = 0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Substituindo esses valores e $\bar{I}_R = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$ em (1):

$$0,428(6 \text{ rad/s}) = 1,128\omega_2 \quad \omega_2 = 2,28 \text{ rad/s} \quad \blacktriangleleft$$

b. Energia perdida. A energia cinética do sistema em um instante qualquer é

$$T = 2\left(\frac{1}{2} m_s \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_S \omega^2\right) + \frac{1}{2} \bar{I}_R \omega^2 = \frac{1}{2} (2m_s \bar{r}^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R) \omega^2$$

Trazendo os valores numéricos encontrados anteriormente, temos

$$T_1 = \frac{1}{2} (0,428)(6)^2 = 7,704 \text{ J} \quad T_2 = \frac{1}{2} (1,128) (2,28)^2 = 2,932 \text{ J}$$

$$\text{Energia perdida} = T_1 - T_2 = 7,704 - 2,932 = 4,77 \text{ J} \quad \blacktriangleleft$$

exercícios

17.52 O rotor de um motor elétrico tem massa de 25 kg e raio de giração de 180 mm. Observa-se que são necessários 4,2 min para o rotor chegar ao repouso a partir de uma velocidade angular de 3.600 rpm após ser desligado. Determine a intensidade média do binário devido ao atrito cinético nos mancais do rotor.

17.53 Um volante de 2.000 kg com raio de giração de 700 mm é deixado livre a partir de uma velocidade angular de 450 rpm. Sabendo que o atrito cinético produz um binário de intensidade de 16 N · m, determine o tempo necessário para o volante chegar ao repouso.

17.56 Um cilindro de raio r e peso W com velocidade angular inicial ω_0 no sentido anti-horário é colocado no canto formado pelo piso e por uma parede vertical. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o cilindro, a parede e o piso, deduza uma expressão para o tempo necessário de o cilindro chegar ao estado de repouso.

17.57 Um cilindro de 3 kg de raio $r = 125$ mm com uma velocidade angular inicial $\omega_0 = 90$ rad/s no sentido anti-horário é colocado no canto formado pelo piso e por uma parede vertical. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,10 entre o cilindro, a parede e o piso, deduza uma expressão para o tempo necessário de o cilindro chegar ao estado de repouso.

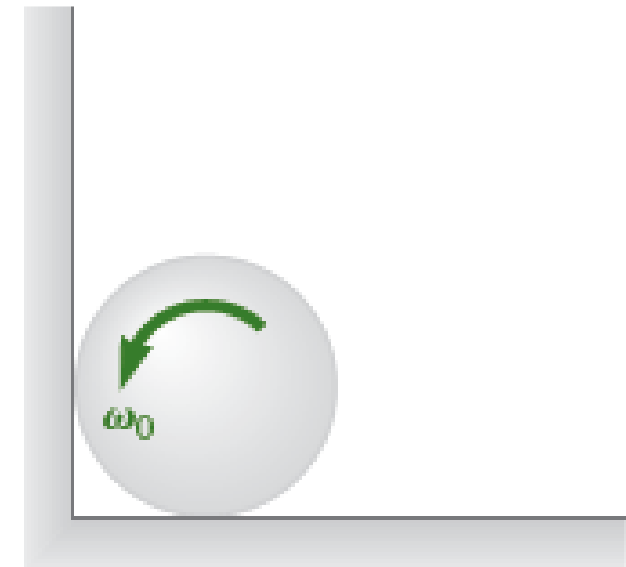


Figura P17.56 e P17.57

exercícios

17.74 e 17.75 Um cilindro de 240 mm de raio e massa de 8 kg repousa sobre um transportador de 3 kg. O sistema está em estado de repouso quando uma força P de intensidade 10 N é aplicada como mostrado na figura durante 1,2 s. Sabendo que o cilindro rola sem deslizar sobre o transportador e desprezando a massa dos roletes, determine a velocidade resultante (a) do transportador, (b) do centro do cilindro.

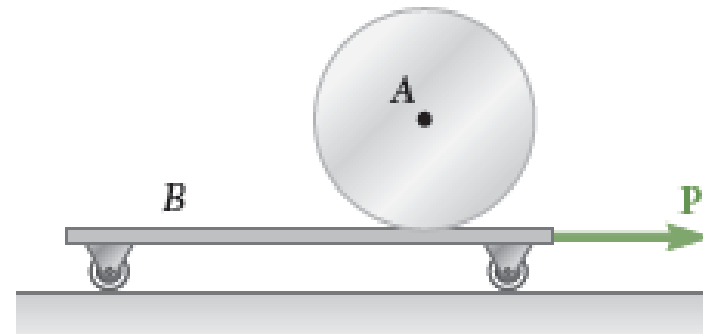


Figura P17.74

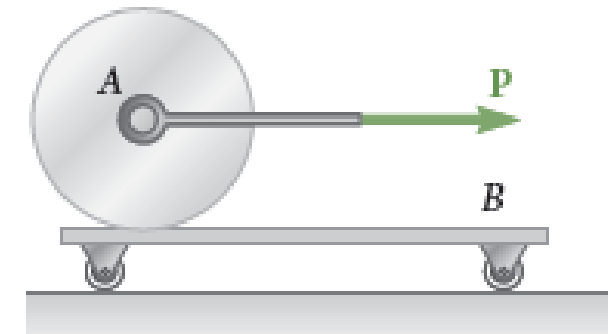


Figura P17.75

17.84 No helicóptero mostrado na figura, um rotor de cauda é usado para impedir a rotação da cabine à medida que a velocidade das pás principais é alterada. Admitindo que o rotor de cauda não esteja em operação, determine a velocidade angular final da cabine após a velocidade das pás principais ter sido alterada de 180 para 240 rpm. (A velocidade das pás principais é medida em relação à cabine, que tem um momento de inércia centroidal de $1.000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Cada uma das quatro pás principais é considerada como uma barra delgada de 4,2 m de comprimento e 25 kg de massa.)

