# LOM3100 Dinâmica - 2017

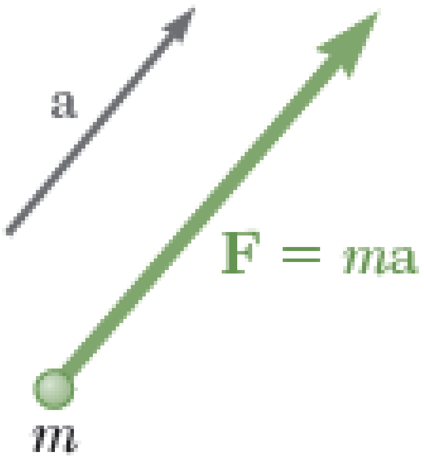
# 3. Dinâmica do ponto.

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

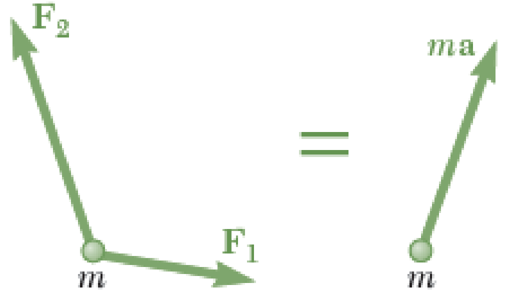
# A segunda lei de Newton (do movimento)

- *Se a força resultante que atua sobre uma partícula não for nula, a partícula terá uma aceleração proporcional à intensidade da resultante e na mesma direção dessa força resultante.*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$




$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



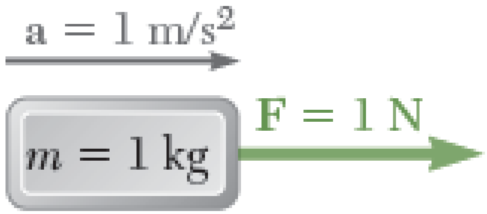

**Componentes retangulares.** Decompondo cada força **F** e a aceleração **a** em componentes retangulares, escrevemos

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

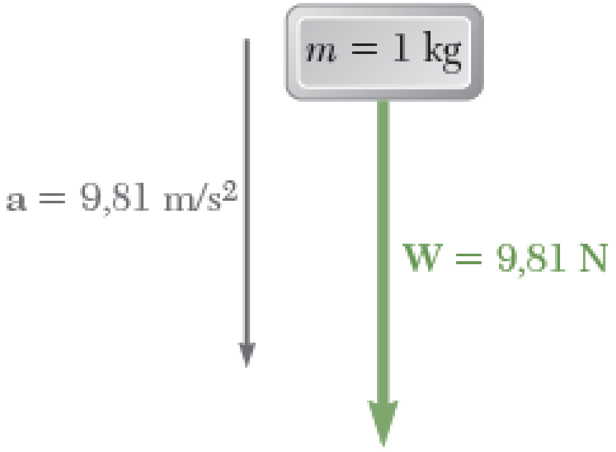
da qual se segue que

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.7}$$

# Unidades, força de gravidade (peso)



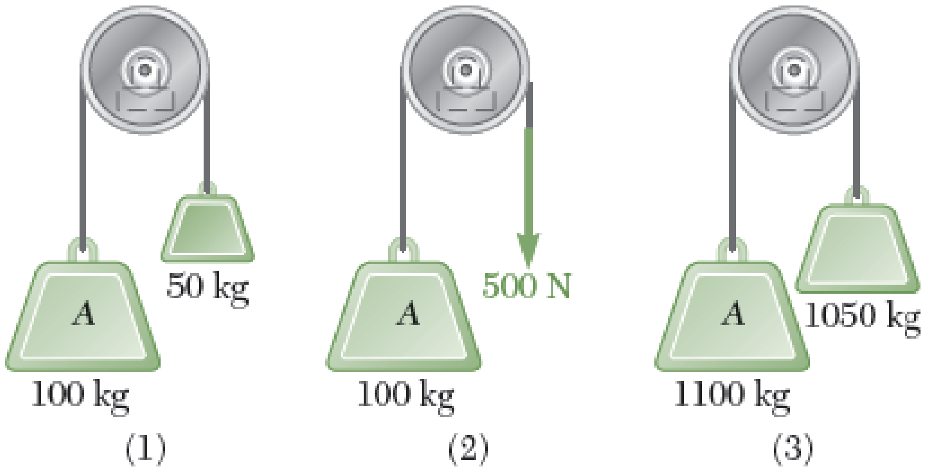

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})\,(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$




$$W = (1\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2) = 9{,}81\ \text{N}$$

$$W = mg$$

**12.19** Cada um dos sistemas mostrados na figura a seguir está inicialmente em repouso. Desprezando o atrito nos eixos e as massas das roldanas, determine para cada sistema (*a*) a aceleração do bloco *A*, (*b*) a velocidade do bloco *A* depois de ele ter se movido 3 m, (*c*) o tempo necessário para o bloco *A* atingir uma velocidade de 6 m/s.



# Dinâmica do ponto

**Componentes normal e tangencial.** Decompondo as forças e a aceleração da partícula em componentes ao longo da tangente à trajetó-

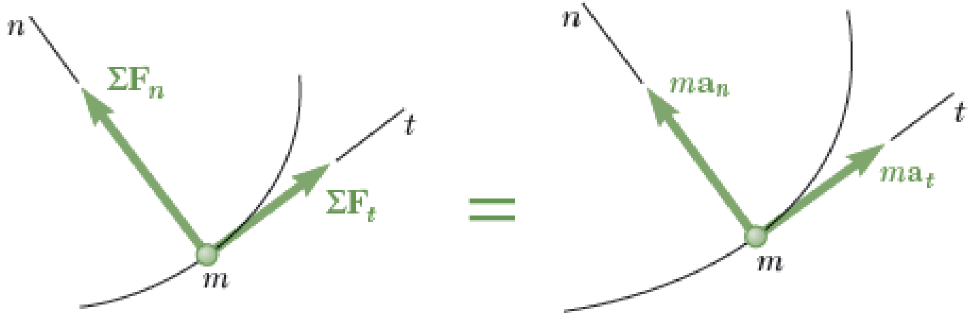



**Figura 12.7**

ria (na direção e sentido do movimento) e da normal (apontando para o interior da trajetória) (Fig. 12.7) e substituindo-as na Eq. (12.2), obtemos duas equações escalares

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n \tag{12.8}$$

Substituindo as expressões de $a_t$ e $a_n$ das Eqs. (*11.40*), temos

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.8'}$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

**12.38** Um fio único *ACB* de 80 cm de comprimento passa por um anel em *C* que está preso a uma esfera que roda com uma velocidade escalar constante $v$ no círculo horizontal mostrado na figura. Sabendo que $\theta_1 = 60°$, $\theta_2 = 30°$ e que a tração é a mesma em ambas as partes do fio, determine a velocidade escalar $v$.

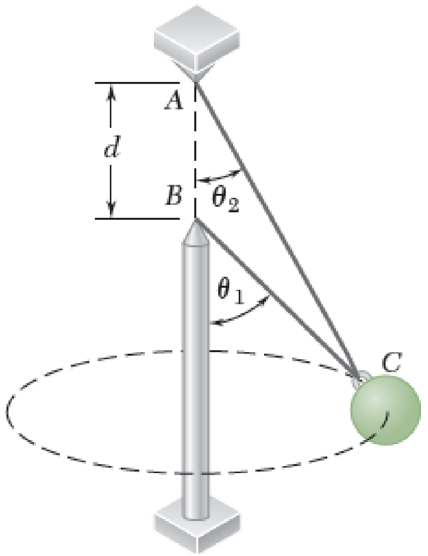



**Figura P12.38, *P12.39* e P12.40**

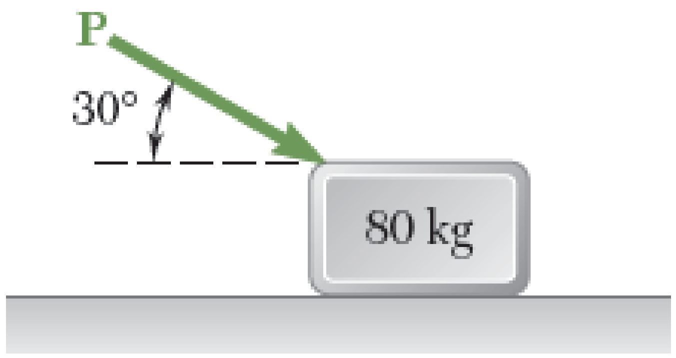
***12.39*** Um fio único *ACB* passa por um anel em *C* que está preso a uma esfera de 1 kg que roda com uma velocidade escalar constante $v$ no círculo horizontal mostrado na figura. Sabendo que $\theta_1 = 50°$, $d = 0{,}8$ m e que a tração em ambas as partes do cabo é de 6 N, determine (*a*) o ângulo $\theta_2$ e (*b*) a velocidade escalar $v$.

**12.40** Dois fios *AC* e *BC* estão amarrados a uma esfera de 7 kg que roda com uma velocidade escalar $v$ no círculo horizontal mostrado na figura. Sabendo que $\theta_1 = 55°$ e $\theta_2 = 30°$ e que $d = 1{,}4$ m, determine o intervalo de valores de $v$ para os quais ambos os fios permanecem tracionados.

**4. Quando um problema envolve atrito seco,** lembre-se de revisar as seções relevantes de *Estática* [Seções de 8.1 a 8.3] antes de tentar solucioná-lo. Em particular, você deve saber quando cada uma das equações $F = \mu_s N$ e $F = \mu_k N$ podem ser usadas. Você também deve reconhecer que se o movimento de um sistema não está especificado, é primeiramente necessário assumir um movimento possível e então verificar a validade daquela suposição.

## PROBLEMA RESOLVIDO 12.1

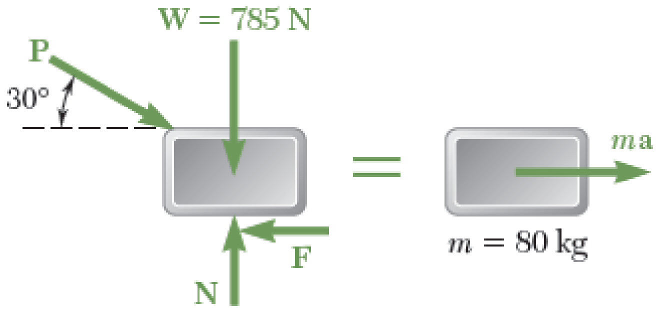
Um bloco de 80-kg está em repouso sobre um plano horizontal. Encontre a intensidade da força **P** necessária para dar ao bloco uma aceleração de 2,5 m/s² para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_k = 0{,}25$.




## SOLUÇÃO

O peso do bloco é

$$W = mg = (80 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$




Notamos que $F = \mu_k N = 0{,}25N$ e que $a = 2{,}5 \text{ m/s}^2$. Expressando que as forças que atuam no bloco são equivalentes ao vetor $m\mathbf{a}$, escrevemos

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma$: $\quad P \cos 30° - 0{,}25N = (80 \text{ kg})(2{,}5 \text{ m/s}^2)$

$$P \cos 30° - 0{,}25N = 200 \text{ N} \qquad (1)$$

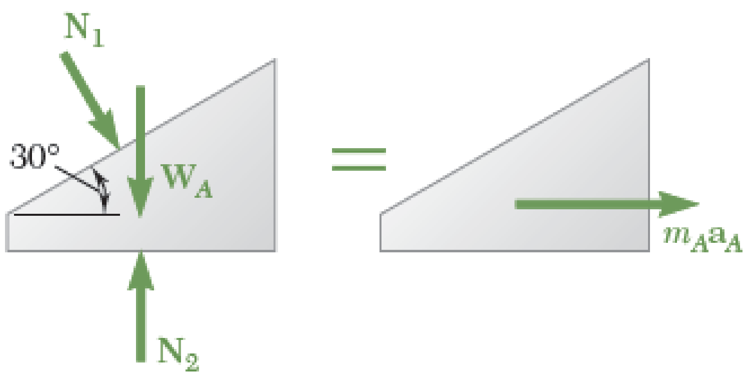
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad N - P \text{ sen } 30° - 785 \text{ N} = 0 \qquad (2)$

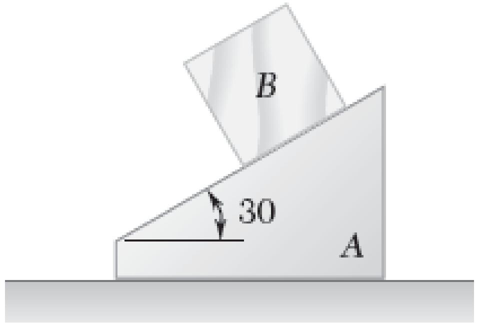
Resolvendo (2) para $N$ e substituindo o resultado em (1), obtemos

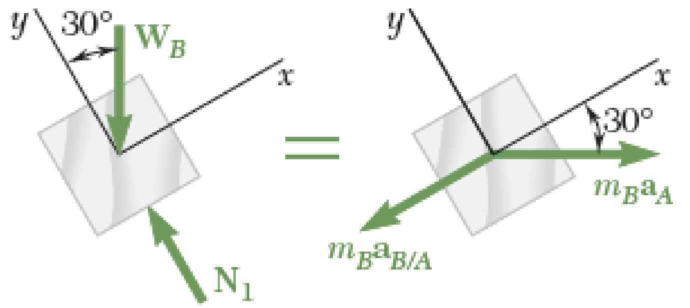
$$N = P \text{ sen } 30 + 785 \text{ N}$$
$$P \cos 30° - 0{,}25(P \text{ sen } 30° + 785 \text{ N}) = 200 \text{ N} \qquad P = 535 \text{ N} \quad ◀$$

# PROBLEMA RESOLVIDO 12.3

Um bloco $B$ de 6-kg parte do repouso e desliza sobre uma cunha $A$ de 15-kg que é suportada por uma superfície horizontal. Desprezando o atrito, determine (*a*) a aceleração da cunha e (*b*) a aceleração do bloco relativa à cunha.




## SOLUÇÃO

**Cinemática.** Primeiramente examinamos a aceleração da cunha e a aceleração do bloco.

***Cunha A.*** Como a cunha está restrita a se mover sobre a superfície horizontal, sua aceleração $\mathbf{a}_A$ é horizontal. Assumiremos que ela está dirigida para a direita.

***Bloco B.*** A aceleração de $\mathbf{a}_B$ do bloco $B$ pode ser expressa como a soma da aceleração de $A$ e da aceleração de $B$ relativa a $A$. Temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

onde $\mathbf{a}_{B/A}$ é dirigida ao longo da superfície inclinada da cunha.

**Cinética.** Desenhamos os diagramas de corpo livre da cunha e do bloco e aplicamos a segunda lei de Newton.

***Cunha A.*** Representamos as forças exercidas pelo bloco e pela superfície horizontal sobre a cunha $A$ por $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$, respectivamente.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m_A a_A: \qquad N_1 \text{ sen } 30° = m_A a_A$$
$$0{,}5N_1 = m_A a_A \qquad (1)$$

***Bloco B.*** Usando o sistema de eixos coordenados mostrado na figura e decompondo $\mathbf{a}_B$ em seus componentes $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_{B/A}$, escrevemos

$$+\nearrow\Sigma F_x = m_B a_x: \qquad -m_B g \text{ sen } 30° = m_B a_A \cos 30° - m_B a_{B/A}$$
$$-m_B g \text{ sen } 30° = m_B(a_A \cos 30° - a_{B/A})$$
$$a_{B/A} = a_A \cos 30° + g \text{ sen } 30° \qquad (2)$$
$$+\nwarrow\Sigma F_y = m_B a_y: \qquad N_1 - m_B g \cos 30° = -m_B a_A \text{ sen } 30°$$

**a. Aceleração da cunha A.** Substituindo para $N_1$ da Eq. (1) na Eq. (3), temos

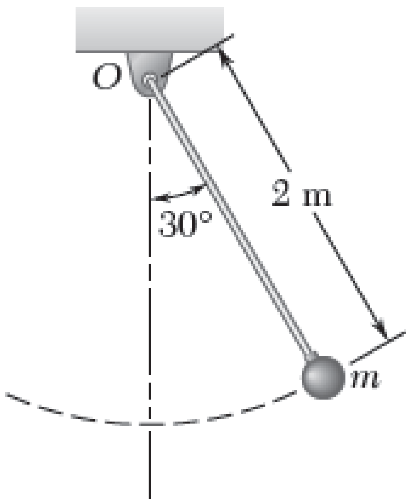
$$2m_A a_A - m_B g \cos 30° = -m_B a_A \text{ sen } 30°$$

Resolvendo para $a_A$ e substituindo os dados numéricos, escrevemos0

$$a_A = \frac{m_B g \cos 30°}{2m_A + m_B \text{ sen } 30°}\, g = \frac{(6 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)\cos 30°}{2(15 \text{ kg}) + (6 \text{ kg}) \text{ sen } 30°}$$
$$a_A = +1{,}545 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_A = 1{,}545 \text{ m/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

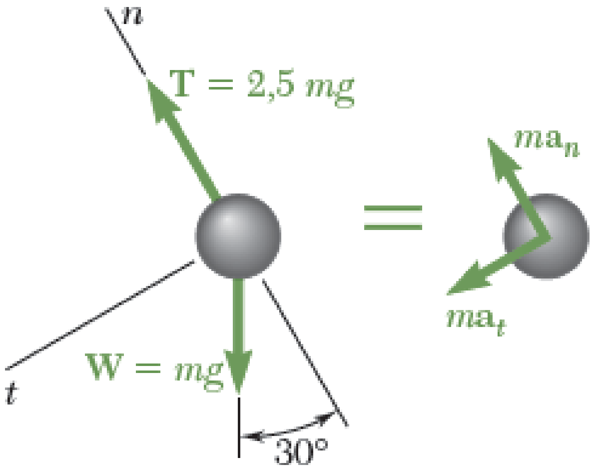
**b. Aceleração do bloco B em relação a A.** Substituindo o valor obtido para $a_A$ na Eq. (2), temos

$$a_{B/A} = (1{,}545 \text{ m/s}^2)\cos 30° + (9{,}81 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 30°$$
$$a_{B/A} = +6{,}24 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 6{,}24 \text{ m/s}^2 \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$




## PROBLEMA RESOLVIDO 12.4

A extremidade de um pêndulo de 2 m de comprimento descreve um arco de circunferência em um plano vertical. Se a tração na corda é 2,5 vezes o peso do pêndulo para a posição mostrada na figura, encontre a velocidade e a aceleração do pêndulo nessa posição.




## SOLUÇÃO

O peso do pêndulo é $W = mg$; a tração na corda é, portanto, 2,5 $mg$. Recordando que $\mathbf{a}_n$ é dirigido para $O$ e assumindo $\mathbf{a}_t$ como mostrado na figura, aplicamos a segunda lei de Newton e obtemos

$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t$:

$$mg \operatorname{sen} 30° = ma_t$$

$$a_t = g \operatorname{sen} 30° = +4{,}90 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_t = 4{,}90 \text{ m/s}^2 \swarrow \quad ◀$$

$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n$:

$$2{,}5\, mg - mg \cos 30° = ma_n$$

$$a_n = 1{,}634\, g = +16{,}03 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_n = 16{,}03 \text{ m/s}^2 \nwarrow \quad ◀$$

Como $a_n = v^2/\rho$, temos $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16{,}03 \text{ m/s}^2)$.

$$v = \pm 5{,}66 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v} = 5{,}66 \text{ m/s} \nearrow\!\!\swarrow \text{ (para cima ou para baixo)} \quad ◀$$

**12.7** Em antecipação a um aclive de 7°, um motorista de ônibus acelera a uma taxa constante de 1 m/s$^2$ enquanto ainda está na seção nivelada da rodovia. Sabendo que a velocidade escalar do ônibus é 90 km/h no inicio da subida e que o motorista não altera a posição do acelerador nem troca de marcha, determine a distância percorrida pelo ônibus na subida até sua velocidade escalar ter decrescido para 80 km/h.

**12.8** Se a distância de frenagem de um automóvel a 96 km/h é de 45 m em um piso nivelado, determine a distância de frenagem desse automóvel a 96 km/h quando ele está (*a*) subindo um plano inclinado de 5° e (*b*) descendo um plano com inclinação de 3%. Considere que a força de frenagem é independente da situação.

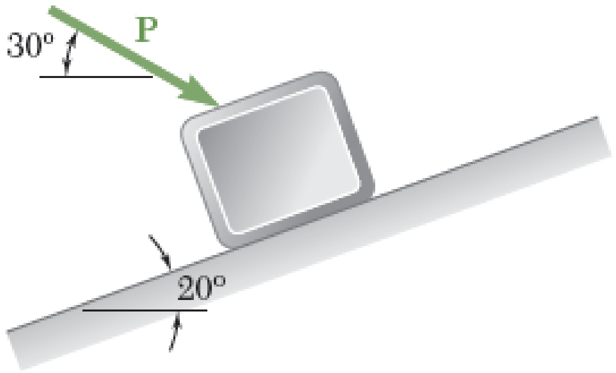


Figura P12.9

**12.9** Um pacote de 20 kg está em repouso sobre um plano inclinado quando uma força **P** é aplicada sobre ele. Determine a intensidade de **P** no caso de serem necessários 10 s para o pacote percorrer 5 m subindo no plano inclinado. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o pacote e o plano inclinado são ambos iguais a 0,30.

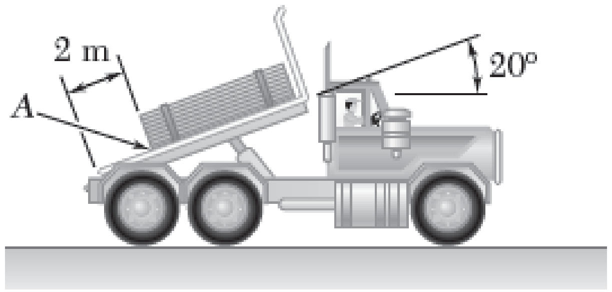
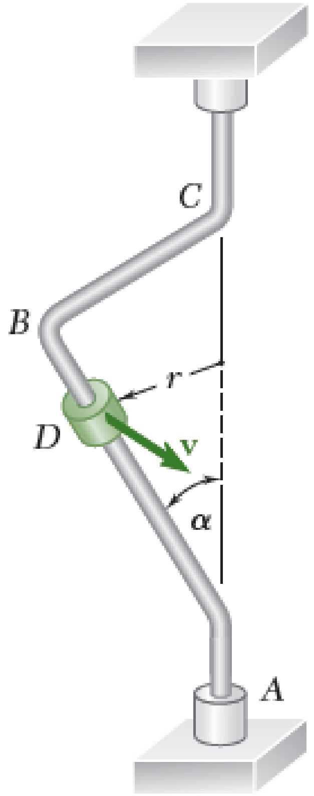


Figura P12.23

**12.23** Para descarregar uma pilha amarrada de madeira compensada de um caminhão, o motorista primeiro inclina a caçamba do caminhão e então acelera, a partir do repouso. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a camada inferior da madeira compensada e o piso da caçamba são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$, determine (*a*) a menor aceleração do caminhão que fará a pilha de madeira compensada deslizar e (*b*) a aceleração do caminhão que faz o canto *A* da pilha de madeira compensada atingir a extremidade da caçamba em 0,9 s.

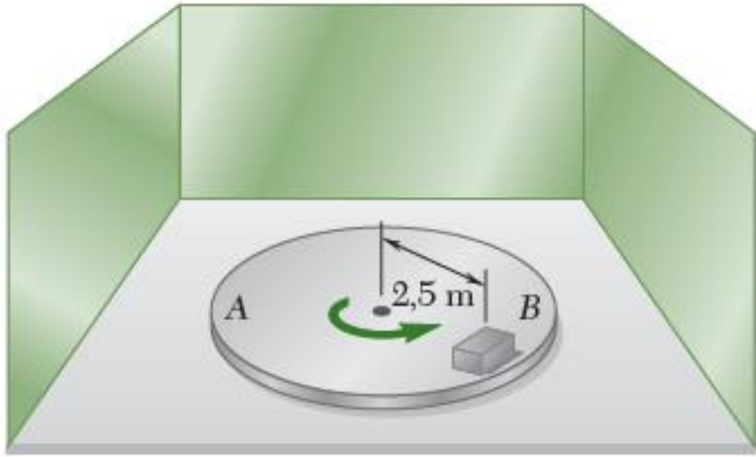



**12.55** Um pequeno colar $D$ de 300 g pode deslizar sobre a parte $AB$ de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que $\alpha = 40°$ e que a haste gira em torno da vertical $AC$ a uma taxa constante de 5 rad/s, determine o valor $r$ para o qual o colar não deslizará sobre a haste se o efeito do atrito entre a haste e o colar for desprezado.

**12.56** Um pequeno colar $D$ de 200 g pode deslizar sobre a parte $AB$ de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que a haste gira em torno da vertical $AC$ a uma taxa constante e que $\alpha = 30°$ e $r = 600$ mm, determine o intervalo de valores da velocidade $v$ para qual o colar não deslizará sobre a haste se o coeficiente de atrito estático entre a haste e o colar é 0,30.

**12.57** Um pequeno colar $D$ de 300 g pode deslizar sobre a parte $AB$ de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que $r = 200$ mm e que a haste gira em torno da vertical $AC$ a uma taxa constante de 10 rad/s, determine o menor valor admissível do coeficiente de atrito estático entre o colar e a haste se o colar não desliza quando (*a*) $\alpha = 15°$, (*b*) $\alpha = 45°$. Indique em cada caso a direção do movimento iminente.

**12.60** Uma mesa rotativa $A$ é construída em um palco para uso em uma produção teatral. Observa-se, durante um ensaio, que um baú $B$ começa a deslizar sobre a mesa 10 s depois que ela começa a girar. Sabendo que o baú é submetido a uma aceleração tangencial constante de 0,24 m/s$^2$, determine o coeficiente de atrito estático entre o baú e a mesa rotativa.



# Quantidade de movimento linear e angular

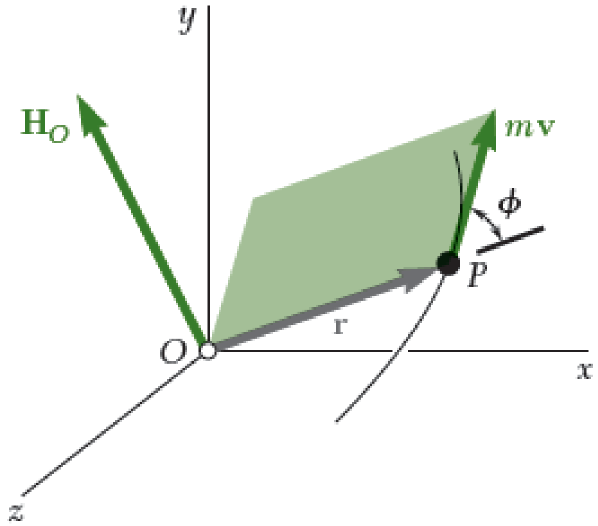
$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

uma vez que a massa $m$ da partícula é constante

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

$$\boxed{\mathbf{L} = m\mathbf{v}}$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}}$$




de *momento da quantidade de movimento*, ou *quantidade de movimento angular*, da partícula em relação a $O$ naquele instante, representado por $\mathbf{H}_O$. Recordando a definição de momento de um vetor (Seção 3.6) e representando por $\mathbf{r}$ o vetor de posição de $P$, escrevemos

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}} \tag{12.12}$$

e notamos que $\mathbf{H}_O$ é um vetor perpendicular ao plano que contém $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ e de intensidade

$$\boxed{H_O = rmv \text{ sen } \phi}$$

$$(\text{m})(\text{kg} \cdot \text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}$$

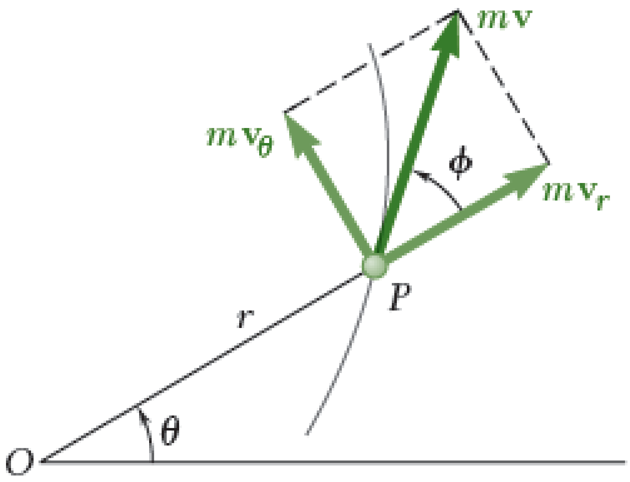
# Quantidade de movimento angular

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$H_x = m(yv_z - zv_y)$$
$$H_y = m(zv_x - xv_z)$$
$$H_z = m(xv_y - yv_x)$$

no plano $xy$, temos $z = v_z = 0$

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x)$$




$$H_O = rmv \text{ sen}\,\phi = rmv_\theta$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\boxed{H_O = mr^2\dot{\theta}}$$

# Quantidade de movimento angular

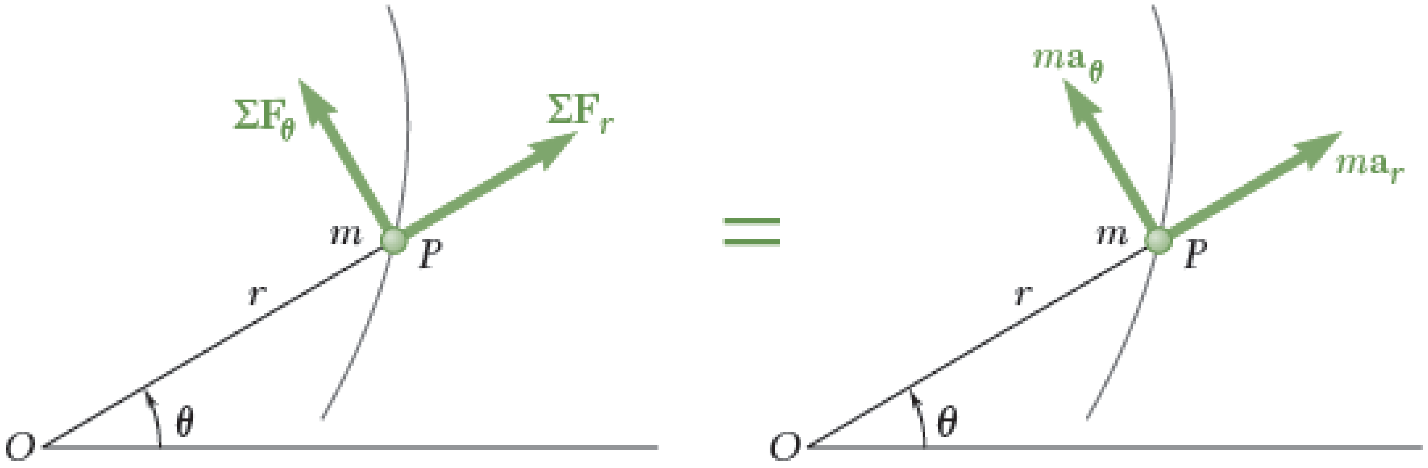
$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Como os vetores $\mathbf{v}$ e $m\mathbf{v}$ são colineares, o primeiro termo da expressão obtida é zero; e, pela segunda lei de Newton, $m\mathbf{a}$ é igual à soma $\Sigma\mathbf{F}$ das forças que atuam sobre $P$. Observando que $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ representa a soma $\Sigma\mathbf{M}_O$ dos momentos em relação a $O$ dessas forças, escrevemos

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \qquad (12.19)$$

A Eq. (12.19), que resulta diretamente da segunda lei de Newton, afirma que *a soma dos momentos em relação a O das forças que atuam sobre a partícula é igual à taxa de variação do momento da quantidade de movimento, ou quantidade de movimento angular, da partícula em relação a O.*

# Equações de movimento em coordenadas polares



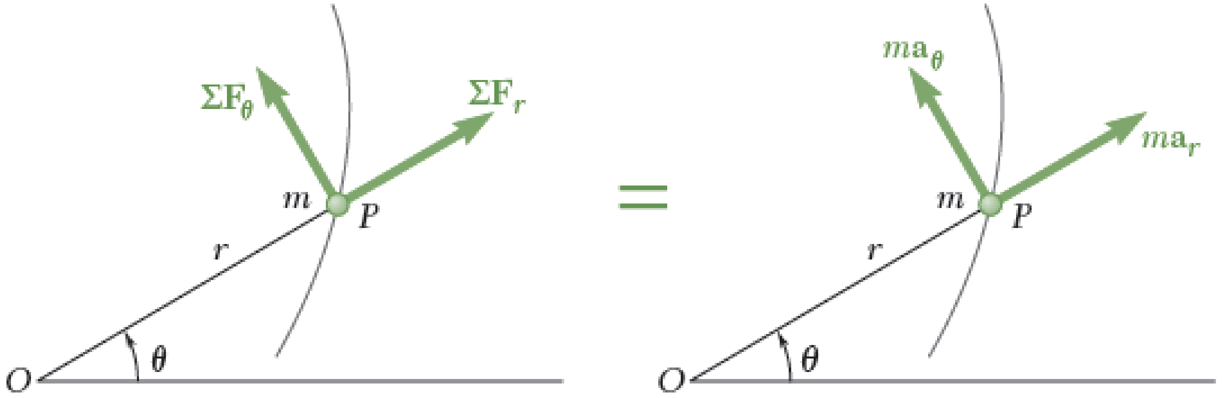

$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \tag{12.20}$$

Substituindo para $a_r$ e $a_\theta$ das Eqs. (11.46), temos

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

# Equações de movimento em coordenadas polares




$$\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta,$$

$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta$$

Substituindo para $a_r$ e $a_\theta$ das Eqs. (11.46), temos

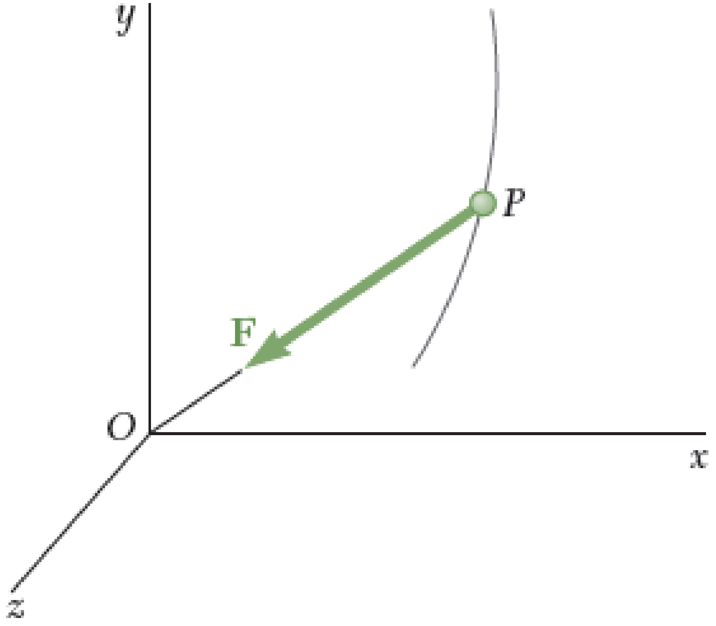
$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$r\Sigma F_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$
$$= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

# Conservação da quantidade de movimento angular




Quando a única força que atua sobre uma partícula $P$ é uma força $\mathbf{F}$ dirigida para, ou afastando-se de, um ponto fixo $O$, diz-se que essa partícula se move sob a *ação de uma força central* e o ponto $O$ é chamado de *centro de força* (Fig. 12.15). Como a linha de ação de $\mathbf{F}$ passa por $O$, devemos ter $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$ em qualquer instante dado. Substituindo na Eq. (12.19), obtemos, portanto

$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

para todos os valores de $t$ e integrando em $t$

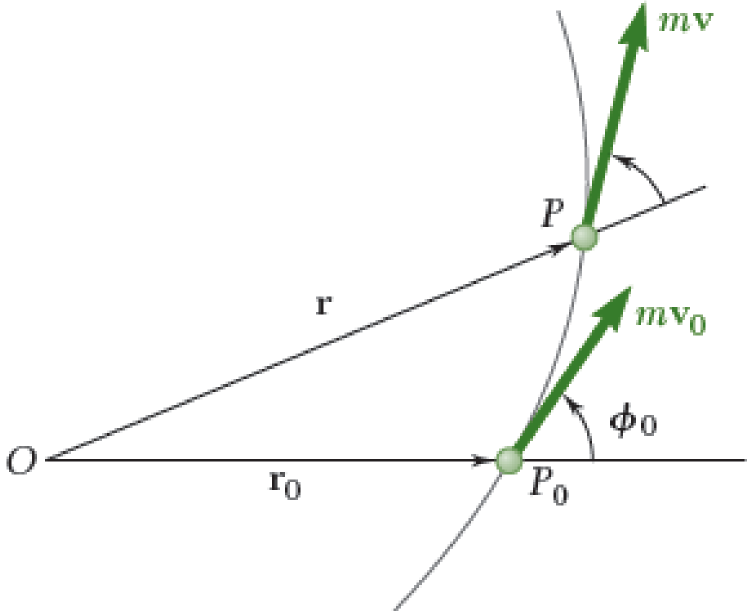
$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.23}$$

Concluímos, então, que *a quantidade de movimento angular de uma partícula que se move sob a ação de uma força central é constante, tanto em intensidade como em direção e sentido.*

$$\boxed{\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante}}$$

Como a intensidade $\mathbf{H}_O$ da quantidade de movimento angular da partícula $P$ é constante, o membro do lado direito da Eq. (12.13) deve ser constante. Escrevemos, assim,

$$rmv \operatorname{sen} \phi = r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 \tag{12.25}$$

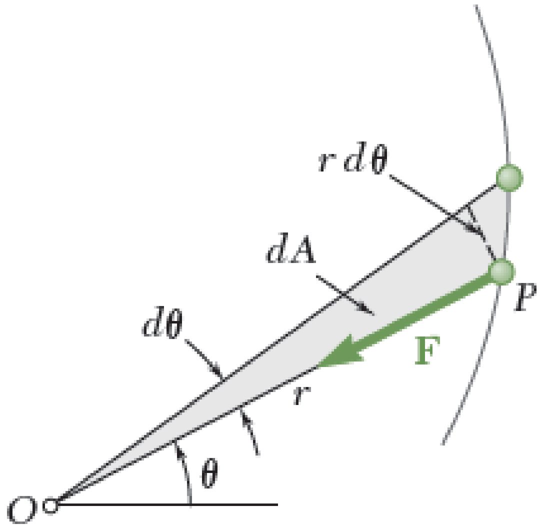



Alternativamente, recordando a Eq. (12.18), podemos expressar o fato de que a intensidade $H_O$ da quantidade de movimento angular da partícula $P$ é constante escrevendo

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \tag{12.26}$$

ou, dividindo por $m$ e representando por $h$ a quantidade de movimento angular por unidade de massa $H_O/m$

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = h} \tag{12.27}$$




Uma interpretação geométrica interessante pode ser dada à Eq. (12.27). Observando a partir da Fig. 12.17 que o raio vetor $OP$ varre uma área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, quando ele gira de um ângulo $d\theta$, e definindo a *velocidade areolar* da partícula como o quociente $dA/dt$, constatamos que o membro do lado esquerdo da Eq. (12.27) representa o dobro da velocidade areolar da partícula. Concluímos, então, que *quando uma partícula se move sob a ação de uma força central, sua velocidade areolar é constante*.

# Lei de Newton da gravitação

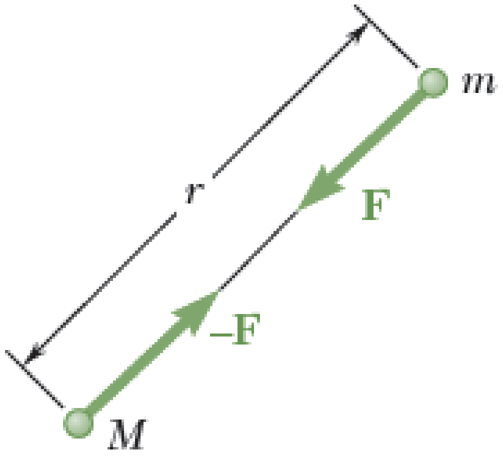


Figura 12.18

Como vimos na seção anterior, a força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta, ou pela Terra sobre um satélite em órbita, é um exemplo importante de uma força central. Nesta seção você vai aprender como determinar a intensidade de uma força gravitacional.

Em sua *lei de gravitação universal*, Newton estabeleceu que duas partículas de massas $M$ e $m$ a uma distância $r$ uma da outra se atraem com forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ dirigidas ao longo da linha que as une (Fig. 12.18). A intensidade comum $F$ das duas forças é

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{12.28}$$

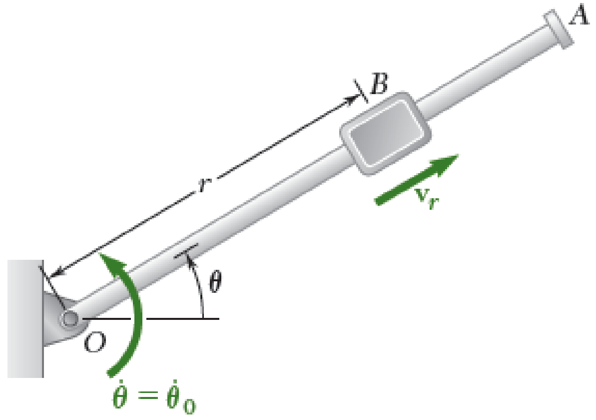
onde $G$ é uma constante universal, chamada *constante de gravitação*. Experimentos mostram que o valor de $G$ é $(66{,}73 \pm 0{,}03) \times 10^{-12}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$

$$W = mg = \frac{GM}{R^2}m \qquad \text{ou} \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

$$GM = gR^2$$

$$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \text{ e } R = 6{,}37 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

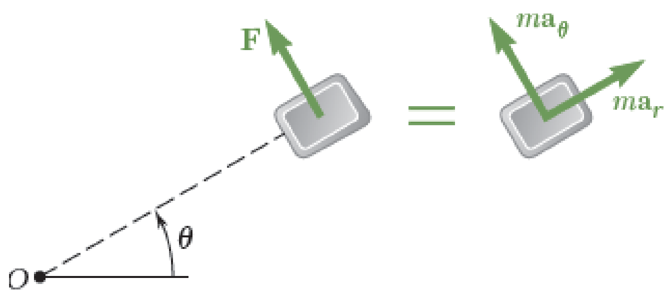
## PROBLEMA RESOLVIDO 12.6




Um bloco $B$ de massa $m$ pode deslizar livremente sobre um braço $OA$ sem atrito que gira em um plano horizontal com uma taxa constante $\dot\theta_0$. Sabendo que $B$ é liberado a uma distância $r_0$ de $O$, expresse, como uma função de $r$, ($a$) o componente $v_r$ da velocidade de $B$ ao longo de $OA$ e ($b$) a intensidade da força horizontal $\mathbf{F}$ exercida sobre $B$ pelo braço $OA$.

## SOLUÇÃO

Como todas as outras forças são perpendiculares ao plano da figura, a única força mostrada na figura atuando sobre $B$ é a força $\mathbf{F}$ perpendicular a $OA$.




**Equações de movimento.** Usando componentes radial e transversal.

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r: \qquad 0 = m(\ddot r - r\dot\theta^2) \qquad (1)$$
$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta: \qquad F = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) \qquad (2)$$

**a. Componente vr da velocidade.** Como $v_r = \dot r$, temos

$$\ddot r = \dot v_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = v_r\frac{dv_r}{dr}$$

Substituindo para $\ddot r$ em (1), recordando que $\dot\theta = \dot\theta_0$ e separando as variáveis e

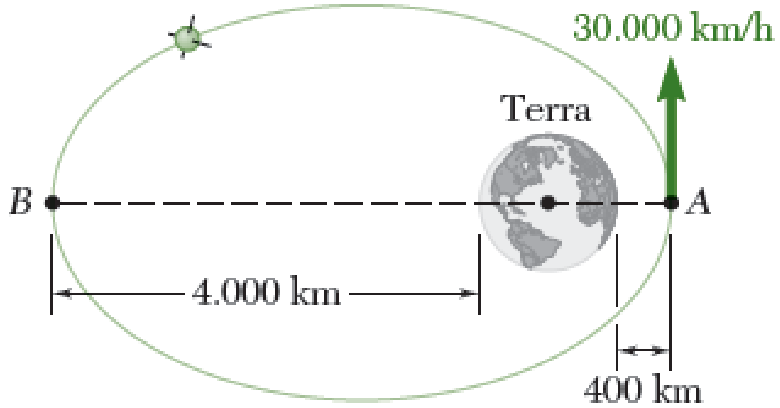
$$v_r\,dv_r = \dot\theta_0^2 r\,dr$$

Multiplicando por 2, e integrando de 0 a $v_r$ e de $r_0$ a $r$,

$$v_r^2 = \dot\theta_0^2(r^2 - r_0^2) \qquad v_r = \dot\theta_0(r^2 - r_0^2)^{1/2} \blacktriangleleft$$

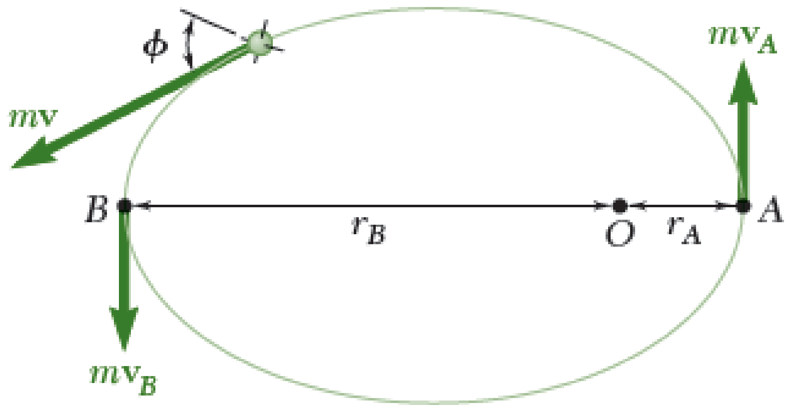
**b. Força horizontal F.** Fazendo $\dot\theta = \dot\theta_0$, $\ddot\theta = 0$, $\dot r = v_r$ na Eq. (2), e substituindo para $v_r$ a expressão obtida na parte $a$,

$$F = 2m\dot\theta_0(r^2 - r_0^2)^{1/2}\dot\theta_0 \qquad F = 2m\dot\theta_0^2(r^2 - r_0^2)^{1/2} \blacktriangleleft$$




## PROBLEMA RESOLVIDO 12.7

Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 30.000 km/h de uma altitude de 400 km. Determine a velocidade do satélite quando atinge sua altitude máxima de 4.000 km. Recorde-se de que o raio da Terra é de 6.370 km.




## SOLUÇÃO

Como o satélite está se movendo sob a ação de uma força central dirigida para o centro $O$ da Terra, seu momento angular $\mathbf{H}_O$ é constante. Da Eq. (12.13), temos

$$rmv \operatorname{sen} \phi = H_O = \text{constante}$$

que mostra que $v$ é mínima em $B$, onde $r$ e sen $\phi$ são máximos. Expressando a conservação da quantidade de movimento angular entre $A$ e $B$.

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = (30.000 \text{ km/h}) \frac{6.370 \text{ km} + 400 \text{ km}}{6.370 \text{ km} + 4.000 \text{ km}}$$

$$v_B = 19.590 \text{ km/h} \quad \blacktriangleleft$$

Nota: Observe que $r$ é a distância do centro da Terra e é expressa como $r = R_{terra}$ + altitude.

**12.66** A haste $OA$ gira em torno de $O$ em um plano horizontal. O movimento do colar $B$ de 300 g é definido pelas relações $r = 300 + 100 \cos(0{,}5\pi t)$ e $\theta = \pi(t^2 - 3t)$, onde $r$ é expresso em milímetros, $t$ em segundos e $\theta$ em radianos. Determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o colar quando (*a*) $t = 0$ e (*b*) $t = 0{,}5$ s.

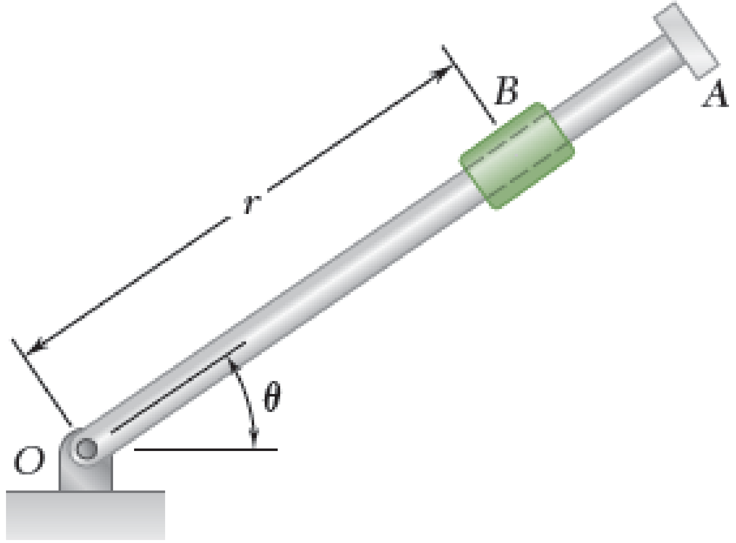
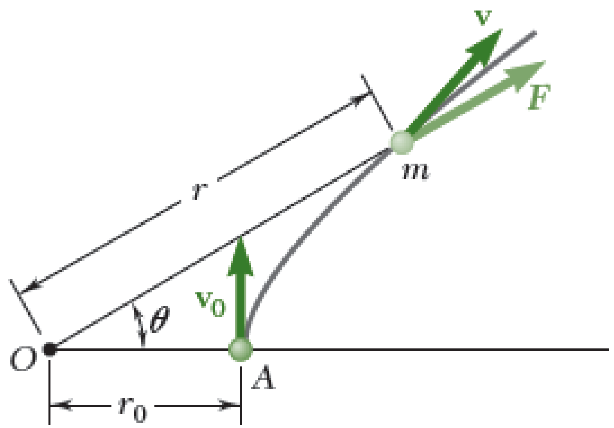



Figura P12.66 e P12.68

**12.67** Para o movimento definido no Problema 12.66, determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o colar quando $t = 1{,}5$ s.

**12.68** A haste $OA$ oscila em torno de $O$ em um plano horizontal. O movimento do colar $B$ de 2 kg é definido pelas relações $r = 3/(t + 4)$ e $\theta = (2/\pi)$ sen $\pi t$, onde $r$ é expresso em metros, $t$ em segundos e $\theta$ em radianos. Determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o colar quando (*a*) $t = 1$ s, (*b*) $t = 6$ s.




**12.76** Uma partícula de massa $m$ é lançada do ponto $A$ com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular à linha $OA$ e se move sob a ação da força central $\mathbf{F}$ dirigida para fora do centro de força $O$. Sabendo que a partícula segue uma trajetória definida pela equação $r = r_0\sqrt{\cos 2\theta}$ e usando a Eq. (12.27), expresse os componentes radiais e transversais da velocidade $\mathbf{v}$ da partícula em função de $\theta$.

# Lei de Newton da gravitação

**12.79** Mostre que o raio $r$ da órbita da lua de um dado planeta pode ser determinado a partir do raio $R$ deste planeta, da aceleração da gravidade na superfície do planeta e do tempo $\tau$ necessário para a lua fazer uma volta completa em torno do planeta. Determine a aceleração da gravidade na superfície do planeta Júpiter sabendo que $R = 71.492$ km, $\tau = 3{,}551$ dias e $r = 670{,}9 \times 10^3$ km para sua lua, Europa.

**12.80** Satélites de comunicação são colocados em uma órbita geossíncrona, isto é, em uma órbita circular tal que eles realizam uma volta completa em torno da Terra em um dia sideral (23,934 horas) e, então, aparentam estar estacionários em relação ao solo. Determine (*a*) a altitude desses satélites acima da superfície da Terra, (*b*) a velocidade com que eles descrevem suas órbitas.

**12.81** Determine a massa da Terra sabendo que o raio médio da órbita da Lua em torno da Terra é de 382.250 km e que a Lua precisa de 27,32 dias para completar uma volta inteira em torno da Terra.

**12.87** Um veículo espacial está em uma órbita circular de 2.200 km de raio ao redor da Lua. Para ser transferido para uma órbita menor, de 2.080 km de raio, o veículo é posto primeiro em uma trajetória elíptica $AB$, reduzindo-se sua velocidade escalar em 26,3 m/s ao passar por $A$. Sabendo que a massa da Lua é de $73{,}49 \times 10^{21}$ kg, determine ($a$) a velocidade escalar do veículo quando ele se aproxima de $B$ pela trajetória elíptica, ($b$) em quanto sua velocidade deve ser reduzida quando ele se aproxima de $B$ para que ele seja inserido na órbita circular menor.

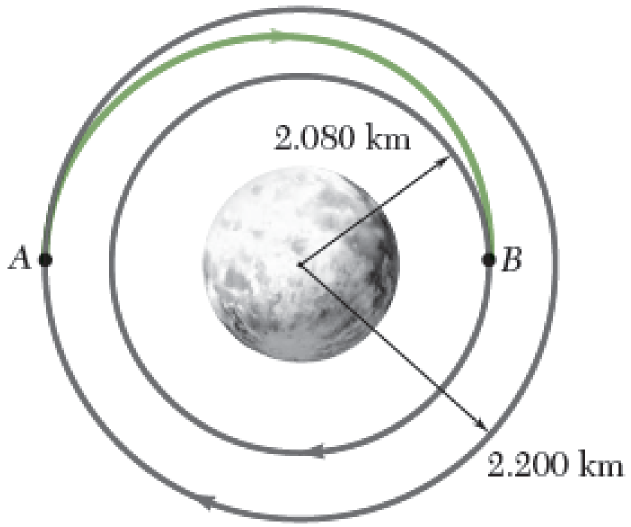



Figura P12.87

**12.88** Planos para a missão de um pouso não tripulado ao planeta Marte indica que o veículo de retorno à Terra primeiro descreve uma órbita circular a uma altitude $d_A = 2.200$ km acima da superfície do planeta com a velocidade 2.771 m/s. Ao passar pelo ponto $A$, o veículo foi posto em uma órbita de transferência elíptica pela ação de seus foguetes, aumentando sua velocidade escalar de $\Delta v_A = 1.046$ m/s. Ao passar por meio do ponto $B$, na altitude $d_B = 100.000$ km, foi posto em uma segunda órbita de transferência localizada em um plano ligeiramente diferente, mudando a direção de sua velocidade e reduzindo sua velocidade escalar de $\Delta v_B = -22{,}0$ m/s. Finalmente, ao passar por meio do ponto $C$, a uma altitude $d_C = 1.000$ km, sua velocidade escalar foi incrementada de $\Delta v_C = 660$ m/s para inseri-lo na trajetória de retorno. Sabendo que o raio do planeta Marte é $R = 3.400$ km, determine a velocidade do veículo depois de completar a última manobra.

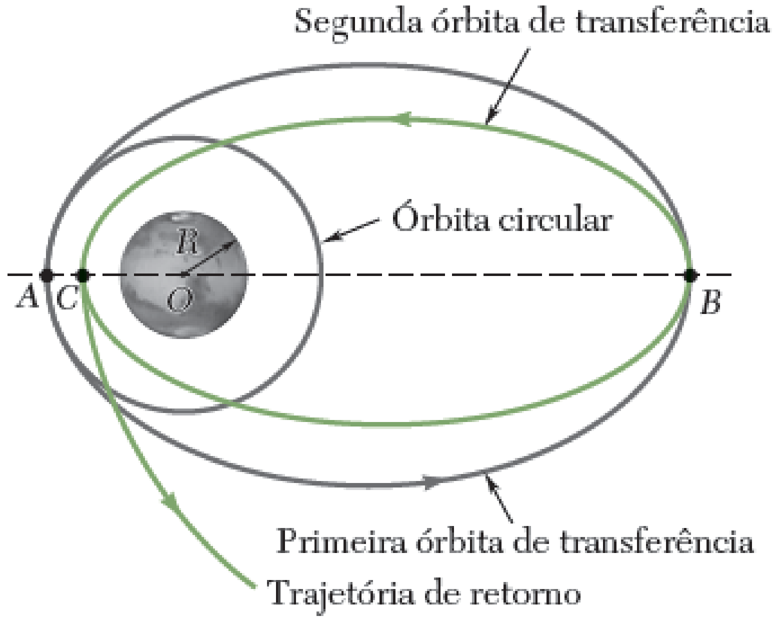
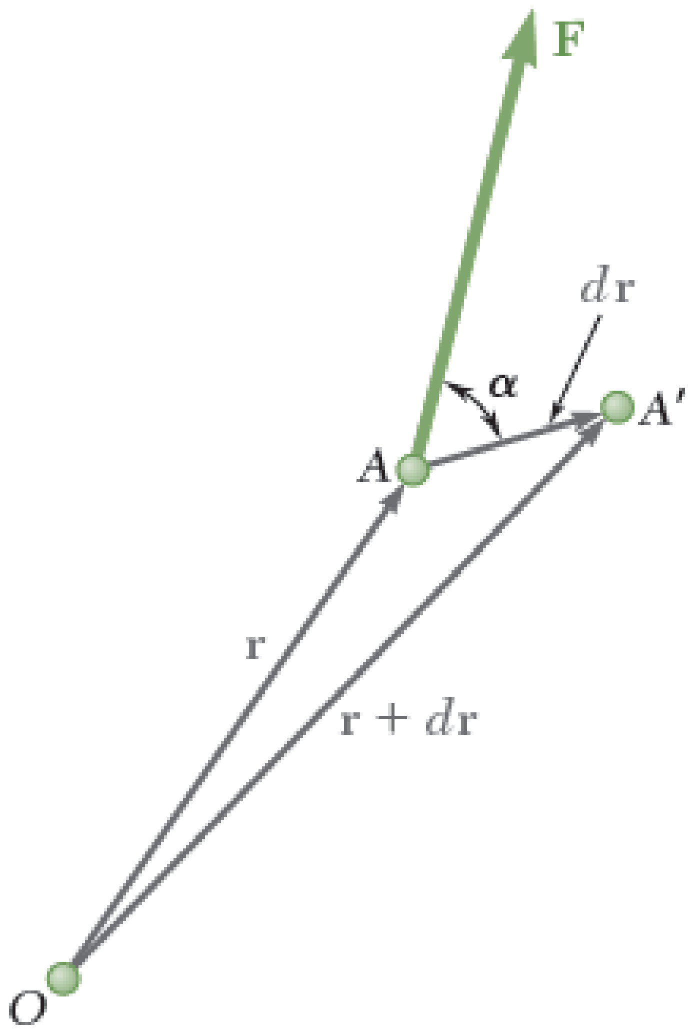



Figura P12.88

# Trabalho de uma força



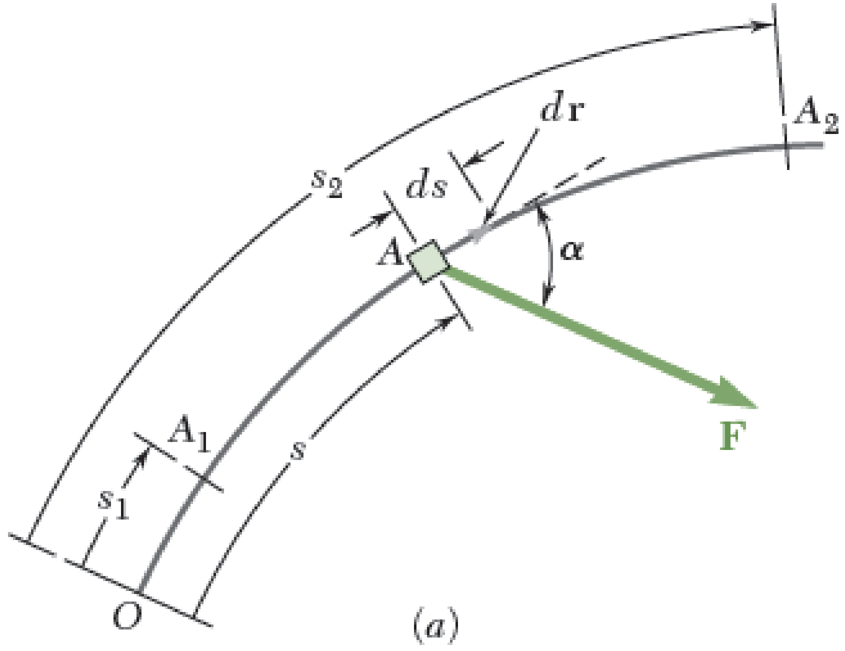

$$\boxed{dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$

$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ *joule* (J)

$$dU = F\, ds \cos \alpha$$

$$dU = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

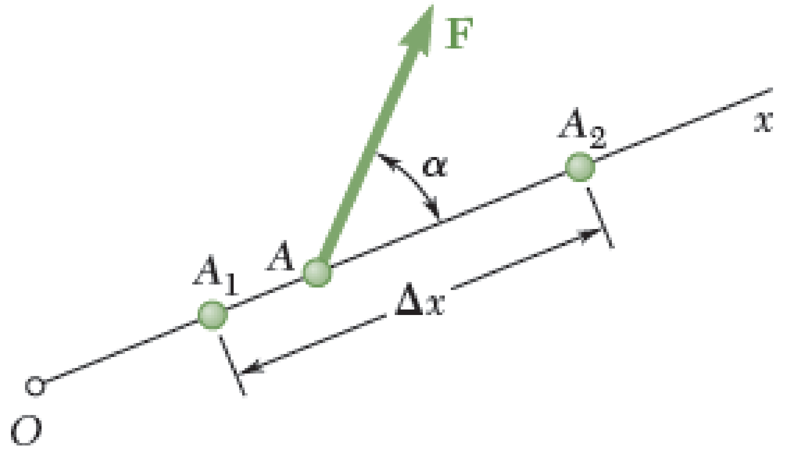
$$\boxed{U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$



# Trabalho de uma força

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds$$

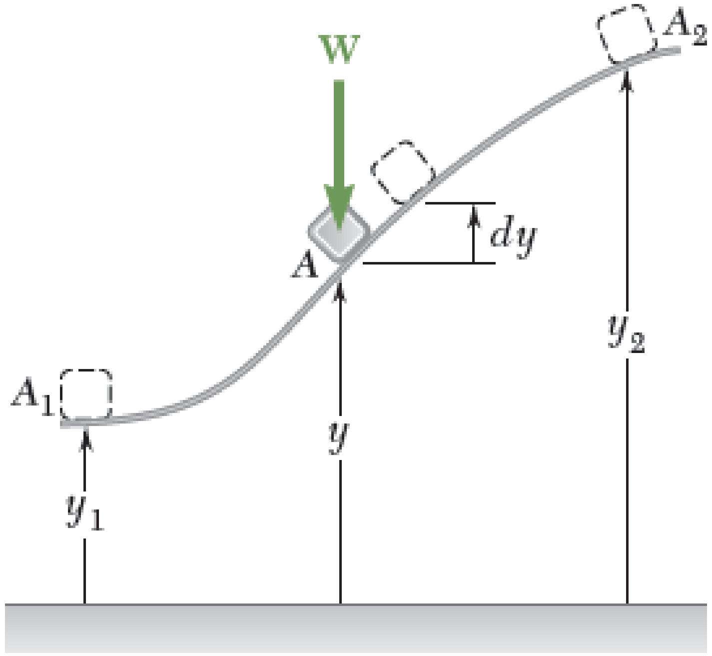

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$




$$U_{1\to2} = (F\cos\alpha)\,\Delta x$$

onde: $\alpha$ = ângulo entre a força e a direção do movimento
$\Delta x$ = deslocamento de $A_1$ até $A_2$

# Trabalho da força de gravidade




$$dU = -W\,dy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2$$

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y$$

onde $\Delta y$ é o deslocamento vertical de $A_1$ até $A_2$. Logo, o trabalho do peso **W** é igual ao *produto de W e do deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo*. O trabalho é *positivo* quando $\Delta y < 0$, isto é, *quando o corpo move-se para baixo.*

# Trabalho de uma força

**Trabalho da força exercida por uma mola.** Considere um corpo $A$ conectado a um ponto fixo $B$ por meio de uma mola; admite-se que a mola não esteja deformada quando o corpo está em $A_0$ (Fig. 13.5*a*). Evidências experimentais mostram que a magnitude da força $\mathbf{F}$ exercida pela mola sobre o corpo $A$ é proporcional à deflexão $x$ da mola medida em relação à posição $A_0$. Temos

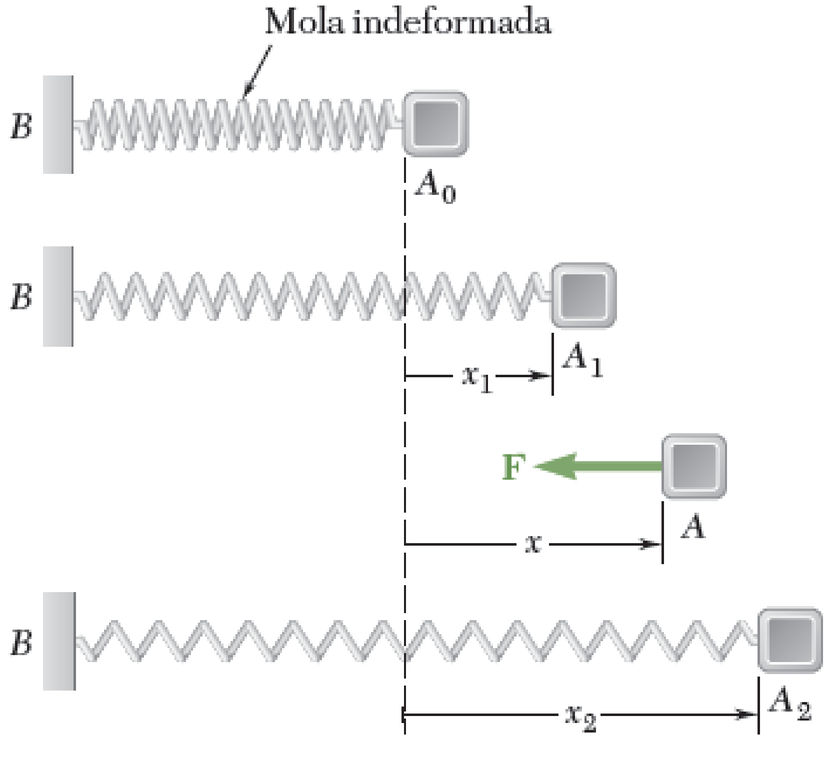
$$F = kx \tag{13.5}$$

onde $k$ é a *constante de mola*, expressa em N/m ou kN/m em unidades do SI*.

O trabalho da força $\mathbf{F}$ exercida pela mola durante um deslocamento finito do corpo de $A_1$ ($x = x_1$) até $A_2$ ($x = x_2$) é obtido escrevendo-se

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{13.6}$$




(*a*)

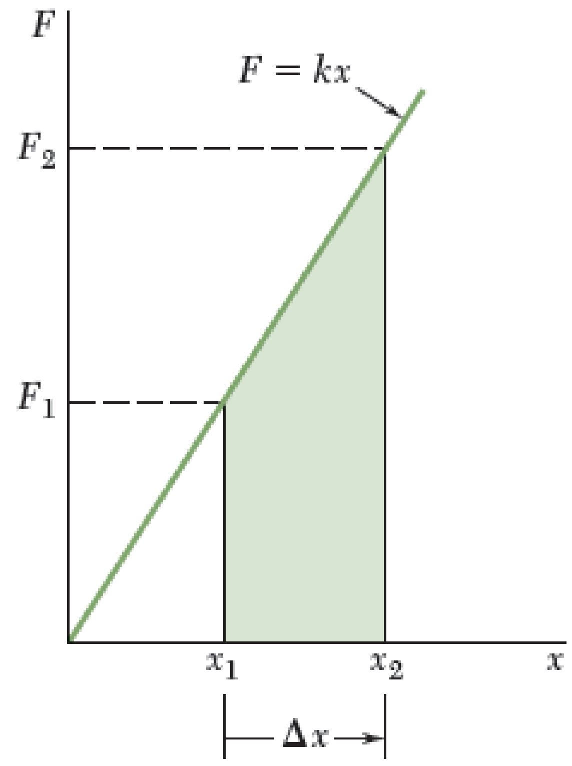
# Trabalho da força exercida por uma mola

Deve-se ter cuidado ao expressar $k$ e $x$ em unidades consistentes. Observemos que o trabalho da força **F** exercida pela mola sobre o corpo é *positivo* quando $x_2 < x_1$, isto é, *quando a mola está retornando à sua posição indeformada.*

Como a Eq. (13.5) é a equação de uma linha reta de coeficiente angular $k$ passando pela origem, o trabalho $U_{1\to2}$ da força **F** durante o deslocamento de $A_1$ até $A_2$ pode ser obtido pelo cálculo da área do trapézio mostrado na Fig. 13.5*b*. Isso é feito calculando-se $F_1$ e $F_2$ e multiplicando a base $\Delta x$ do trapézio pela sua altura média $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Já que o trabalho da força **F** exercida pela mola é positivo para um valor negativo de $\Delta x$, escrevemos

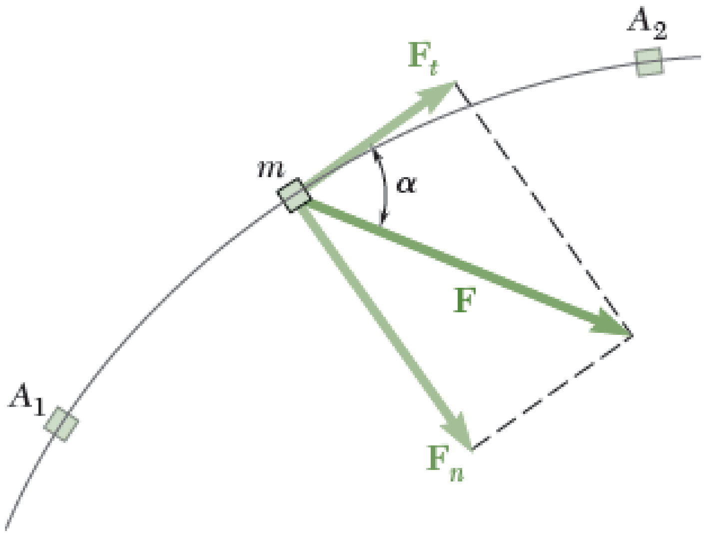
$$U_{1\to2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \qquad (13.6')$$

Em geral, a Eq. (13.6′) é de uso mais conveniente que a (13.6) e propicia menor chance de confusão das unidades envolvidas.




(*b*)

# Energia cinética de uma partícula




$$F_t = ma_t \qquad \text{ou} \qquad F_t = m\frac{dv}{dt}$$

onde $v$ é a velocidade da partícula. Relembrando da Seção 11.9, que $v = ds/dt$, obtemos

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$
$$F_t\,ds = mv\,dv$$

Integrando desde $A_1$, onde $s = s_1$ e $v = v_1$, até $A_2$, onde $s = s_2$ e $v = v_2$, escrevemos

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (13.8)$$

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}mv^2}$$

$$\boxed{U_{1\to2} = T_2 - T_1}$$

$$\boxed{T_1 + U_{1\to2} = T_2}$$

$$\text{kg(m/s)}^2 = (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\text{m} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{J}$$

# Potência e eficiência

$$\text{Potência média} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

Fazendo $\Delta t$ tender a zero, obtemos no limite

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt}$$

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\text{Potência} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

*watt* (W)

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{N} \cdot \text{m/s}$$

$$\eta = \frac{\text{trabalho de saída}}{\text{trabalho de entrada}}$$

$$\eta = \frac{\text{potência de saída}}{\text{potência de entrada}}$$

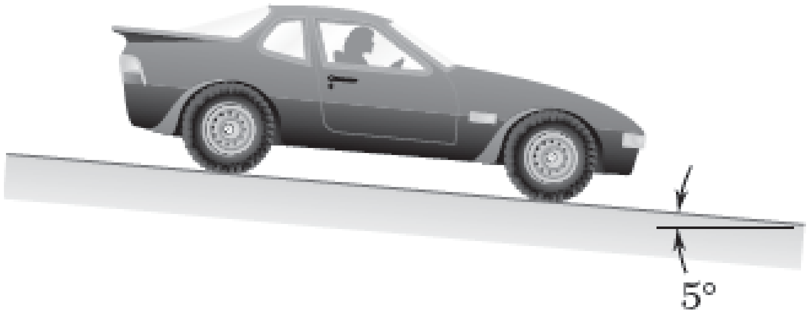
$$1\ \text{hp} = 550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s}$$

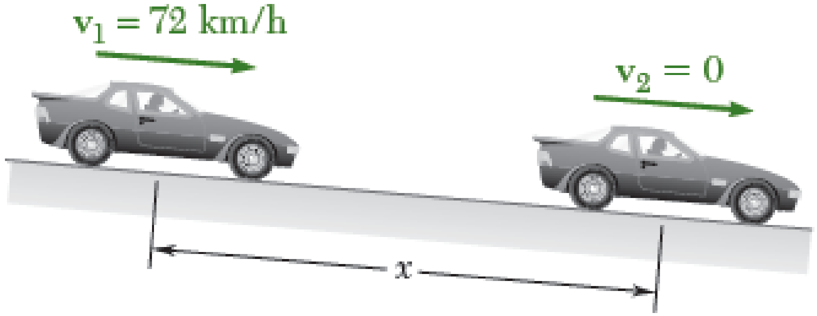
Recordando da Sec. 13.2 que 1ft · 1b = 1.356 J, verificamos que

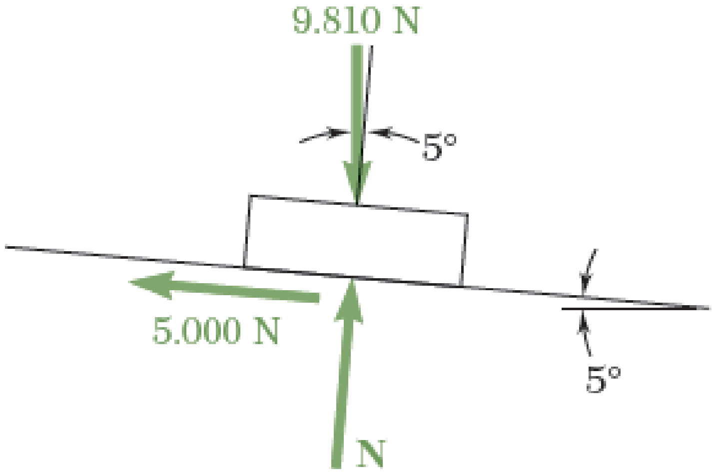
$$1\ \text{ft} \cdot \text{lb/s} = 1{,}356\ \text{J/s} = 1{,}356\ \text{W}$$

$$1\ \text{hp} = 550(1{,}356\ \text{W}) = 746\ \text{W} = 0{,}746\ \text{kW}$$

# Energia cinética de uma partícula




## PROBLEMA RESOLVIDO 13.1

Um automóvel de massa 1.000 kg é conduzido em um declive de 5° a uma velocidade de 72 km/h quando os freios são usados, causando uma força total de frenagem constante de 5.000 N (aplicada pela estrada sobre os pneus). Determine a distância percorrida pelo automóvel até ele parar.

## SOLUÇÃO

**Energia cinética**

*Posição 1:*

$$v_1 = \left(72\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1.000\text{ m}}{1\text{ km}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3.600\text{ s}}\right) = 20\text{ m/s}$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(1.000\text{ kg})(20\text{ m/s})^2 = 20.000\text{ J}$$

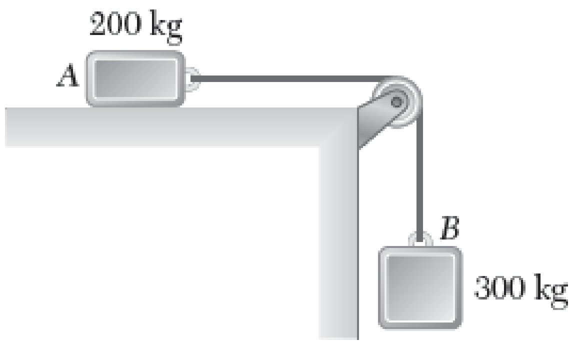
*Posição 2:* $v_2 = 0 \qquad T_2 = 0$

**Trabalho** $U_{1\to 2} = -5.000x + (1.000\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)(\text{sen }5°)x = -4.145x$

**Princípio de trabalho e energia**

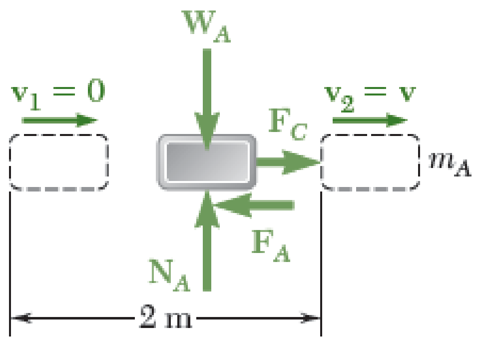
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$200.000 - 4.145x = 0 \qquad x = 48{,}25\text{ m}$$




## PROBLEMA RESOLVIDO 13.2

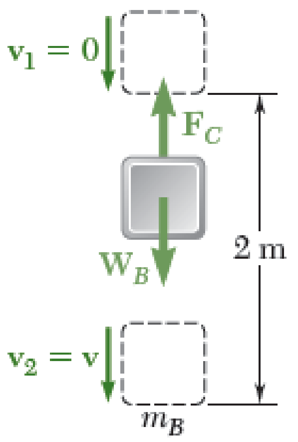
Dois blocos estão conectados por um cabo inextensível como mostrado na figura. Se o sistema é liberado do repouso, determine a velocidade do bloco $A$ depois que ele se desloca 2 m. Admita que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco $A$ e o plano seja de $\mu_k = 0{,}25$ e que a roldana não tenha nem peso nem atrito.




## SOLUÇÃO

**Trabalho e energia para o bloco *A*.** Representamos a força de atrito por $\mathbf{F}_A$ e a força exercida pelo cabo por $\mathbf{F}_C$, e escrevemos

$$m_A = 200 \text{ kg} \qquad W_A = (200 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 1.962 \text{ N}$$
$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0{,}25(1.962 \text{ N}) = 490 \text{ N}$$
$$T_1 + U_{1\to2} = T_2: \qquad 0 + F_C(2 \text{ m}) - F_A(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2} m_A v^2$$
$$F_C(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200 \text{ kg})v^2 \qquad (1)$$

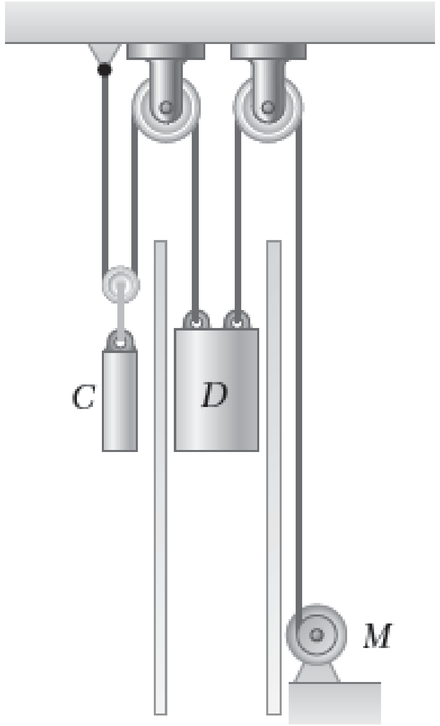



**Trabalho e energia para o bloco *B*.** Escrevemos

$$m_B = 300 \text{ kg} \qquad W_B = (300 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 2.940 \text{ N}$$
$$T_1 + U_{1\to2} = T_2: \qquad 0 + W_B(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2} m_B v^2$$
$$(2.940 \text{ N})(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(300 \text{ kg})v^2 \qquad (2)$$

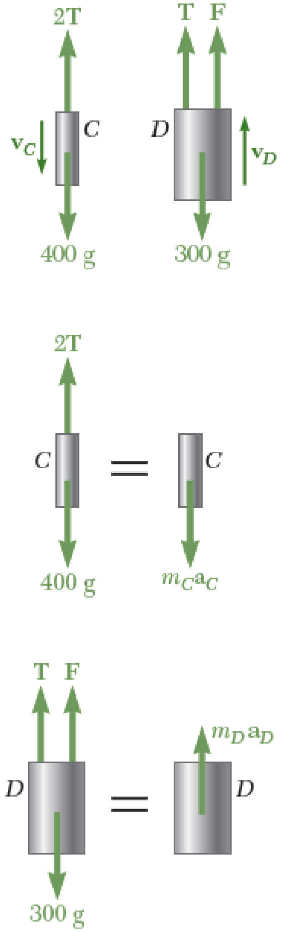
Adicionando os primeiro e segundo membros de (1) e (2), observamos que o trabalho das forças exercidas pelo cabo sobre $A$ e $B$ se anula:

$$(2.940 \text{ N})(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200 \text{ kg} + 300 \text{ kg})v^2$$
$$4.900 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(500 \text{ kg})v^2 \qquad v = 4{,}43 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$




# PROBLEMA RESOLVIDO 13.5

O elevador $D$ e sua carga têm uma massa combinada de 300 kg, enquanto o contrapeso $C$ tem massa de 400 kg. Determine a potência liberada pelo motor elétrico $M$ quando o elevador ($a$) se move para cima com uma velocidade constante de 2,5 m/s e ($b$) se move com uma velocidade instantânea de 2,5 m/s e aceleração de 1 m/s$^2$, ambas orientadas para cima.




## SOLUÇÃO

Como a força **F** exercida pelo cabo do motor tem o mesmo sentido da velocidade $\mathbf{v}_D$ do elevador, a potência é igual a $Fv_D$, sendo $v_D = 2{,}5$ m/s. Para obter a potência, devemos antes determinar **F** em cada uma das duas situações dadas.

**a. Movimento uniforme.** Temos $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D = 0$; ambos os corpos estão em equilíbrio.

Corpo livre $C$: $\quad +\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad 2T - 400\text{ g} = 0 \quad T = 200\text{ g} = 1.962\text{ N}$

Corpo livre $D$: $\quad +\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad F + T - 300\text{ g} = 0$

$$F = 300\text{ g} - T = 300\text{ g} - 200\text{ g} = 100\text{ g} = 981\text{ N}$$
$$Fv_D = (981\text{ N})(2{,}5\text{ m/s}) = 2.452\text{ W}$$
$$\text{Potência} = 2.450\text{ W}$$

**b. Movimento acelerado.** Temos

$$\mathbf{a}_D = 1\text{ m/s}^2\uparrow \qquad \mathbf{a}_C = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}_D = 0{,}5\text{ m/s}^2\downarrow$$

As equações de movimento são

Corpo livre $C$: $\quad +\downarrow\Sigma F_y = m_C a_C: \quad 400\text{ g} - 2T = 400\,(0{,}5)$

$$T = \frac{(400)(9{,}81) - 400\,(0{,}5)}{2} = 1.862\text{ N}$$

Corpo livre $D$: $\quad +\uparrow\Sigma F_y = m_D a_D: \quad F + T - 300\text{ g} = 300\,(1)$

$$F + 1.862 - 300\,(9{,}81) = 300 \qquad F = 1.381\text{ N}$$
$$Fv_D = (1.381\text{ N})(2{,}5\text{ m/s}) = 3.452\text{ W}$$
$$\text{Potência} = 3.450\text{ W}$$

◀

**13.1** Um pequeno carro híbrido de 1.300 kg está viajando a 108 km/h. Determine (*a*) a energia cinética do veículo, (*b*) a velocidade escalar para um caminhão de 9.000 kg que tem a mesma energia cinética que o carro.

**13.2** Um satélite de 450 kg é posto em uma órbita circular a 6.360 km acima da superfície da Terra. Nessa elevação, a aceleração da gravidade é de 2,4 $m/s^2$. Determine a energia cinética do satélite, sabendo que sua velocidade orbital é de 20.000 km/h.

**13.3** Partindo do repouso, uma pedra de 1 kg cai de uma altura $h$ e bate no chão com uma velocidade de 15 m/s. (*a*) Encontre a energia cinética da pedra quando ela bate no chão e a altura $h$ da queda. (*b*) Resolva o item *a*, admitindo que a mesma pedra caia na Lua. (Aceleração da gravidade na Lua = 1,62 $m/s^2$.)

**13.4** Partindo do repouso, uma pedra de 4 kg cai de uma altura $h$ e bate no chão com uma velocidade de 25 m/s. (*a*) Encontre a energia cinética da pedra quando ela bate no chão e a altura $h$ da queda. (*b*) Resolva o item *a*, admitindo que a mesma pedra caia na Lua. (Aceleração da gravidade na Lua = 1,62 $m/s^2$.)

**13.9** Um pacote é lançado 10 m para cima num aclive de 15° de forma que alcança o topo da inclinação com velocidade nula. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,12, determine (*a*) a velocidade inicial do pacote em *A*, (*b*) a velocidade do pacote quando este retornar a sua posição original.

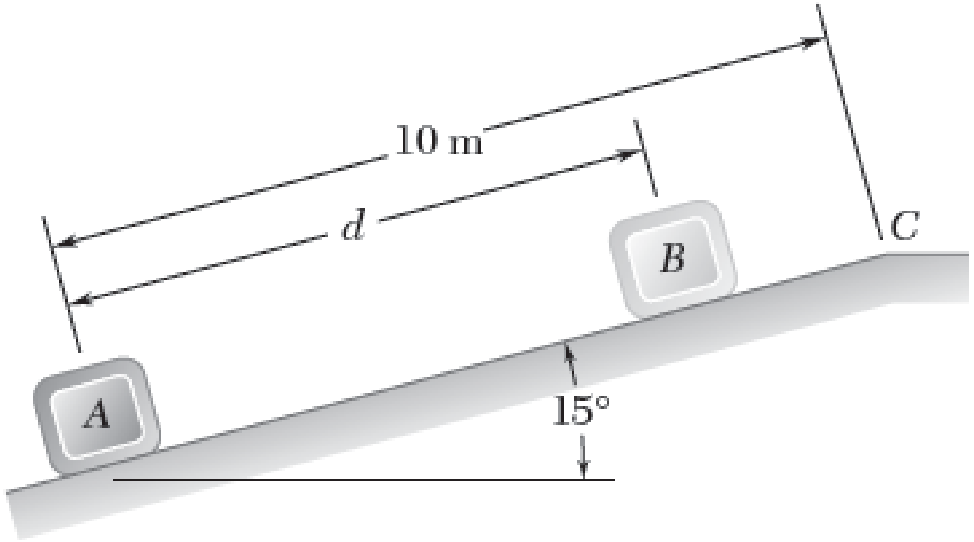



**Figura P13.9 e P13.10**

**13.10** Um pacote é lançado para cima num aclive de 15° em *A* com velocidade de 8 m/s. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,12, determine (*a*) a máxima distância *d* que o pacote se moverá para cima na inclinação, (*b*) a velocidade do pacote quando este retornar a sua posição original.

**13.15** Um trem de metrô está viajando numa velocidade escalar de 48 km/h quando os freios são plenamente aplicados nas rodas dos carros *B* e *C*, causando então o deslizamento nos trilhos, mas não são aplicados nas rodas do carro *A*. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,35 entre as rodas e o trilho, determine (*a*) a distância necessária para produzir a parada do trem, (*b*) a força em cada engate.

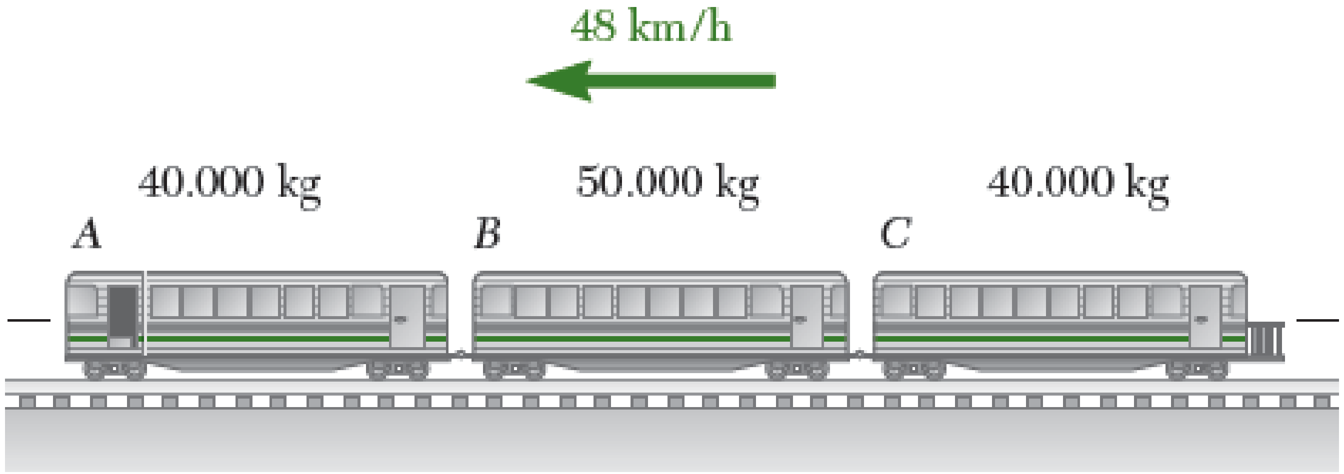



**Figura P13.15**

**13.16** Resolver o Problema 13.15 considerando que os freios são aplicados apenas nas rodas do carro *A*.

**13.21** O sistema mostrado na figura está em repouso quando uma força constante de 150 N é aplicada em um colar *B*. (*a*) Se a força atua por meio de todo movimento, determine a velocidade do colar *B* que atinge o suporte em *C*. (*b*) Depois de qual distância *d* a força de 150 N deveria ser retirada se o colar alcança o suporte *C* com velocidade nula?