



LOM 3081 - Introdução à Mecânica dos Sólidos

DEMAR – EEL – USP

Professores : Viktor Pastoukhov / Carlos A.R.P. Baptista

- Ref. 1: F.P. BEER, E.R. JOHNSTON, J.T. DeWOLF. Resistência dos Materiais. São Paulo: McGraw Hill. 4a Ed., 2006, 758p.
- Ref. 2: F.P. BEER, E.R. JOHNSTON, J.T. DeWOLF, D.F. MAZUREK. Estática e Mecânica dos Materiais. P. Alegre: AMGH. 2013, 706p.
- Ref. 3: J.M. GERE. Mecânica dos Materiais. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003, 698p.

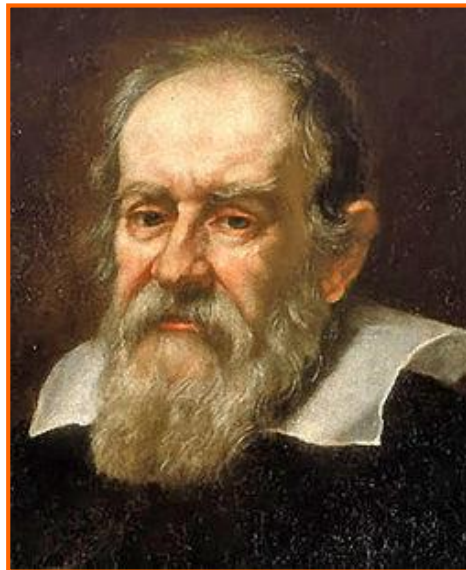


Conceitos fundamentais

- **Mecânica:** Ciência sobre o movimento da matéria e as forças que o causam.
- **Sólido:** Corpo com capacidade finita, limitada de deformação
- **Deformação:** Alteração de configuração geométrica; representa um perigo para funcionamento de elementos e estruturas mecânicas, pela possível perda da forma apropriada ou mesmo fratura (perda da integridade, separação em partes).
- **Hipótese do meio contínuo:** O material preenche ininterruptamente todo o volume do corpo. Para cada ponto material existe um outro correspondente em cada distância infinitesimal.

Origem da Mecânica

- Antes do século XVII os construtores utilizavam métodos empíricos.
- Galileu (no século XVII) foi o primeiro que analisou e tentou explicar cientificamente o comportamento de elementos estruturais submetidos a cargas externas.



Retrato de Galileu (1636)

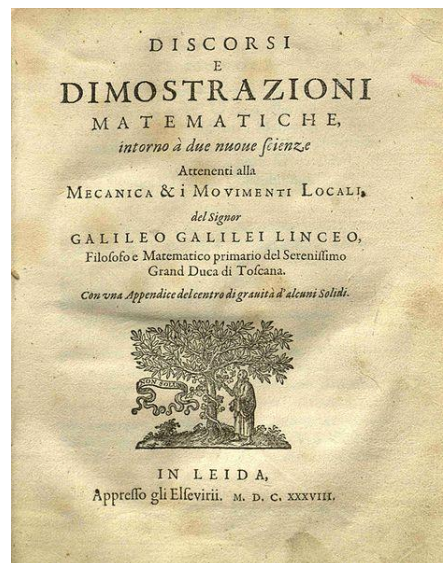


FIG. 15. Galileo's illustration of bending test.

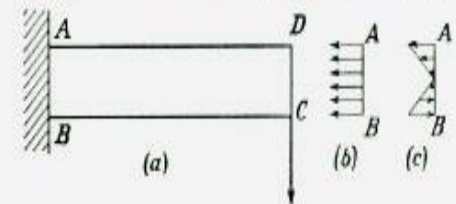
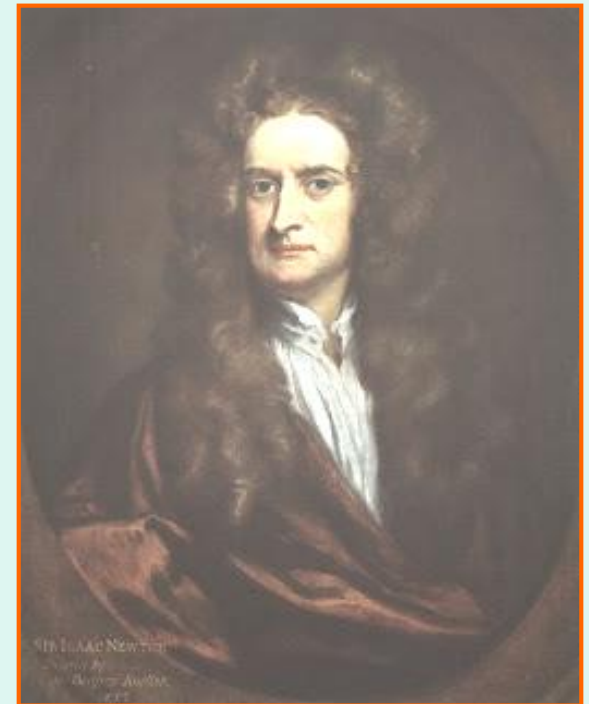
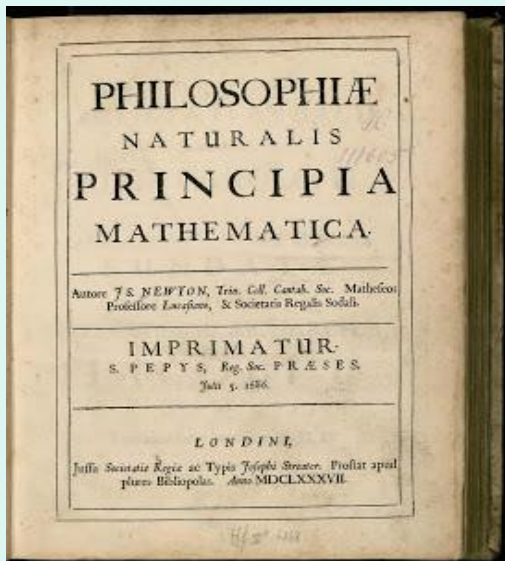


FIG. 16.

Origem da Mecânica

- Os princípios fundamentais da Mecânica foram formulados por Newton (1643-1727) e, mais tarde, D'Alembert, Lagrange e Hamilton.
- Embora suas limitações tenham sido reconhecidas em face da Teoria da Relatividade, a Mecânica newtoniana ainda é a base das Ciências de Engenharia.

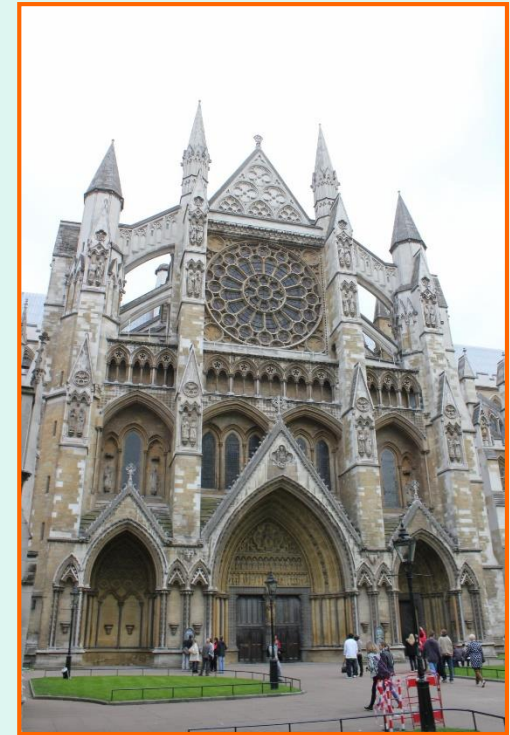
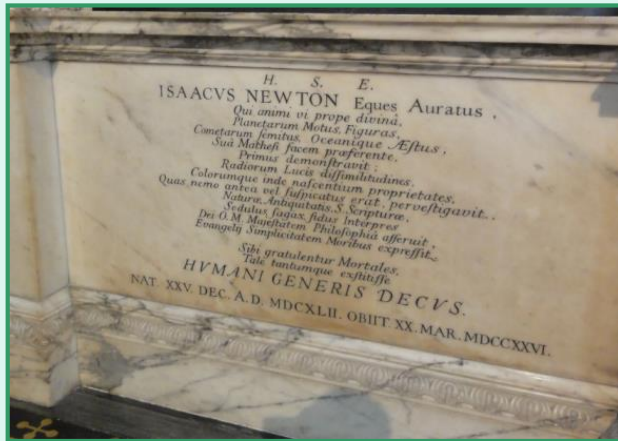


Sir Isaac Newton

Lex III: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sine corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Origem da Mecânica

- Em 16/04/1705 Newton foi elevado ao grau de Cavaleiro do Império Britânico, tornando-se o primeiro cientista a receber tal honra.
- Seu túmulo, na abadia de Westminster, foi esculpido por M. Rysbrack em 1731. O trecho final da inscrição em latim pode ser traduzido como: ***“Os mortais devem congratular por ter existido esta glória do gênero humano”.***



Objetivos da Mecânica dos Sólidos

Desenvolvimento de métodos analíticos para a determinação da:

- resistência (à fratura)
- rigidez (resistência à deformação)
- estabilidade (resistência à flambagem)

de elementos estruturais submetidos à ação de carregamentos.



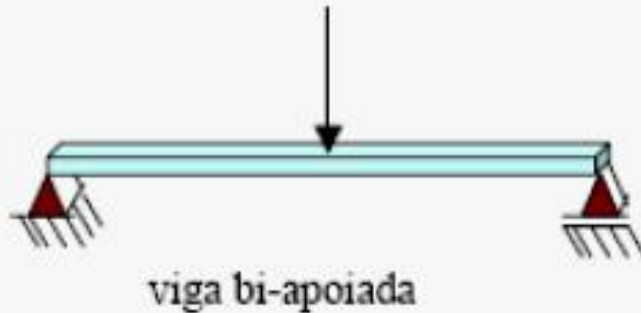
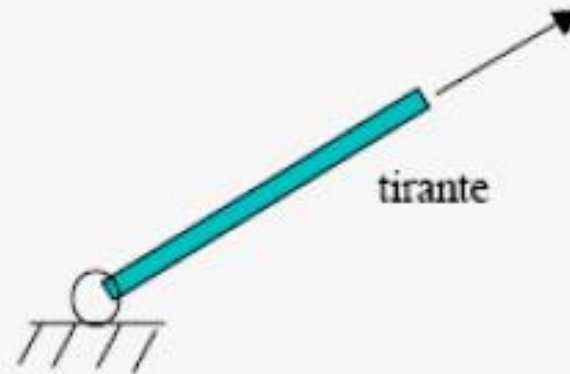
Tipos de elementos estruturais

- **Barra:** Tem duas dimensões pequenas em relação à uma terceira.
- **Placas, Chapas:** Uma dimensão pequena em relação às outras duas.
- **Blocos:** Três dimensões de mesma ordem.

Classificação das barras, segundo o modo de carregamento:

- Barras sujeitas a cargas não alinhadas no seu eixo sofrem flexão, e se chamam **vigas**.
- Barras sujeitas a cargas axiais de tração são chamadas de **tirantes**.
- Barras sujeitas a cargas axiais de compressão são chamadas de **colunas**.
- Barras sujeitas a momentos axiais denominam-se **eixos**.

Tipos de carregamentos



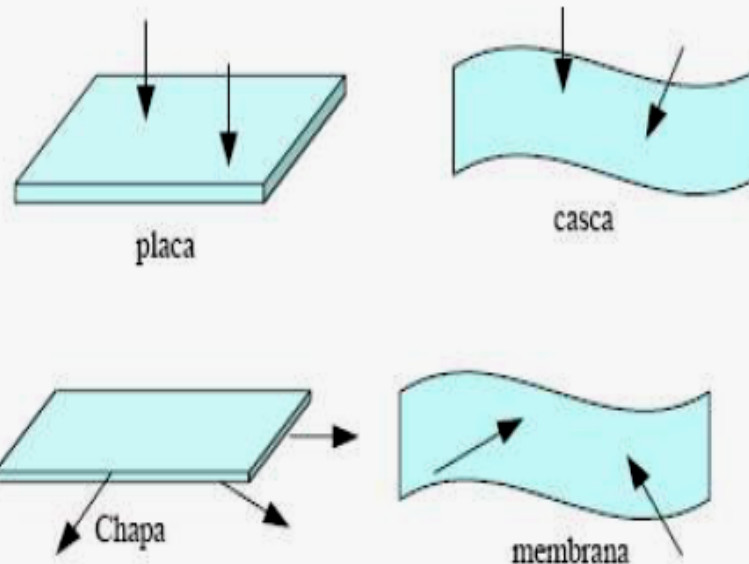
Tipos de carregamentos

Peças bidimensionais (figura a seguir) são chamadas de placas quando são planas e estão sujeitas às cargas normais ao seu plano.

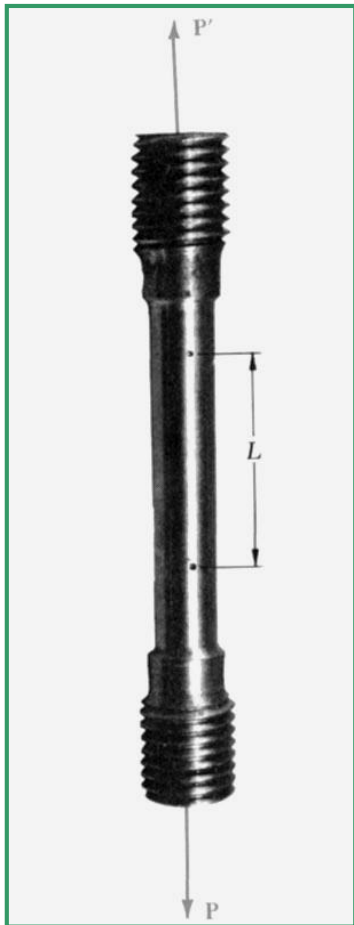
Casca é o nome dado a peças bidimensionais não planas, que possuem cargas normais à sua superfície média.

Chapas são superfícies planas com cargas no seu plano.

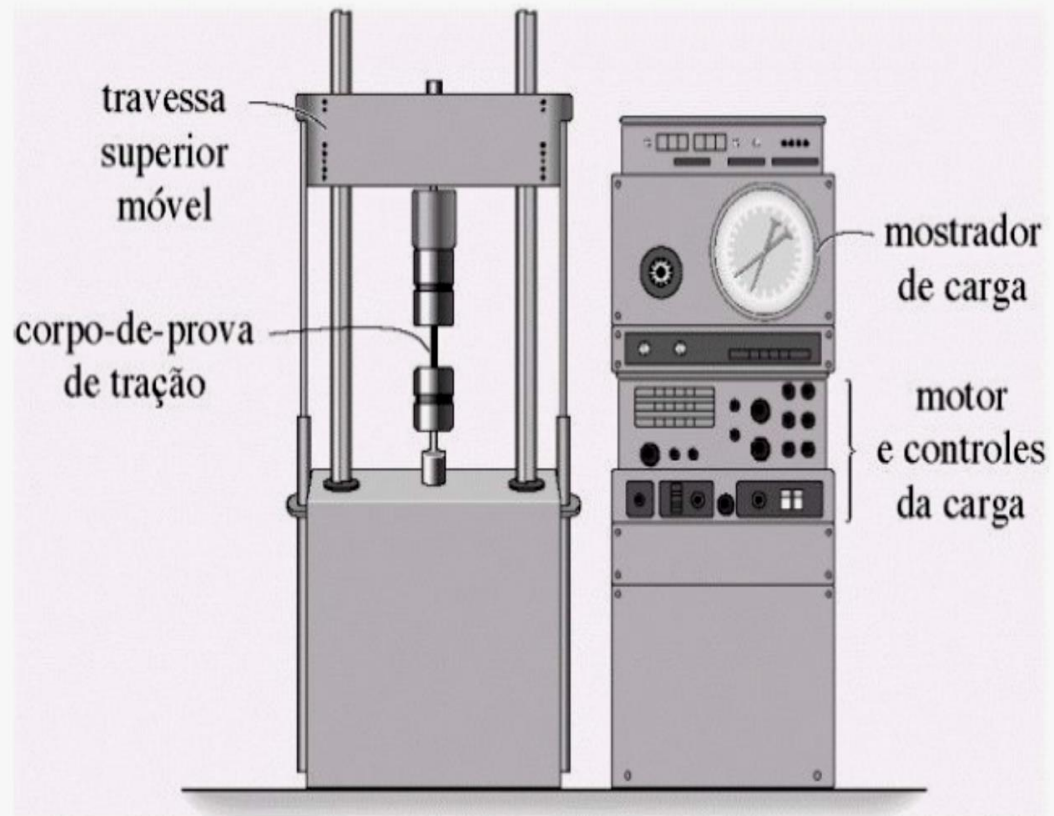
Membrana é a peça não plana que resiste somente a esforços tangentes à superfície média.



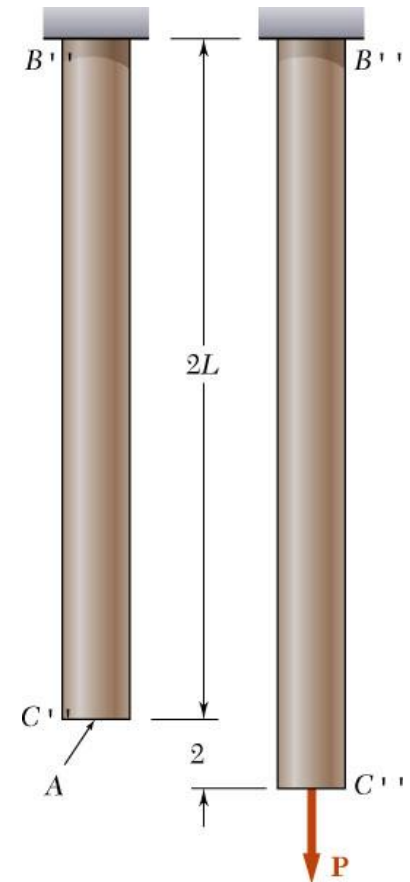
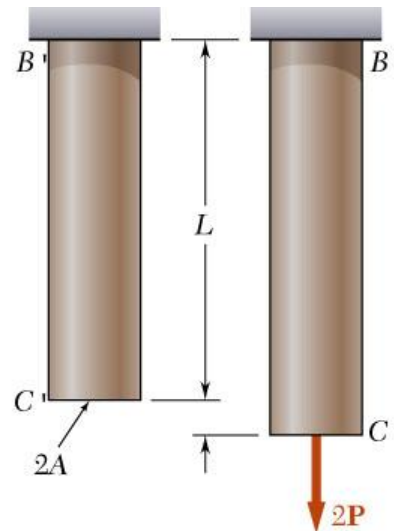
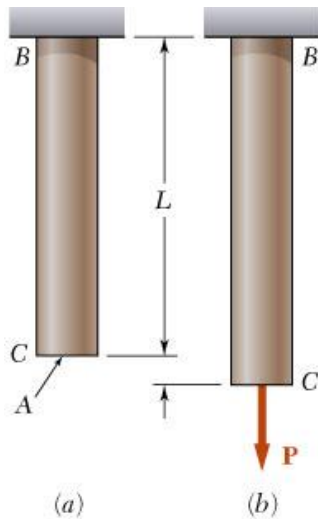
Um experimento: definições básicas



Ensaaios - Ensaio de Tração



Um experimento: definições básicas



Quais são os dados obtidos?

Def.: Alongamento

Def.: Tensão Normal (média)

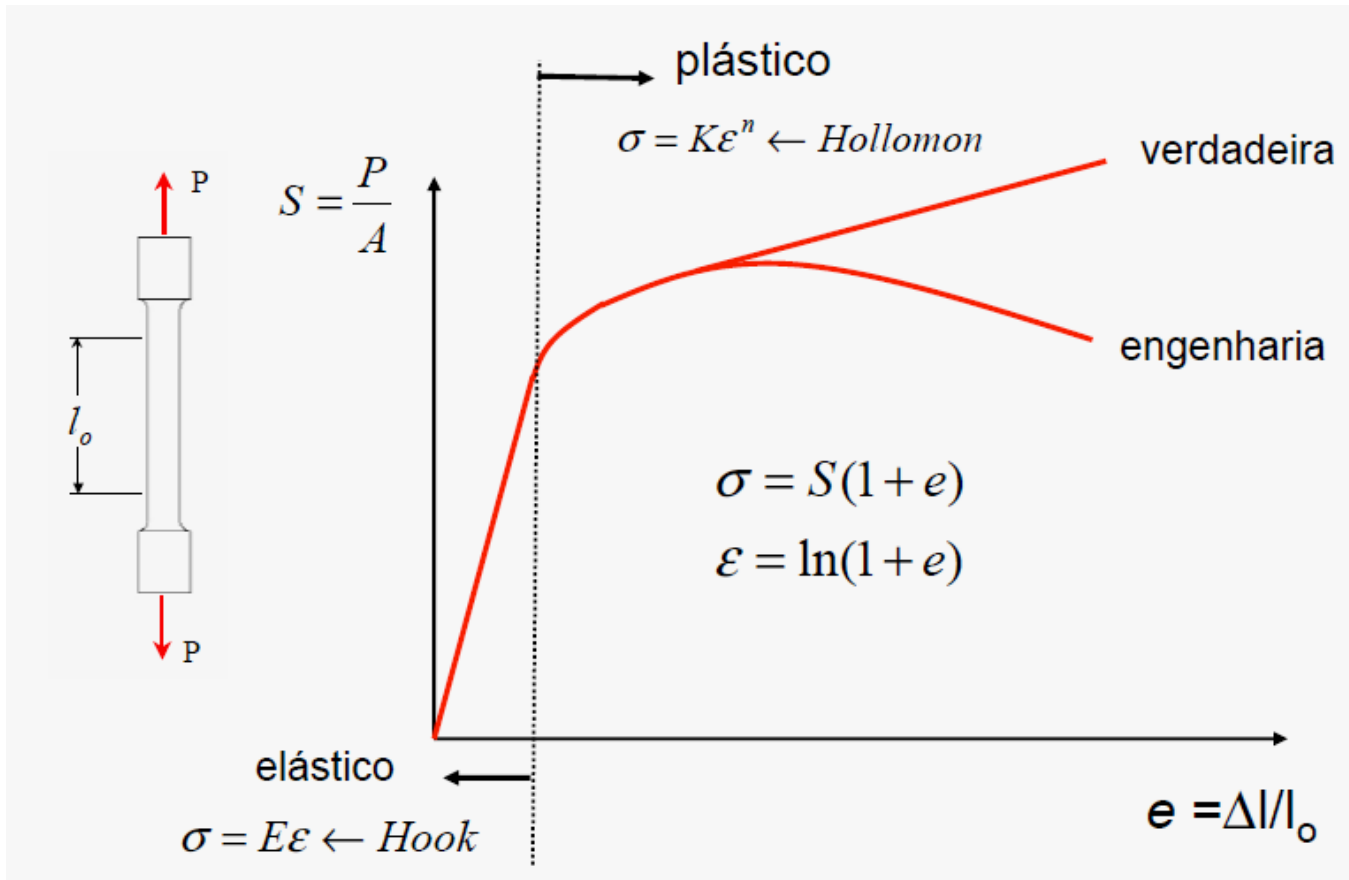
Def.: Deformação Axial (média)

Def.: Módulo de Young

Lei de Hooke (uniaxial)

Definições básicas

$$\Delta L = L - L_0$$



$$\sigma = \frac{N}{A_0}$$

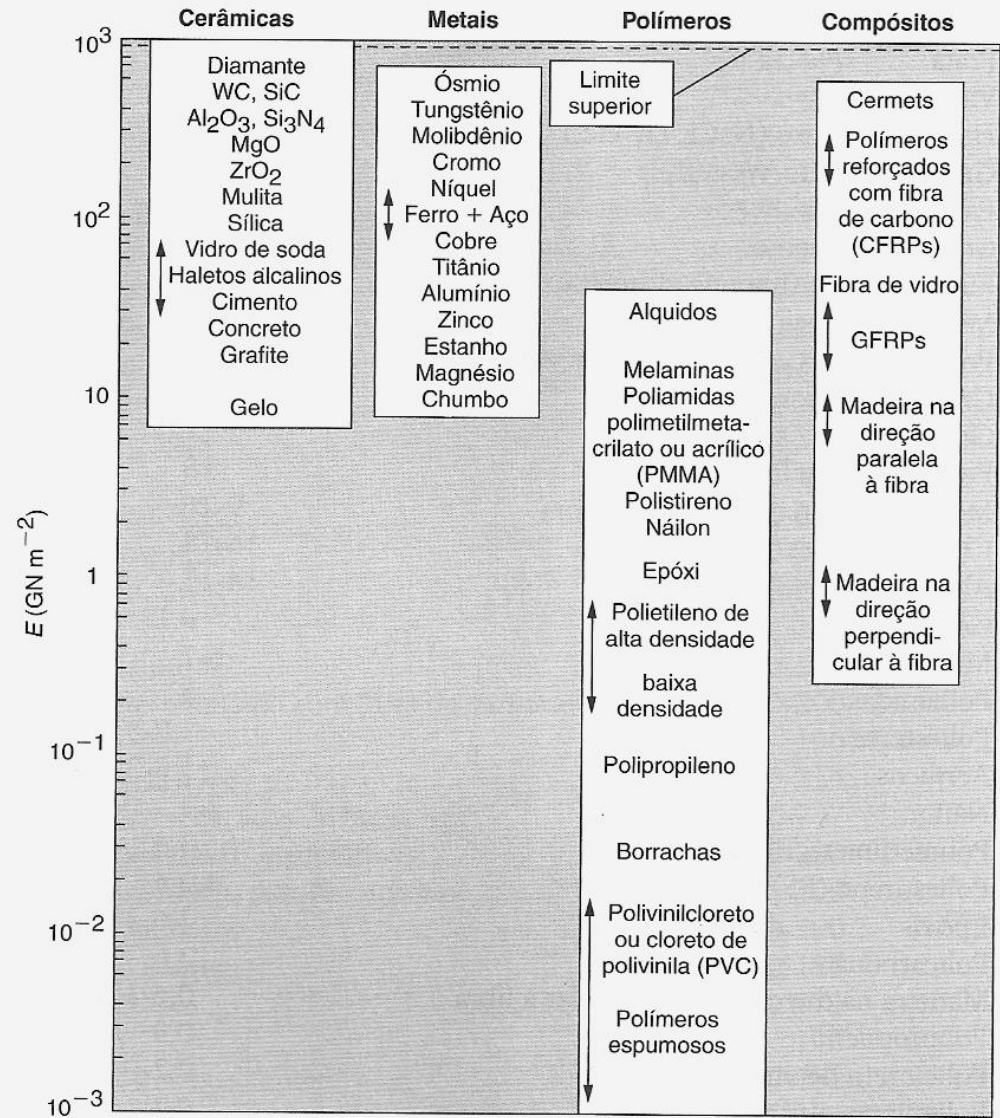
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\Delta L = \frac{NL_0}{EA_0}$$

Módulo de Young:

- Ordem de grandeza



CÁLCULO DO ALONGAMENTO DE UMA BARRA

$$\Delta L = \frac{NL_0}{EA_0}$$

Esta equação é válida para barra homogênea, com seção transversal uniforme e força aplicada em sua extremidade.

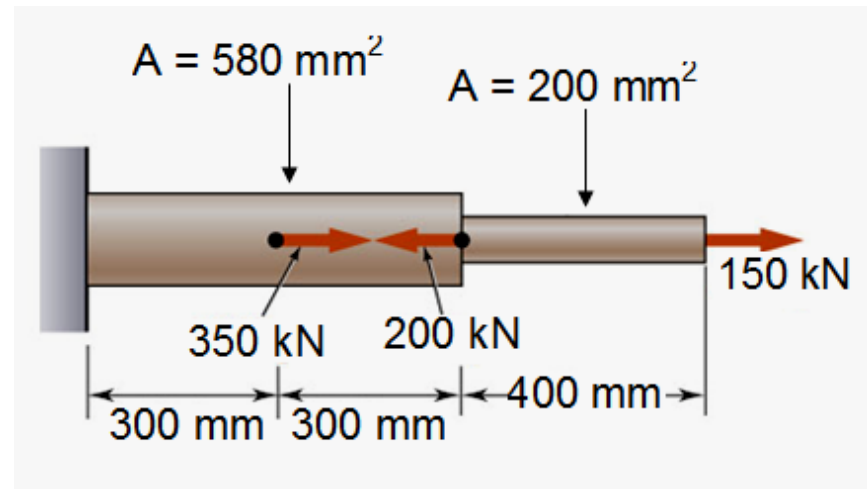
BARRAS MULTIPRISMÁTICAS

Quando a barra é carregada em diferentes pontos, ou é composta de vários trechos (diferentes áreas e materiais).

Exemplo

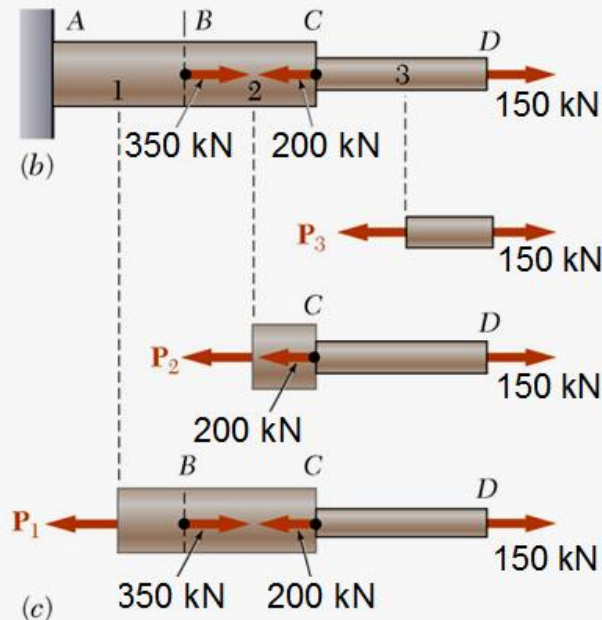
Determine o alongamento da barra de aço mostrada submetida às forças dadas.

$$E = 200 \text{ GPa}$$



SOLUÇÃO:

- Divida a barra em três trechos, *AB*, *BC* e *CD*:



$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm.} \quad L_3 = 400 \text{ mm.}$$

$$A_1 = A_2 = 580 \text{ mm}^2 \quad A_3 = 200 \text{ mm}^2$$

- Aplicar a análise de corpo livre (método das seções) para determinar as forças internas, ou seja, a Normal em cada trecho da barra:

$$P_1 = 300 \text{ kN} = 300 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_2 = -50 \text{ kN} = -50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_3 = 150 \text{ kN} = 150 \times 10^3 \text{ N}$$

- Alongamento total

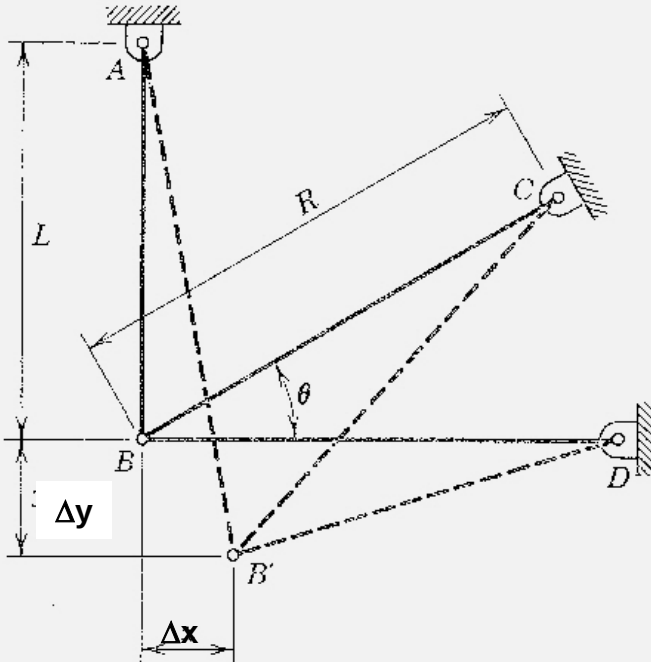
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right)$$

$$= \frac{1}{200} \left[\frac{(300 \times 300)}{580} + \frac{(-50)(300)}{580} + \frac{150 \times 400}{200} \right]$$

$$\delta = \frac{429,31}{200} = 2,15 \text{ mm}$$

ALONGAMENTOS EM SISTEMAS DE BARRAS

Seja o sistema de três barras biarticuladas AB , BC e CD .



$$\Delta L_{AB} \cong \Delta y$$

$$\Delta L_{BD} \cong \Delta x$$

$$\Delta L_{BC} \cong \Delta y \sin \theta - \Delta x \cos \theta$$

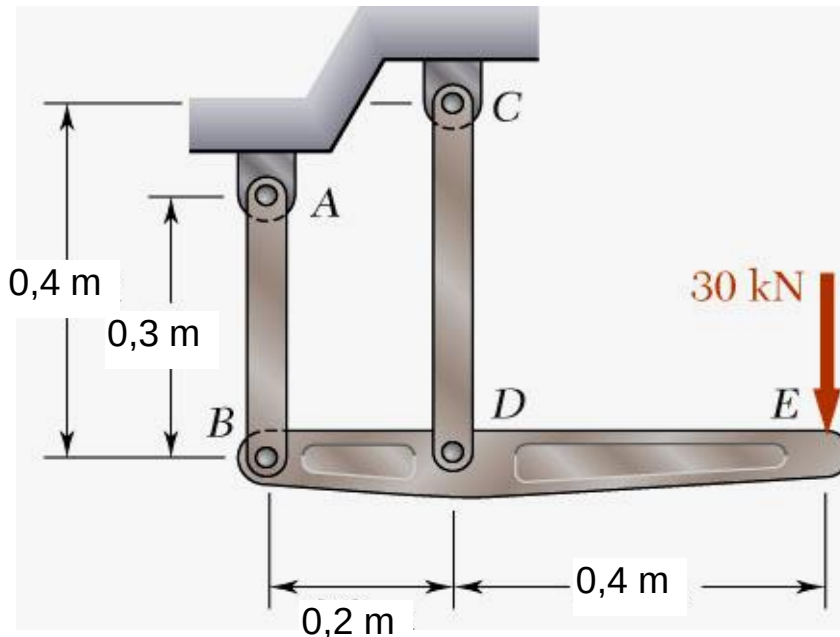
Conclusão: para *pequenos deslocamentos*, o alongamento de uma barra é tomado como a componente do deslocamento de sua extremidade na *direção original* da barra.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) A barra rígida BDE é suspensa por duas hastes AB e CD . A haste AB é de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$), com área da seção transversal 500 mm^2 ; a haste CD é de aço ($E = 200 \text{ GPa}$), com área de seção de 600 mm^2 . Para a força de 30 kN , determine os deslocamentos dos pontos B , D e E .

Roteiro:

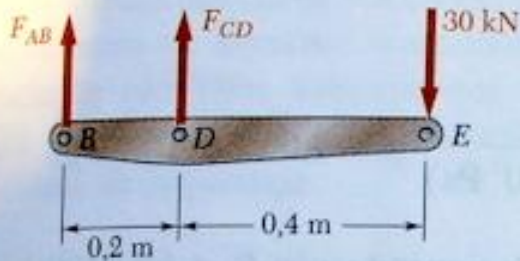
- i) DCL e análise de equilíbrio*
 - Forças em barras biarticuladas
 - Supor forças de tração
- ii) Deslocamentos de B e D*
 - Relacionar ao alongamento
- iii) Deslocamento do ponto E*
 - Barra horizontal rígida
 - Pequenas deformações



PROBLEMAS de ISOSTÁTICA

SOLUÇÃO

Corpo Livre: Barra BDE



$$+\uparrow \sum M_B = 0:$$

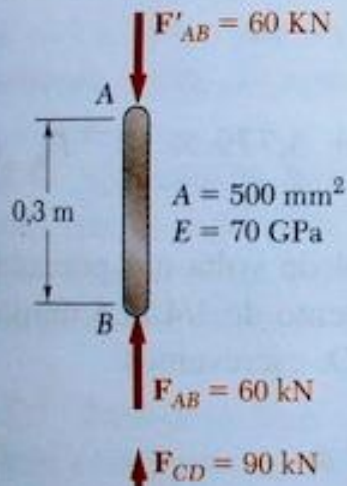
$$-(30 \text{ kN})(0,6 \text{ m}) + F_{CD}(0,2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \quad \text{tração}$$

$$+\uparrow \sum M_D = 0:$$

$$-(30 \text{ kN})(0,4 \text{ m}) - F_{AB}(0,2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \quad \text{compressão}$$



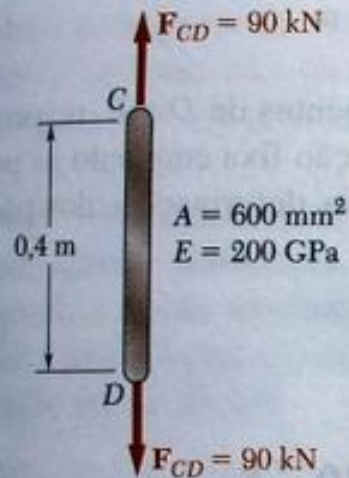
a. **Deslocamento do ponto B.** Como a força interna na barra AB é de compressão, temos $P = -60 \text{ kN}$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0,3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$

O sinal negativo indica uma contração do elemento AB e, portanto, um deslocamento da extremidade B para cima:

$$\delta_B = 0,514 \text{ mm} \uparrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS de ISOSTÁTICA – solução P.R.1



$$\delta_B = 0,514 \text{ mm} \uparrow$$

b. Deslocamento do ponto D. Como a força interna na barra CD é $P = 90 \text{ kN}$, escrevemos

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0,4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6} \text{ m}$$

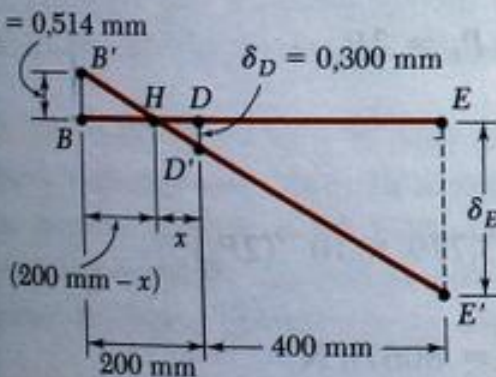
$$\delta_D = 0,300 \text{ mm} \downarrow$$

c. Deslocamento do ponto E. Designamos por B' e D' as posições deslocadas dos pontos B e D. Como a barra BDE é rígida, os pontos B' , D' e E' estão em uma linha reta e escrevemos

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \quad \frac{0,514 \text{ mm}}{0,300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x} \quad x = 73,7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \quad \frac{\delta_E}{0,300 \text{ mm}} = \frac{(400 \text{ mm}) + (73,7 \text{ mm})}{73,7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1,928 \text{ mm} \downarrow$$

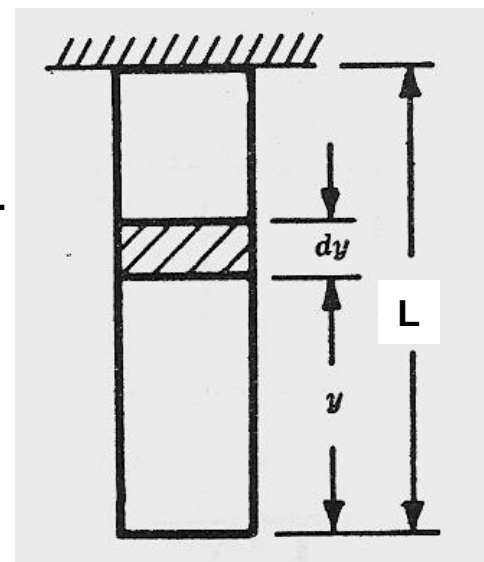


Variação de parâmetros

- Variação de força – problema de deformação sob peso próprio (uma barra prismática suspensa)
- Variação de seção – uma barra de seção transversal variável sob carga axial: diagrama de tensão; função de deformação específica; deformação absoluta total

PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO CONTÍNUA DE PARÂMETROS

- 2) Considere uma barra prismática com comprimento L e seção transversal com área A . O material de que esta barra é feita tem peso específico γ e módulo de Young E . A barra é suspensa pela extremidade superior, ficando submetida à ação do próprio peso. Pede-se:
- a) Obtenha o diagrama que mostra a variação da força normal ao longo do comprimento da barra;
 - b) Determine o alongamento da barra, produzido pela ação exclusiva do seu peso próprio



Roteiro:

i) Variação da força Normal na barra.

ii) Deformação em um ponto (definição matemática da deformação).

iii) Determinação do alongamento da barra.

PROBLEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

Conceito:

i) Em grande parte das estruturas, as reações e forças externas não podem ser determinadas apenas pelo análise de suas condições de equilíbrio.

*Exemplo: Barra bi-engastada sujeita a uma força entre os apoios
(uma equação de equilíbrio e duas reações incógnitas).*

ii) As condições de equilíbrio devem então ser complementadas por outras relações envolvendo a deformação, que podem ser obtidas considerando que as variações de comprimento devem ser compatíveis com as restrições geométricas do problema.

Exemplo: O comprimento da barra bi-engastada não varia.

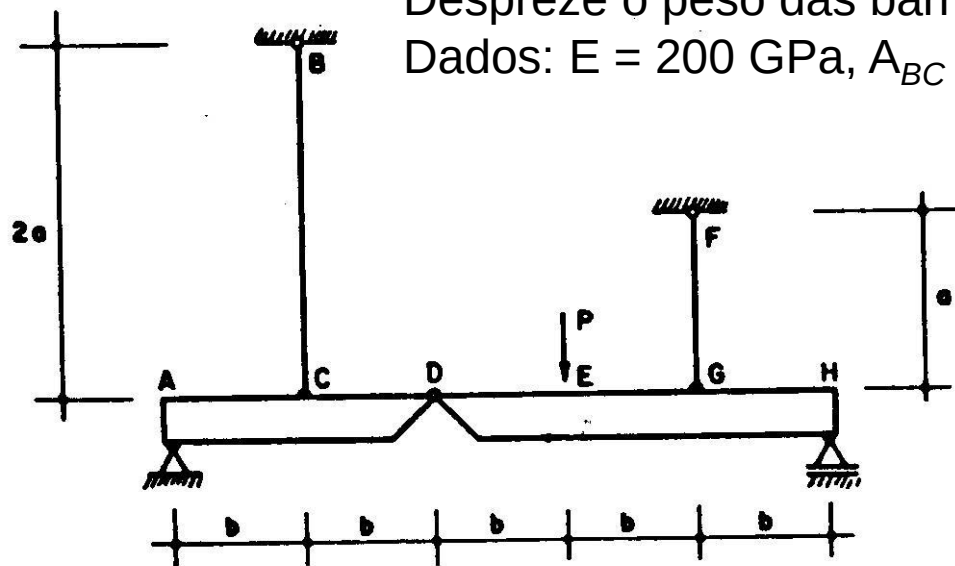
iii) Existem diferentes métodos para resolução de problemas hiperestáticos; o emprego das equações de compatibilidade é adequado apenas para problemas com baixo grau de hiperestaticidade.

PROBLEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

3) Para uma força $P = 7 \text{ kN}$, calcular a tensão normal nos arames BC e FG .

Despreze o peso das barras rígidas horizontais.

Dados: $E = 200 \text{ GPa}$, $A_{BC} = 2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{FG} = 3,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.



Roteiro:

i) Diagrama de Corpo Livre e análise de equilíbrio.

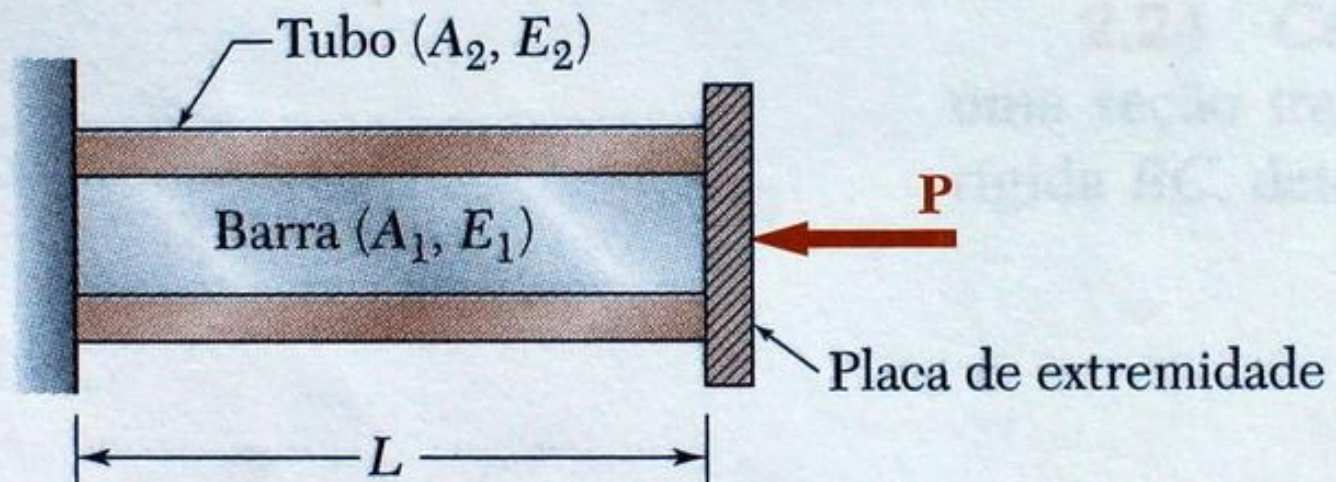
Importante: Decomposição da viga articulada.

ii) Análise de compatibilidade.

iii) Determinação das forças e tensões nos arames.

EXEMPLO 2.2

Uma barra de comprimento L , seção transversal de área A_1 , e módulo de elasticidade E_1 , foi colocada dentro de um tubo do mesmo comprimento L , mas de seção transversal de área A_2 e módulo de elasticidade E_2 (Fig. 2.25a). Qual é a deformação da barra e do tubo quando uma força P é aplicada em uma placa lateral rígida como mostra a figura?



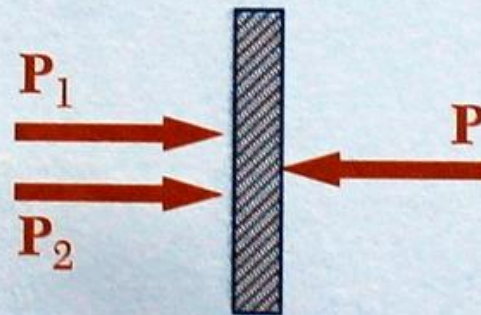
PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA



(b)



(c)



(d)

Indicando por P_1 e P_2 , respectivamente, as forças axiais na barra e no tubo, desenhamos os diagramas de corpo livre dos três elementos (Fig. 2.25*b, c, d*). Somente o último dos diagramas fornece alguma informação significativa, ou seja:

$$P_1 + P_2 = P \quad (2.11)$$

Está claro que uma única equação não é suficiente para determinar as duas forças internas desconhecidas P_1 e P_2 . O problema é estaticamente indeterminado.

No entanto, a geometria do problema mostra que as deformações δ_1 e δ_2 da barra e do tubo devem ser iguais. Usando

PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

a Equação (2.7), escrevemos

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad (2.12)$$

Igualando as deformações δ_1 e δ_2 , obtemos:

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \quad (2.13)$$

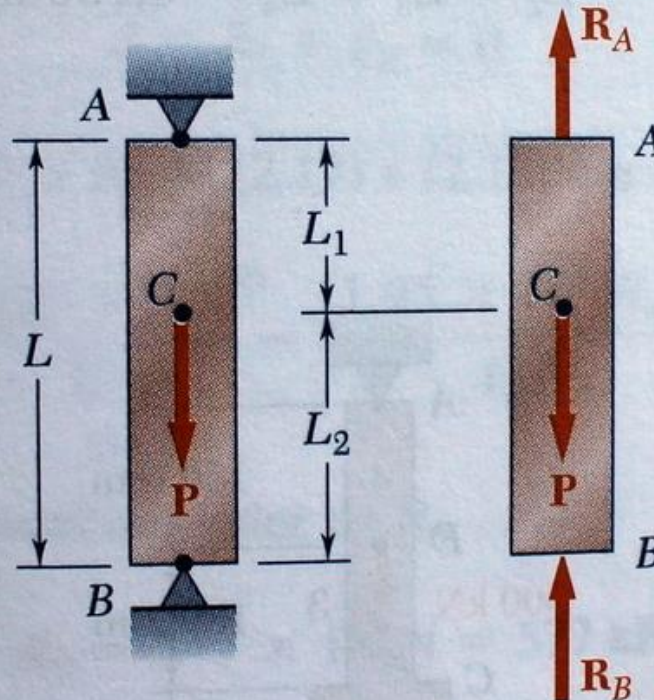
As Equações (2.11) e (2.13) podem ser resolvidas simultaneamente para P_1 e P_2 :

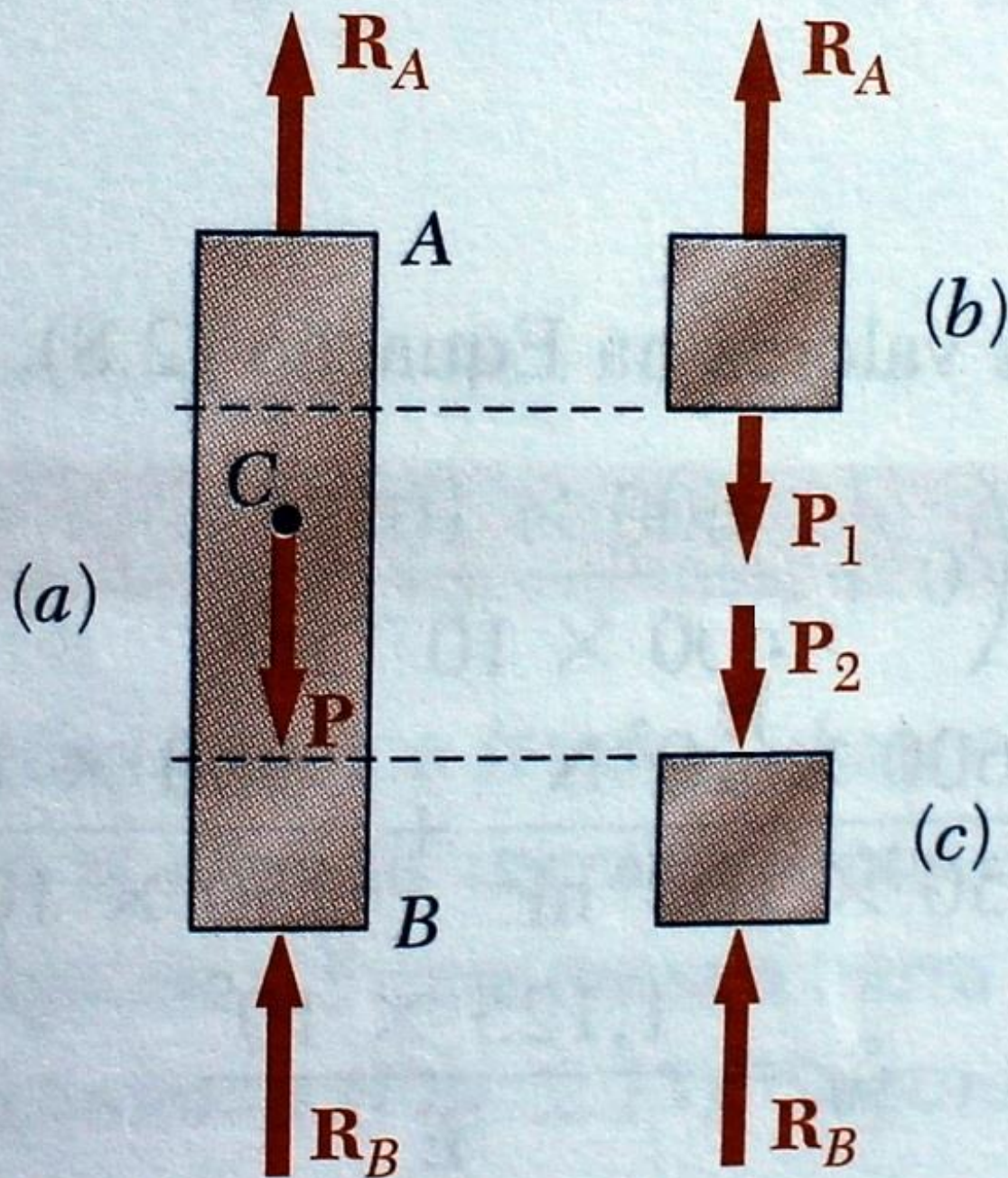
$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Qualquer uma das Equações (2.12) pode então ser usada para determinar a deformação comum da barra e do tubo.

EXEMPLO 2.3

Uma barra AB de comprimento L e seção transversal uniforme está ligada a suportes rígidos em A e B antes de ser aplicada uma força. Quais são as tensões nas partes AC e BC devido à aplicação de uma força P no ponto C (Fig. 2.26a)?





PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

Desenhando o diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.26b), obtemos a equação de equilíbrio

$$R_A + R_B = P \quad (2.14)$$

Como essa equação não é suficiente para determinar as duas reações desconhecidas R_A e R_B , o problema é estaticamente indeterminado.

No entanto, as reações podem ser determinadas se observarmos da geometria que a deformação total δ da barra deve ser zero. Designando por δ_1 e δ_2 , respectivamente, as deformações das partes AC e BC , escrevemos

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

ou, expressando δ_1 e δ_2 em termos das forças internas correspondentes P_1 e P_2 :

$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \quad (2.15)$$

Mas notamos pelos diagramas de corpo livre mostrados, respectivamente, nas partes *b* e *c* da Fig. 2.27 que $P_1 = R_A$ e $P_2 = -R_B$. Substituindo esses dois valores na Equação (2.15), escrevemos

$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \quad (2.16)$$

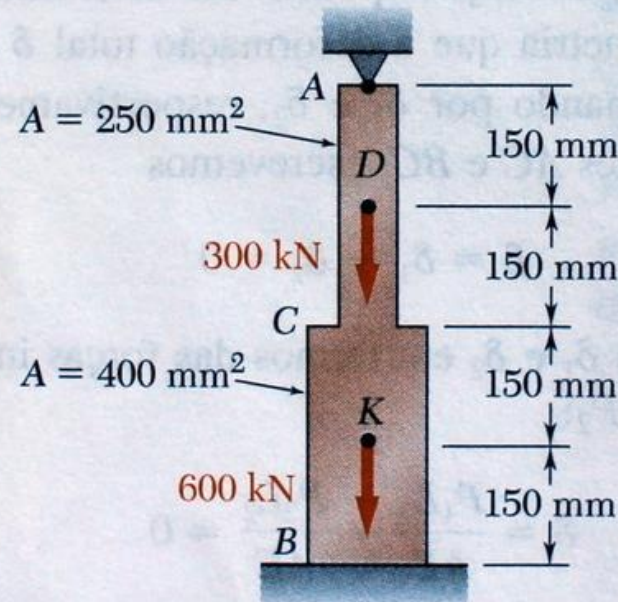
As Equações (2.14) e (2.16) podem ser resolvidas simultaneamente para R_A e R_B ; obtemos $R_A = PL_2/L$ e $R_B = PL_1/L$. As tensões desejadas σ_1 em *AC* e σ_2 em *BC* são obtidas dividindo-se, respectivamente, $P_1 = R_A$ e $P_2 = -R_B$ pela área da seção transversal da barra:

$$\sigma_1 = \frac{PL_2}{AL} \quad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

Método da Superposição. Observamos que uma estrutura é estaticamente indeterminada sempre que ela é vinculada por mais suportes do que aqueles necessários para manter seu equilíbrio. Isso resulta em mais reações desconhecidas do que equações de equilíbrio disponíveis. Muitas vezes é conveniente designar uma das reações como *redundante* e eliminar o suporte correspondente. Como as condições estabelecidas no problema não podem ser alteradas arbitrariamente, a reação redundante deve ser mantida na solução. Mas ela será tratada como uma *força desconhecida* que, juntamente com outras forças, deve produzir deformações compatíveis com as restrições originais. A solução real do problema é obtida considerando-se separadamente as deformações provocadas pelas forças e pela reação redundante e somando ou *superpondo* os resultados obtidos.†

EXEMPLO 2.4

Seja a barra de aço, presa em ambas as extremidades por apoios fixos, mostrada na Fig. 2.28, submetida ao carregamento indicado. Determine o valor das reações nesses apoios.



Consideramos a reação em B como redundante e liberamos a barra daquele apoio B . A reação $\mathbf{R}_B$ é agora considerada uma força desconhecida (Fig. 2.29a) e será determinada por meio da condição de que a deformação δ da barra deve ser igual a zero. A solução é obtida considerando-se separadamente a deformação δ_L causada pelas forças dadas (Fig. 2.29b) e a deformação δ_R devido à reação $\mathbf{R}_B$ redundante (Fig. 2.29c).

PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

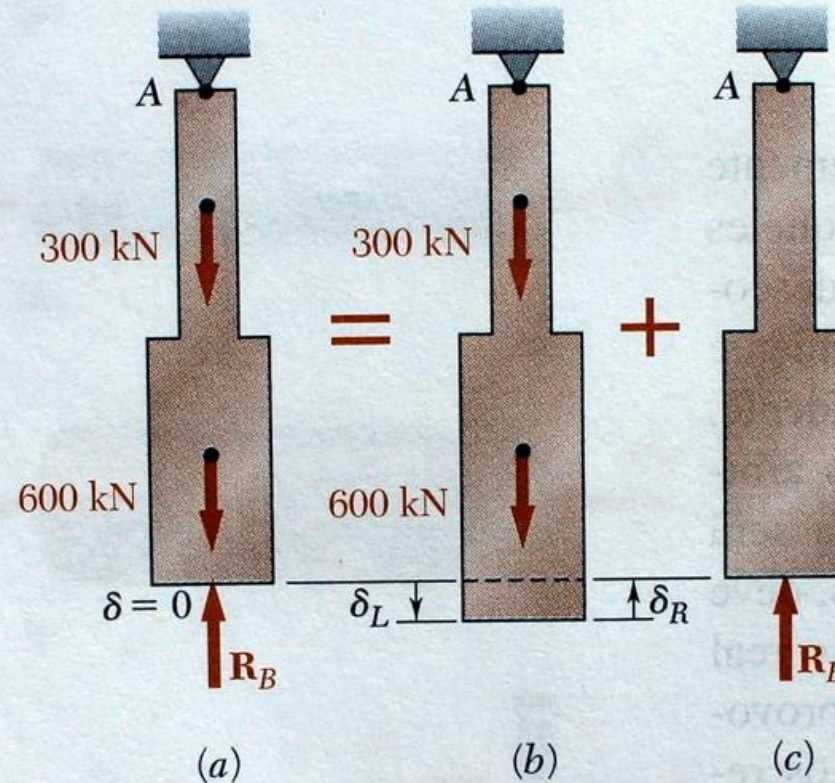


Fig. 2.29

A deformação δ_L é obtida pela Equação (2.8) depois que a barra foi dividida em quatro partes, como mostra a Fig. 2.30.

PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

Seguindo o mesmo procedimento do Exemplo 2.1, escrevemos

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0,150 \text{ m}$$

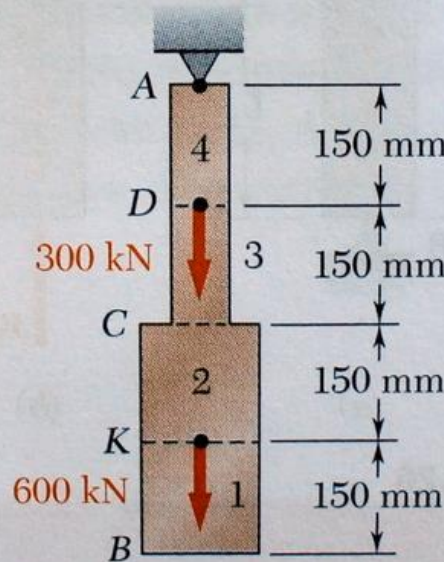


Fig. 2.30

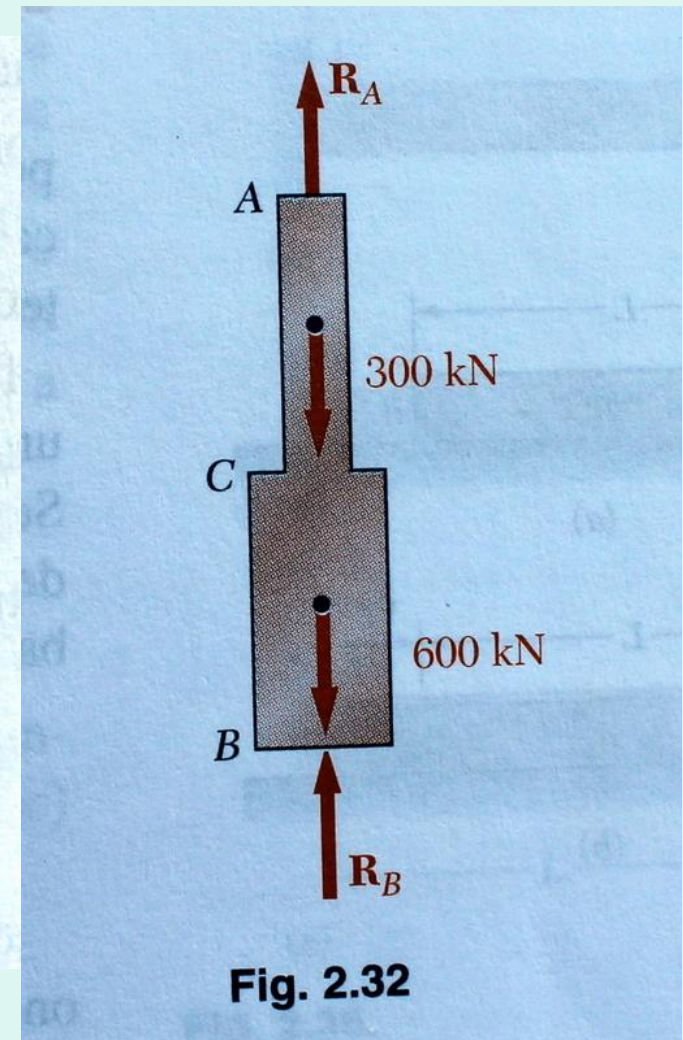
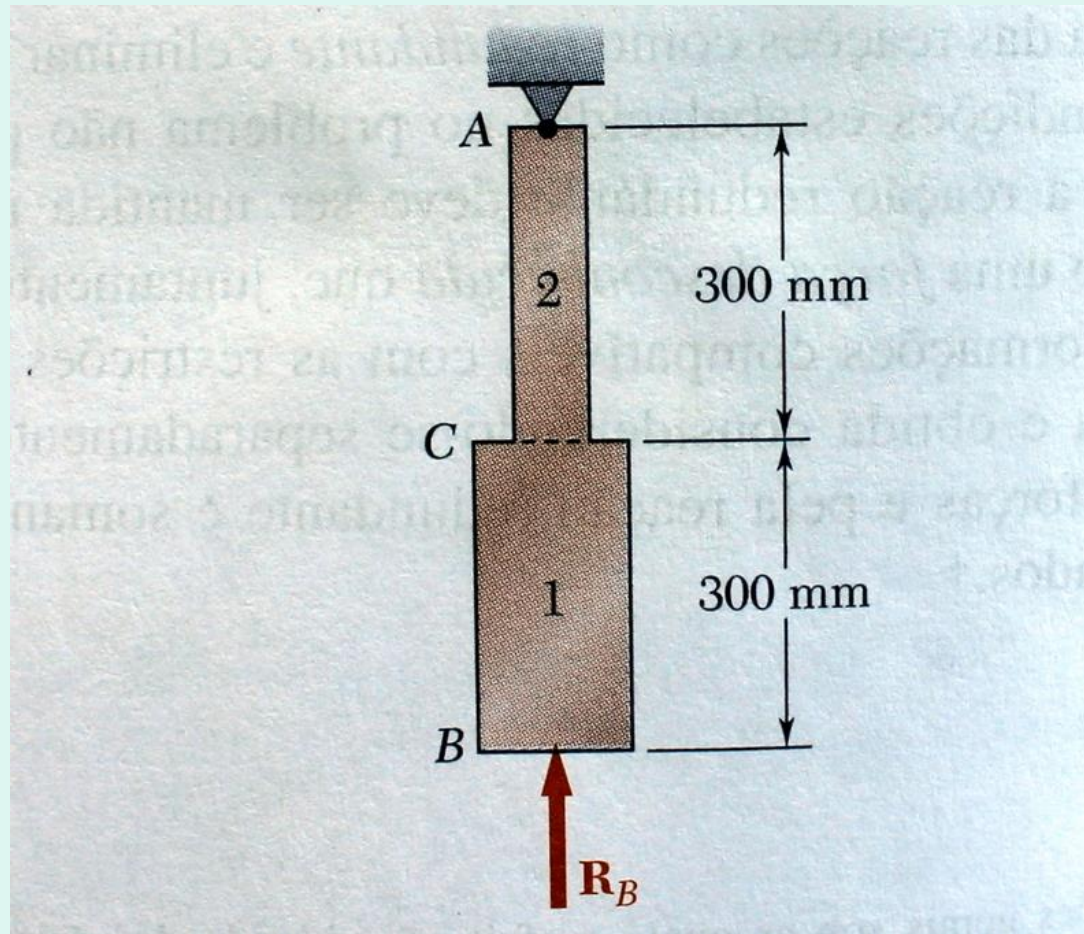
Substituindo esses valores na Equação (2.8), obtemos

$$\delta_L = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \frac{0,150 \text{ m}}{E}$$
$$\delta_L = \frac{1,125 \times 10^9}{E} \quad (2.17)$$

Para a determinação da deformação δ_R devido à reação redundante R_B , devemos dividir a barra em duas partes, como mostra a Fig. 2.31, e escrevemos

$$P_1 = P_2 = -R_B$$
$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$
$$L_1 = L_2 = 0,300 \text{ m}$$

PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA



Substituindo esses valores na Equação (2.8), obtemos

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = - \frac{(1,95 \times 10^3) R_B}{E} \quad (2.18)$$

Considerando que a deformação total δ da barra deve ser zero, escrevemos

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \quad (2.19)$$

PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

e substituindo δ_L e δ_R de (2.17) e (2.18) em (2.19),

$$\delta = \frac{1,125 \times 10^9}{E} - \frac{(1,95 \times 10^3)R_B}{E} = 0$$

Dessa equação temos o valor de R_B

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

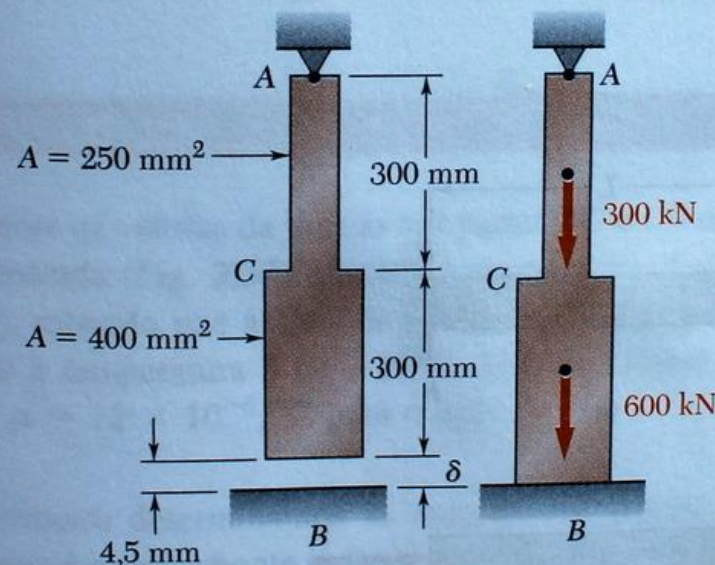
A reação R_A no apoio superior é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.32). Escrevemos

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B &= 0 \\ R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} &= 323 \text{ kN} \end{aligned}$$

Uma vez determinadas as reações, as tensões e deformações na barra podem ser obtidas facilmente. Deve-se notar que, embora a deformação total da barra seja zero, cada uma de suas partes componentes *se deforma* sob as condições de carregamento e restrições nos apoios.

EXEMPLO 2.5

Determine as reações em A e B para a barra de aço do Exemplo 2.4. Considere o mesmo carregamento e suponha, agora, que exista uma folga de 4,5 mm entre a barra e o apoio B antes de aplicar o carregamento (Fig. 2.33). Suponha $E = 200$ GPa.



Seguimos o mesmo procedimento do Exemplo 2.4. Considerando a reação em B redundante, calculamos as deformações δ_L e δ_R provocadas, respectivamente, pelas forças e pela reação redundante $\mathbf{R}_B$. No entanto, neste caso a deformação total não é zero, mas $\delta = 4,5 \text{ mm}$. Escrevemos então

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4,5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (2.20)$$

Substituindo δ_L e δ_R de (2.17) e (2.18) em (2.20) e lembrando de que $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, temos

$$\delta = \frac{1,125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1,95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Resolvendo, esta equação, determina-se o valor de R_B . Assim, temos

$$R_B = 115,4 \times 10^3 \text{ N} = 115,4 \text{ kN}$$

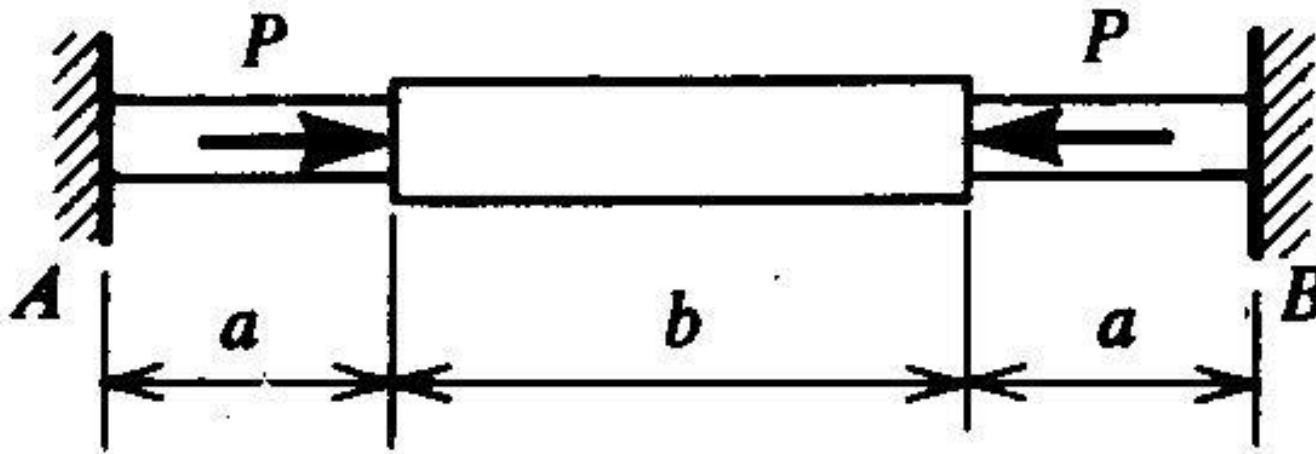
A reação em A é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.32):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115,4 \text{ kN} = 785 \text{ kN}$$

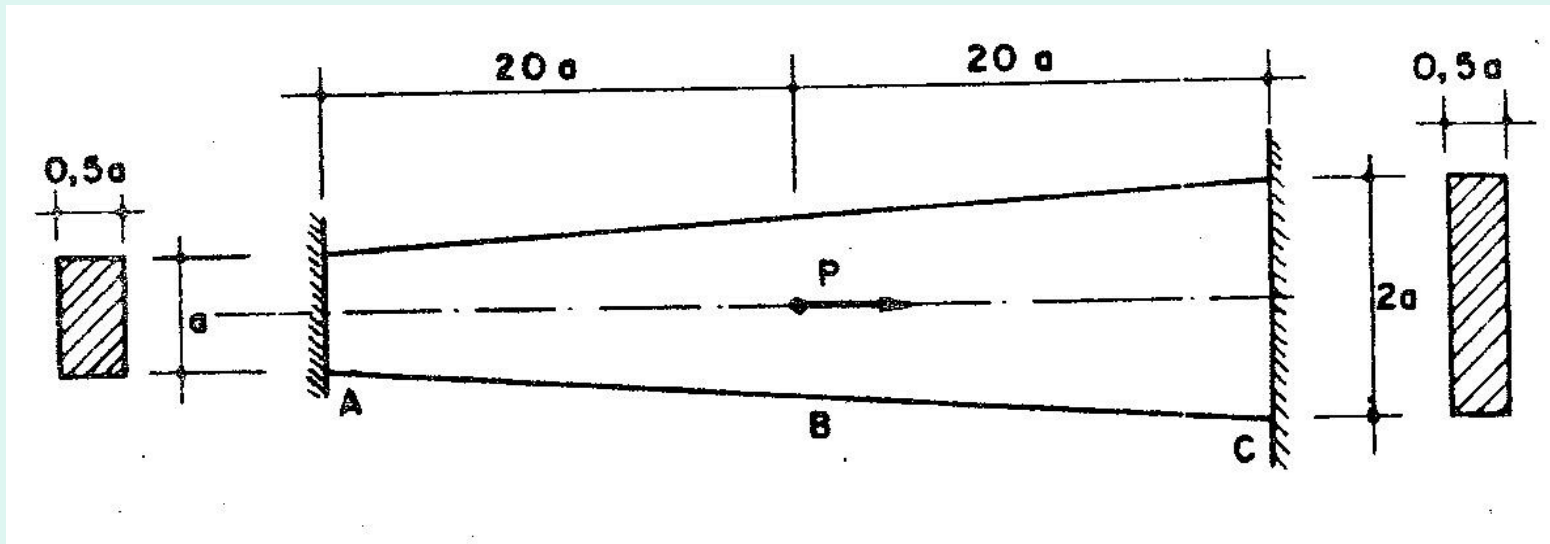
PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

4). Uma barra engastada em suportes rígidos tem seção reduzida nas extremidades e suporta forças axiais opostas de mesmo módulo P . Calcular a tensão no meio da barra, supondo A_1 = área da seção transversal nas extremidades e A_2 = área na parte central. Usar os valores: $P = 25$ kN, $A_1 = 500$ mm², $A_2 = 750$ mm², além de $b = 3a = 420$ mm. (Resp.: $\sigma = -16,7$ MPa – compressão)



PROBLEMAS de HIPERESTÁTICA

5). A barra mostrada na figura é bi-engastada e tem seção transversal retangular, com um lado constante igual a $0,5a$ e outro lado variando linearmente ao longo do comprimento, conforme indicado. Uma carga P é aplicada ao ponto B , situado na metade do comprimento da barra. Determine: *i)* As reações nos apoios A e C ; *ii)* O valor máximo da tensão normal na barra, indicando a seção em que ocorre.

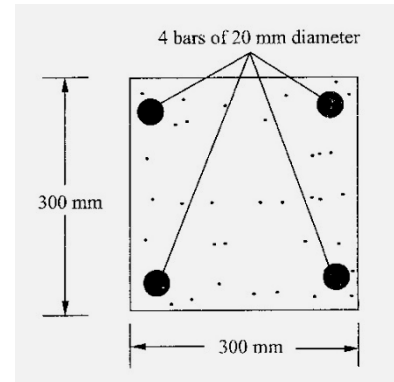
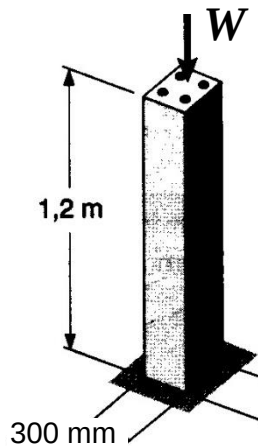


PROBLEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

- 6) Uma coluna de concreto armado com seção transversal quadrada medindo 300×300 mm é reforçada com 4 barras de aço com 20 mm de diâmetro. Calcule a carga máxima W que pode ser aplicada na coluna, se a tensão admissível para o concreto vale: $\sigma_{adm} = 5,2$ MPa.

Dado: A relação entre os módulos de Young do aço e do concreto vale: $\frac{E_s}{E_c} = 18$

Obs: área total da seção de aço = 1.256 mm^2
área do concreto = 88.744 mm^2 .



(i) The strains in both the materials are the same,

$$\text{i.e., } \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

$$\text{Hence, } \sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \sigma_c$$

$$\sigma_s = 18\sigma_c$$

$$W = \sigma_s A_s + \sigma_c A_c$$

$$= (18\sigma_c) A_s + \sigma_c A_c$$

$$= 1256 \times 10^{-6} \times 18\sigma_c + (88744 \times 10^{-6})\sigma_c$$

$$= [(1256 \times 10^{-6} \times 18) + (88744 \times 10^{-6})] 5.2 \times 10^6$$

$$= 579030 \text{ N} = 579.03 \text{ kN}$$

$\therefore$ Load it can safely carry = 579.03 kN

PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

Conceito:

i) Mudanças de temperatura podem provocar alterações nas dimensões de um corpo. Por exemplo, considere uma barra homogênea de seção uniforme e comprimento L . Se a temperatura desta barra for aumentada de ΔT , observamos um alongamento dado por:

$$\alpha \cdot L \cdot \Delta T$$

onde: α é o coeficiente linear de expansão térmica do material

ii) As variações de comprimento relacionadas às mudanças de temperatura podem causar tensões de origem térmica (quando os deslocamentos associados são impedidos).

PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

As juntas de dilatação observadas na maioria das pontes constituem um exemplo de aplicação visando contornar o problema das tensões térmicas



Junta de dilatação na ponte Rio-Niteroi

Fonte: Hibbeler, 2004

PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

Conceito:

i) Mudanças de temperatura podem provocar alterações nas dimensões de um corpo. Por exemplo, considere uma barra homogênea de seção uniforme e comprimento L . Se a temperatura desta barra for aumentada de ΔT , observamos um alongamento dado por:

$$\alpha \cdot L \cdot \Delta T$$

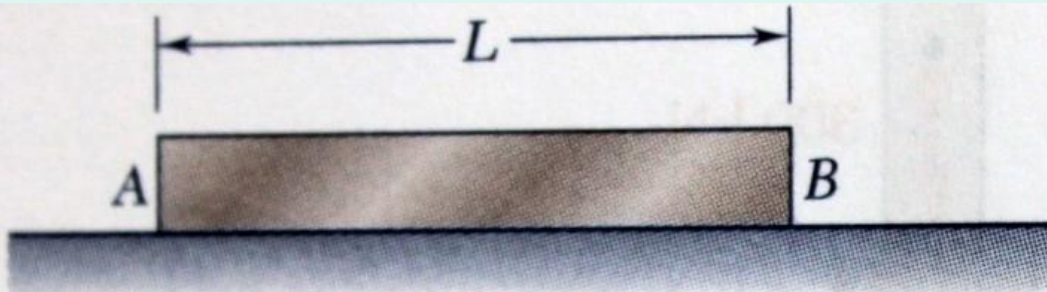
onde: α é o coeficiente linear de expansão térmica do material

ii) As variações de comprimento relacionadas às mudanças de temperatura podem causar tensões de origem térmica (quando os deslocamentos associados são impedidos).

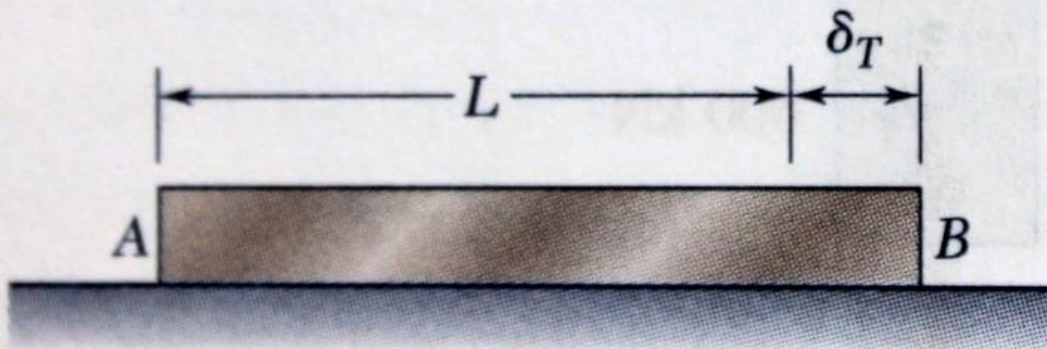
iii) **PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO:** Alongamento total de uma barra sujeita simultaneamente a força normal e variação de temperatura:

$$\Delta L = \Delta L_N + \Delta L_{\Delta T}$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS



(a)

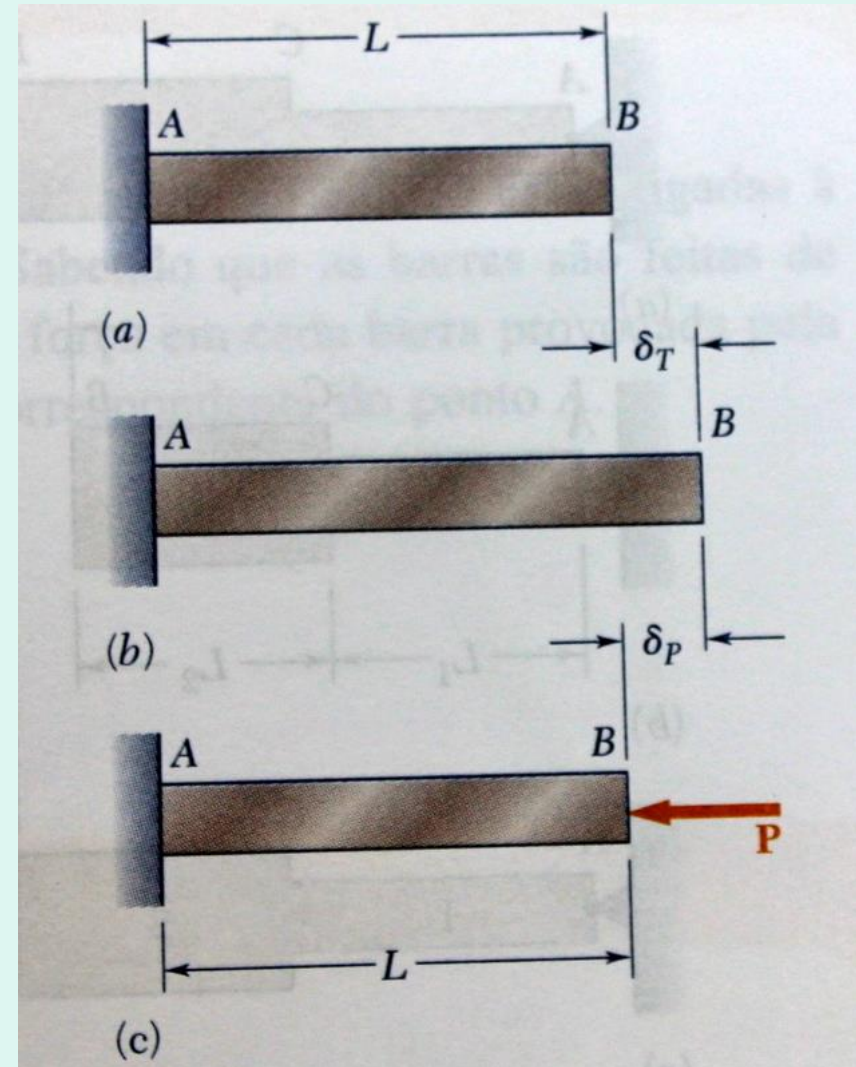
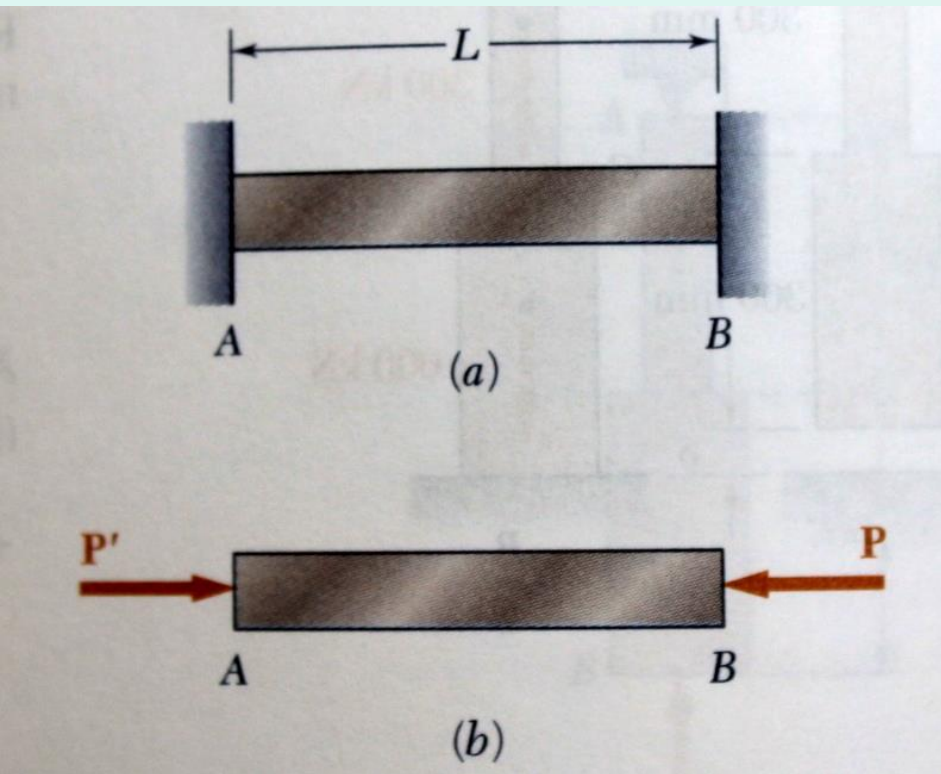


(b)

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS



EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Considerando que a deformação total δ deve ser zero, temos

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

de onde concluímos que

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

tensão na barra devido à mudança de temperatura ΔT é

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

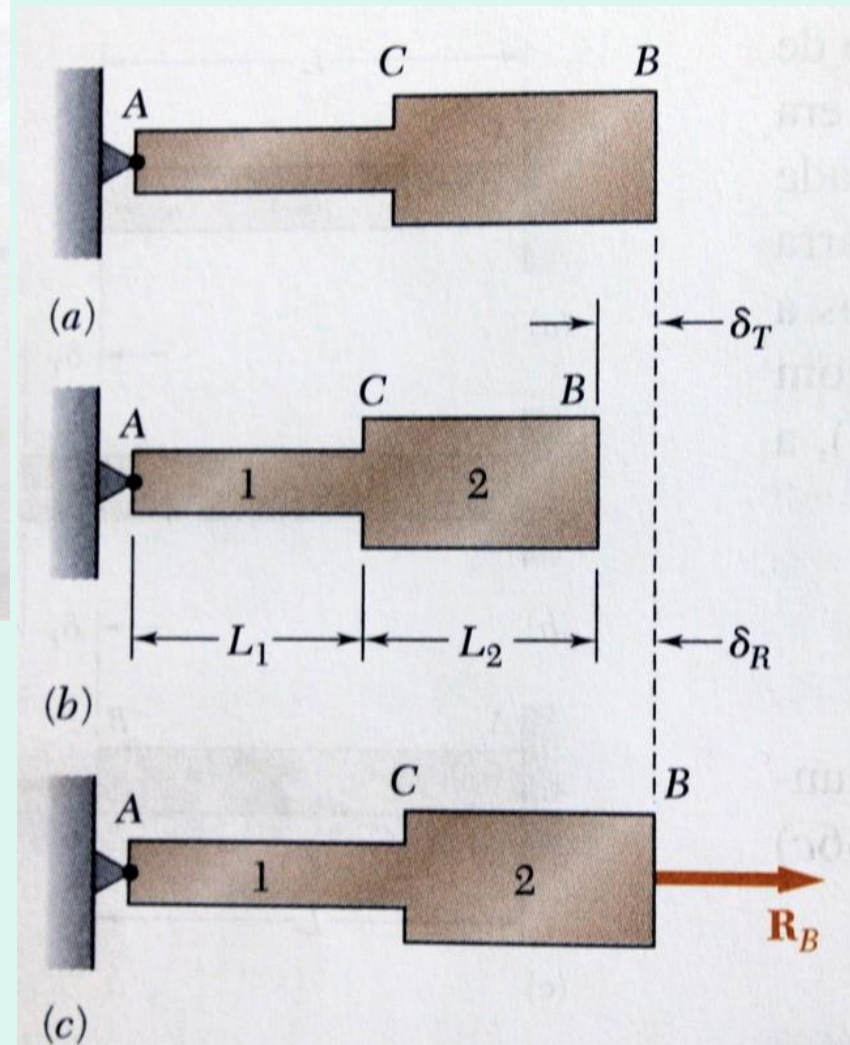
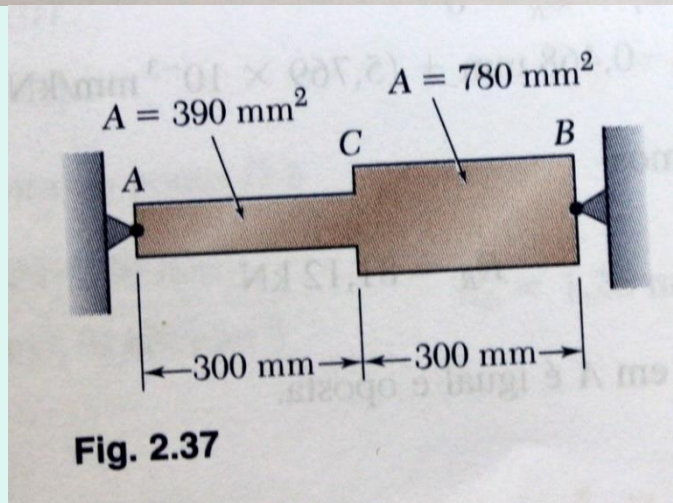
EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

EXEMPLO 2.6

Determine os valores da tensão nas partes AC e CB da barra de aço mostrada (Fig. 2.37) quando a temperatura da barra é de -45°C , sabendo que ambos os apoios rígidos estão ajustados quando a temperatura é de $+20^{\circ}\text{C}$. Use os valores $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ para o aço.

Primeiro determinamos as reações nos apoios. Como o problema é estaticamente indeterminado, separamos a barra de seu apoio em B e a deixamos mudar com a temperatura

$$\Delta T = (-45^{\circ}\text{C}) - (20^{\circ}\text{C}) = -65^{\circ}\text{C}$$



EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

A deformação correspondente (Fig. 2.38b) é

$$\begin{aligned}\delta_T &= \alpha(\Delta T)L = (12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(-65^{\circ}\text{C})(600 \text{ mm}) \\ &= -0,468 \text{ mm}\end{aligned}$$

Aplicando agora a força desconhecida $\mathbf{R}_B$ na extremidade B (Fig. 2.38c), usamos a Equação (2.8) para expressar a deformação δ_R correspondente. Substituindo

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm}$$

$$A_1 = 390 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 780 \text{ mm}^2$$

$$P_1 = P_2 = R_B \quad E = 200 \text{ GPa} = 200 \text{ kN/mm}^2$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

na Equação (2.8), escrevemos

$$\begin{aligned}\delta_R &= \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{R_B}{200 \text{ kN} / \text{mm}^2} \left(\frac{300 \text{ mm}}{390 \text{ mm}^2} + \frac{300 \text{ mm}}{780 \text{ mm}^2} \right) \\ &= (5,769 \times 10^{-3} \text{ mm/kN}) R_B\end{aligned}$$

Considerando que a deformação total da barra deve ser zero como resultado das restrições impostas, escrevemos

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_T + \delta_R = 0 \\ &= -0,468 \text{ mm} + (5,769 \times 10^{-3} \text{ mm/kN}) R_B = 0\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$R_B = 81,12 \text{ kN}$$

Notando que as forças nas duas partes da barra são $P_1 = P_2 = 81,12 \text{ kN}$, obtemos os seguintes valores para a tensão nas partes AC e CB da barra:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{81,12 \text{ kN}}{390 \text{ mm}^2} = 208 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{81,12 \text{ kN}}{780 \text{ mm}^2} = 104 \text{ MPa}$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

partes componentes; uma é a deformação específica térmica ϵ_T produzida na barra livre pela variação de temperatura ΔT (Fig. 2.38b). Da Equação (2.22) escrevemos

$$\begin{aligned}\epsilon_T &= \alpha \Delta T = (12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(-65^{\circ}\text{C}) \\ &= -780 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{m}} = -780 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}} = -780 \mu\end{aligned}$$

A outra componente de ϵ_{AC} está associada com a tensão σ_1 devida à força $\mathbf{R}_B$ aplicada à barra (Fig. 2.38c). Da lei de Hooke, expressamos essa componente da deformação como

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{208 \text{ MPa}}{200000 \text{ MPa}} = 1040 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1040 \mu$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

Somando as duas componentes da deformação específica em AC , obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon_{AC} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -780 \mu + 1040 \mu \\ &= 260 \mu\end{aligned}$$

Um cálculo semelhante fornece a deformação específica na parte CB da barra:

$$\epsilon_{CB} = \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -780 \mu + 520 \mu = -260 \mu$$

EFEITO DE VARIAÇÕES TÉRMICAS

As deformações δ_{AC} e δ_{CB} das duas partes da barra são expressas, respectivamente, como

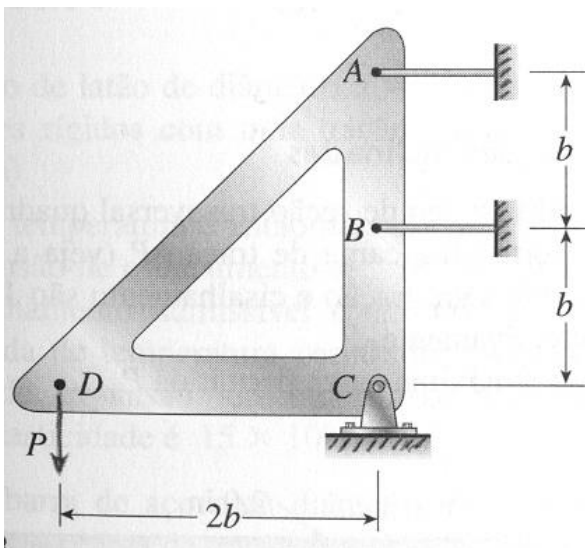
$$\begin{aligned}\delta_{AC} &= \epsilon_{AC}(AC) = (260 \times 10^{-6})(300 \times 10^{-3} \text{ m}) = \\ &= 78 \times 10^{-6} \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{CB} &= \epsilon_{CB}(CB) = (-260 \times 10^{-6})(300 \times 10^{-3} \text{ m}) = \\ &= -78 \times 10^{-6} \text{ m}\end{aligned}$$

Verificamos então que, embora a soma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ das duas deformações seja zero, nenhuma das deformações é igual a zero.

PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

- 7) A barra Uma lâmina rígida triangular está presa por um pino em C e por fios horizontais idênticos em A e B . Os fios têm $E = 75 \text{ GPa}$, $A = 7,12 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ e $\alpha = 23 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Responda:
- Se uma carga vertical $P = 2,25 \text{ kN}$ é aplicada em D , quanto valem as forças nos fios?
 - Se ambos os fios tiverem um aumento de temperatura de 95°C enquanto a força P estiver sendo aplicada, quais os valores das forças nos fios?
 - Para que o fio em B fique frouxo (ou seja, tenha força igual a zero), qual deve ser o aumento de temperatura dos fios?

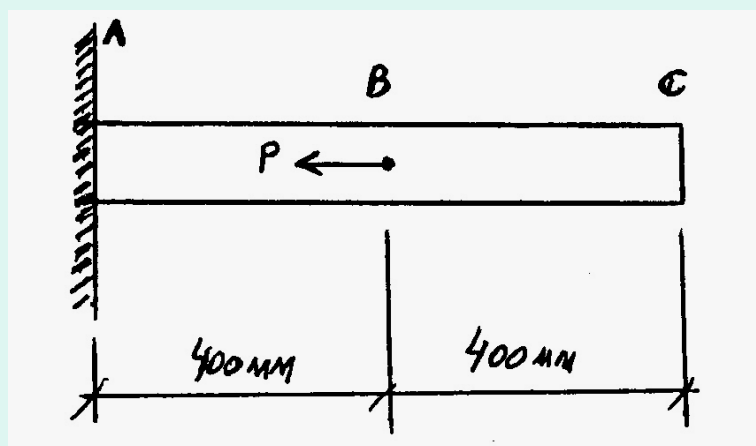


Roteiro:

- Diagrama de Corpo Livre e análise de equilíbrio.
- Equação de compatibilidade; cálculo das forças.
- Equação de compatibilidade para $\Delta T = 95^\circ\text{C}$.
- Cálculo de ΔT tal que $F_B = 0$.

PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

- 5) A barra ABC tem suas dimensões à temperatura ambiente (25°C) indicadas na figura. Aplica-se uma carga $P = 10 \text{ kN}$ no ponto B. O sistema é aquecido até 75°C . Pede-se calcular o deslocamento do ponto B e o deslocamento do ponto C. Em cada caso indique o sentido do deslocamento (direita ou esquerda). Dados: $E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha = 12 \times 10^{-6} (\text{^{\circ}C})^{-1}$, e a área da seção transversal da barra vale $A = 5,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.



Roteiro:

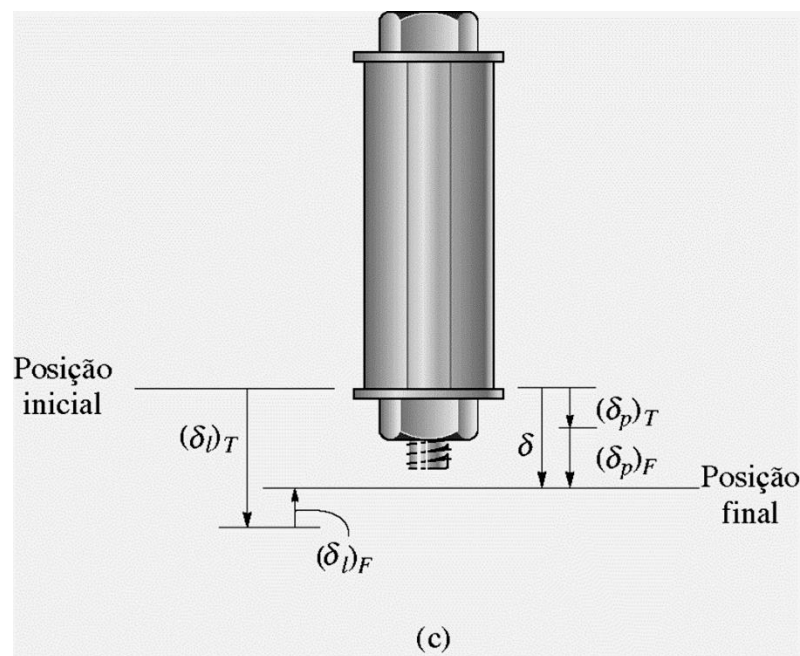
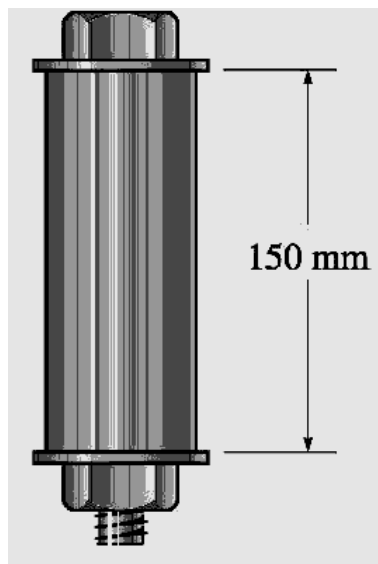
i) Diagrama de Corpo Livre e análise de equilíbrio.

iii) Princípio da superposição e determinação dos deslocamentos.

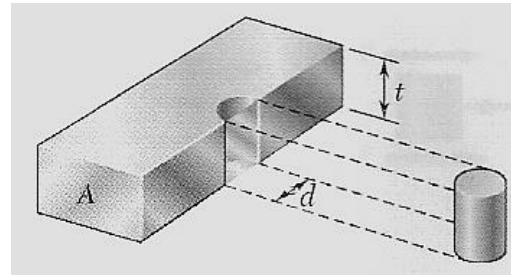
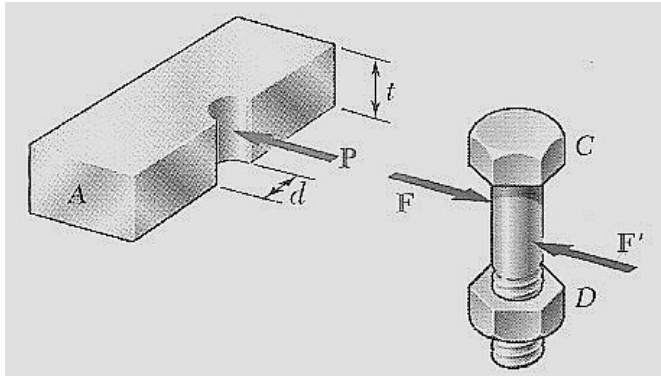
PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

- 8) Um tubo de alumínio com área da seção transversal de 600 mm^2 é usado como luva para um parafuso de aço com 400 mm^2 de área. À temperatura $T_1 = 15^\circ\text{C}$, a porca mantém o conjunto numa posição tal que a força no parafuso é desprezível. Se a temperatura aumenta para $T_2 = 80^\circ\text{C}$, qual é a tensão normal no parafuso e na luva?

Dados: $\alpha_{\text{Al}} = 12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_{\text{Aço}} = 23 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

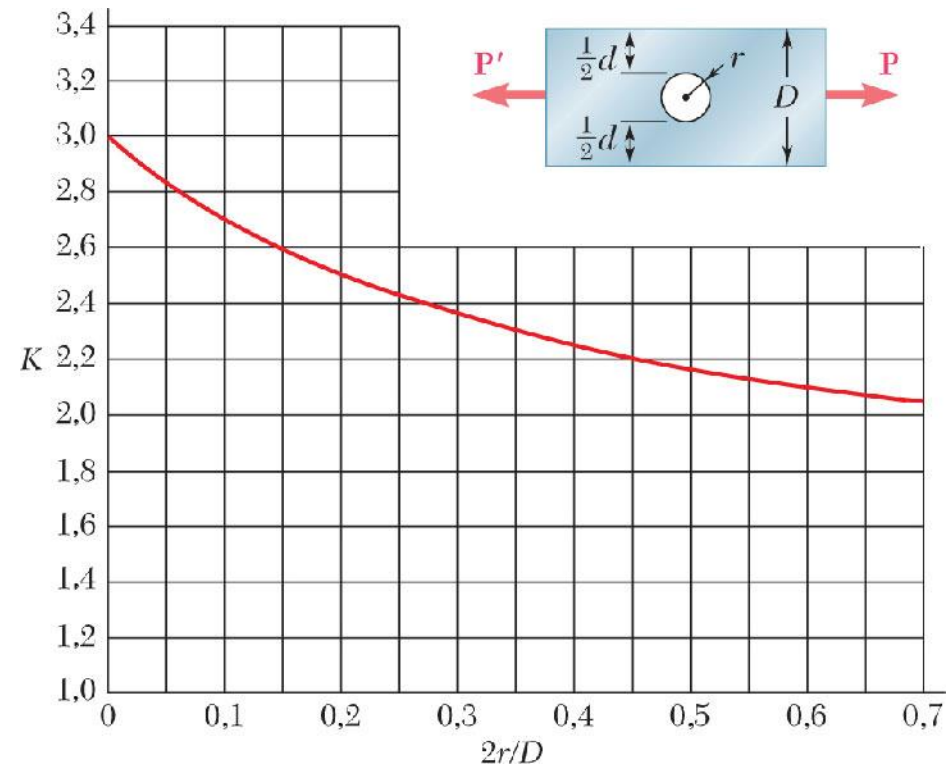
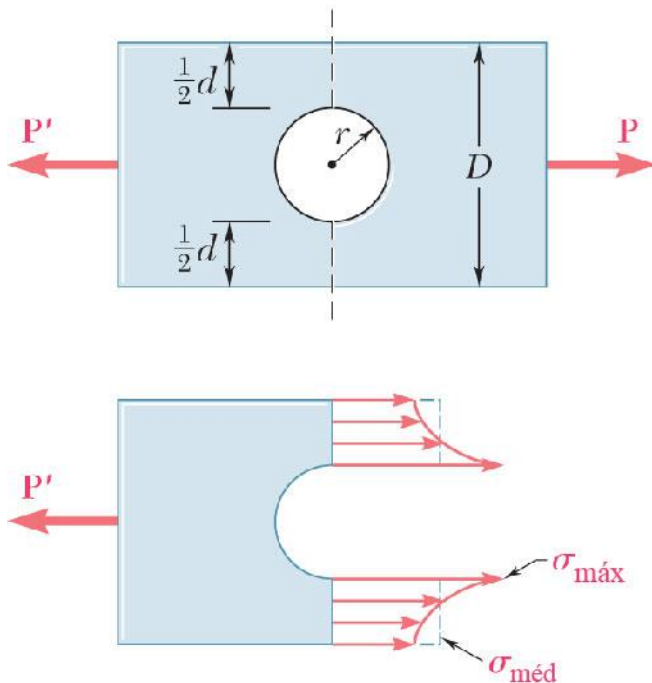


TENSÃO DE ESMAGAMENTO:



$$\sigma_e = \frac{P}{A_p} = \frac{P}{t \cdot d}$$

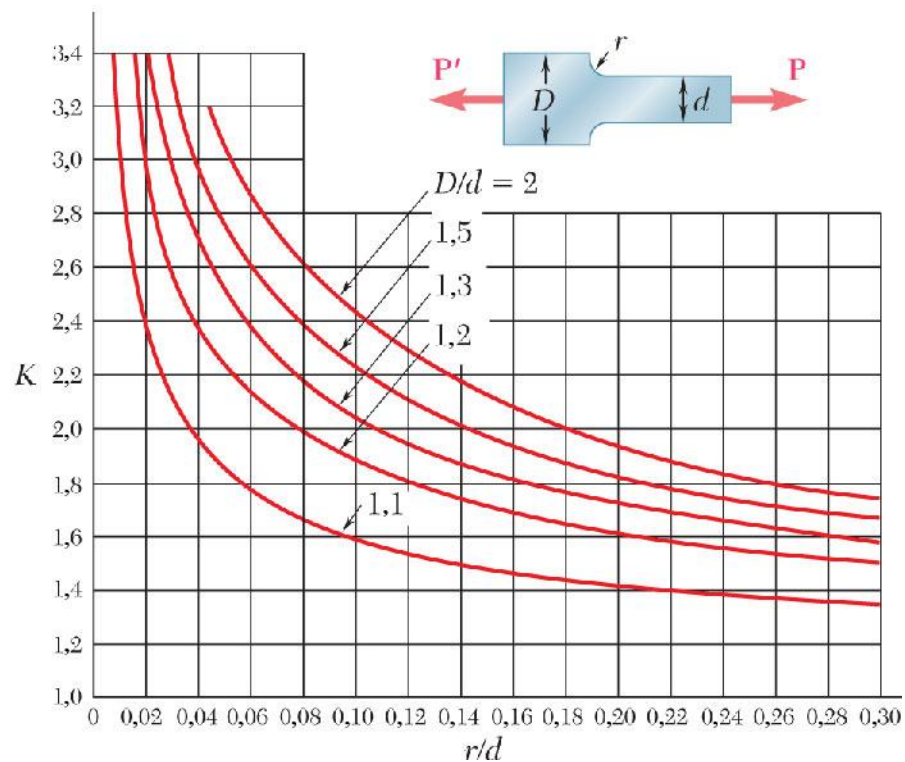
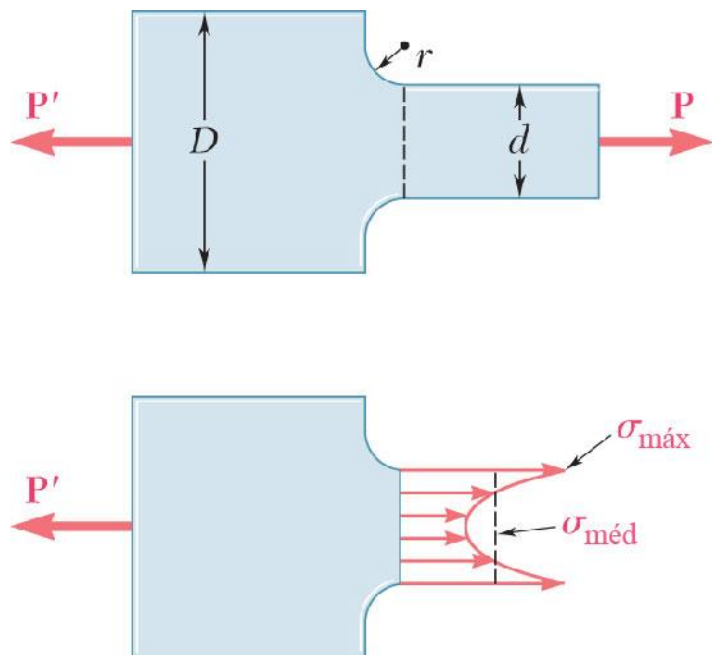
CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO: FURO



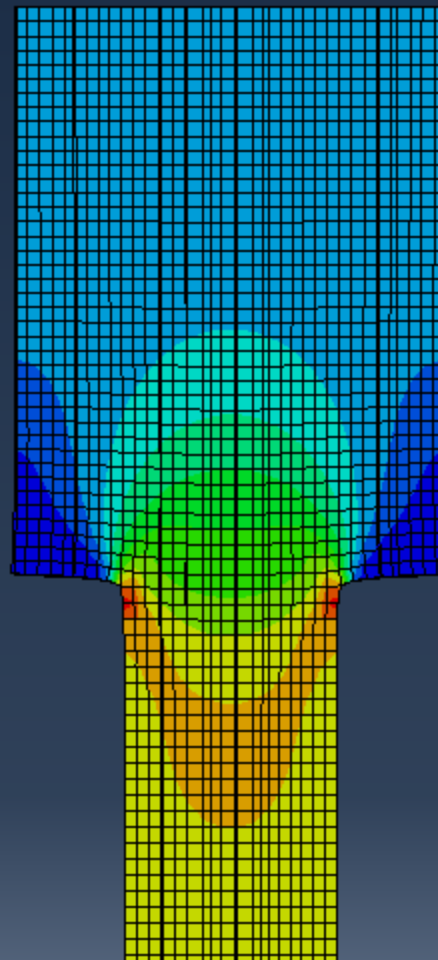
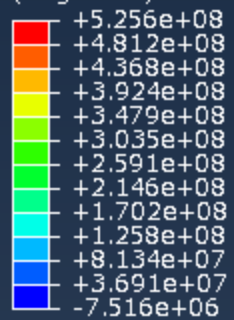
- Descontinuidade da seção transversal, podem ocorrer valores altos de tensões localizadas. Define-se o Fator de Concentração de Tensão.

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{méd}}}$$

CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO: ADOÇAMENTOS



S, S22
(Avg: 75%)

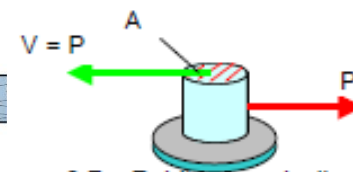
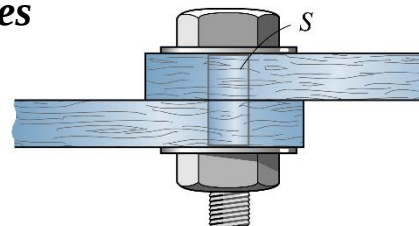
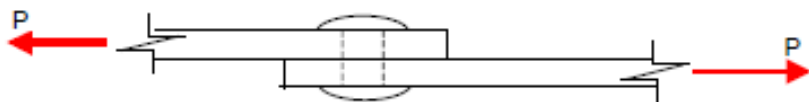


EXPANSÃO DO CONCEITO DE TENSÃO

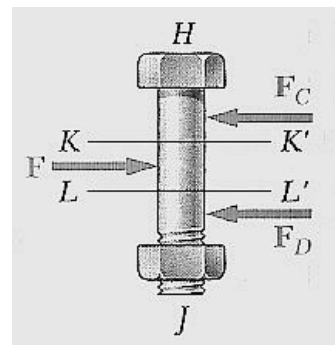
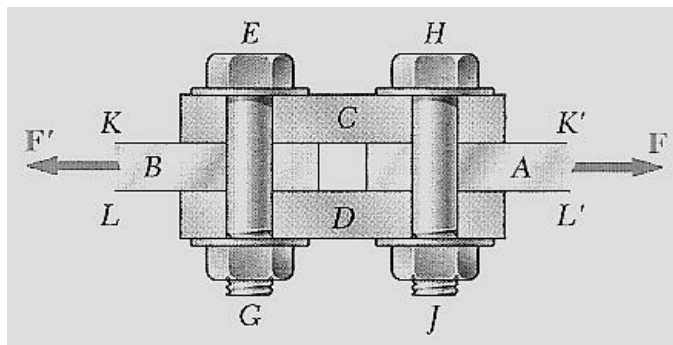
ALÉM DA TENSÃO NORMAL...

DEFINIMOS A TENSÃO DE CISALHAMENTO MÉDIA:

Corte Simples

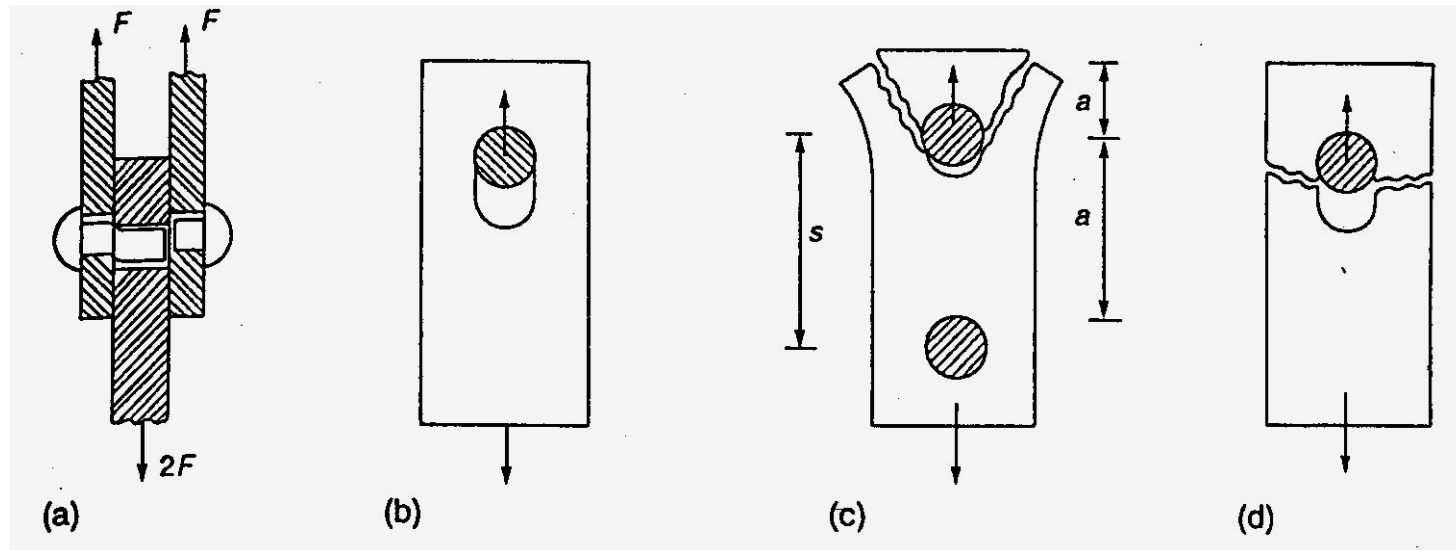


Corte Duplo



$$\tau = \frac{V}{A}$$

MODOS DE FALHA DE UMA BARRA ou CHAPA FIXADA POR PINO



- (a) Falha por cisalhamento do pino ou rebite
- (b) Falha por esmagamento
- (c) Falha por rasgamento
- (d) Falha por tração na seção líquida

Exercícios adicionais para parte 1

- Referência principal: [1] Beer F.P., Johnston E.R.Jr., De Wolf, J.T., Resistência dos Materiais, Mecânica dos Materiais, McGraw-Hill, 4ª Ed., S.P., 2006
- Alternativa: [2] Beer F.P., Johnston E.R.Jr., Resistência dos Materiais, Pearson Ed. do Brasil, 3ª Ed., S.P., 2006
-
- **Tração/Compressão - Problemas Isostáticos**
- [1] Cap. 1, p. 15: **1.1, 1.2, 1.3, 1.4** - [2] Cap. 1, pp. 20-21: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4
- **Tração/Compressão - Problemas Hiperestáticos**
- [1] Cap. 2, pp. 71-72: **2.33, 2.35, 2.37, 2.39, 2.40** - [2] Cap. 2, pp. 115-117: 2.36, 2.35, 2.33, 2.38, 2.39
- **Tração/Compressão - Problemas de Termoelasticidade**
- [1] Cap. 2, pp. 77-75: **2.53, 2.55, 2.56** - [2] Cap. 2, pp. 122-123: 2.57, 2.63, 2.58
- **Cisalhamento**
- [1] Cap. 1, p. 17: **1.15, 1.16, 1.17**; p. 28: **1.29, 1.30, 1.31, 1.32**; p. 36: **1.62**
- [2] Cap. 1, p. 27: 1.25, 1.26, 1.27; pp. 46-47: 1.35, 1.36, 1.37, 1.38; p. 60: 1.62