



LOM 3081 - Introdução à Mecânica dos Sólidos

Parte 2. Estado plano de tensão. Tensões em tubos e vasos de pressão de parede fina

DEMAR – EEL – USP

Professores responsáveis: Viktor Pastoukhov, Carlos A.R.P. Baptista

Ref. 1: F.P. BEER, E.R. JOHNSTON, J.T. DeWOLF. Resistência dos Materiais. São Paulo: McGraw Hill. 4a Ed., 2006, 758p.

Ref. 2: J.M. GERE. Mecânica dos Materiais. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003, 698p.

Para uma barra delgada submetida a uma carga axial:

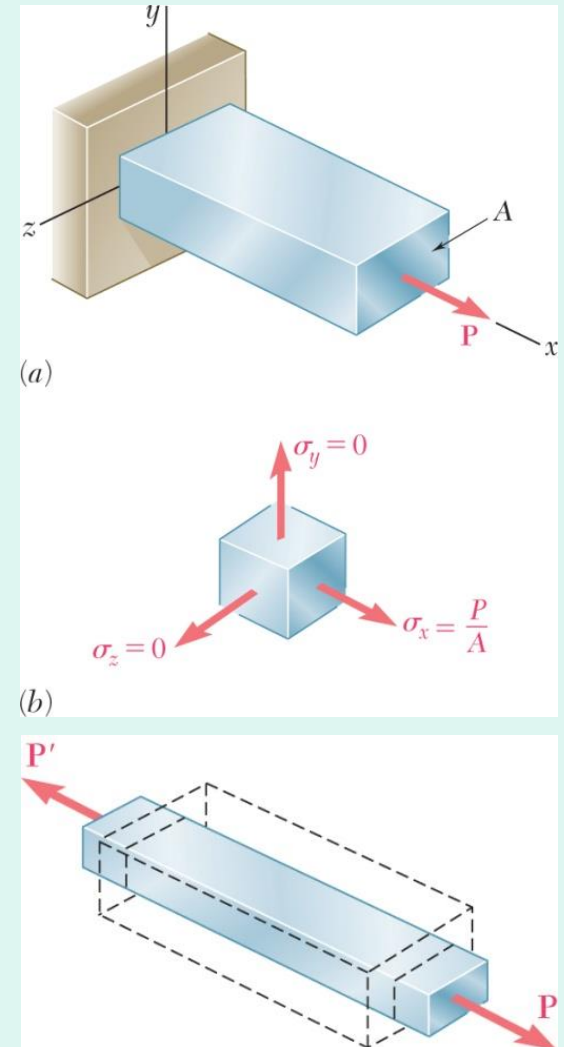
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

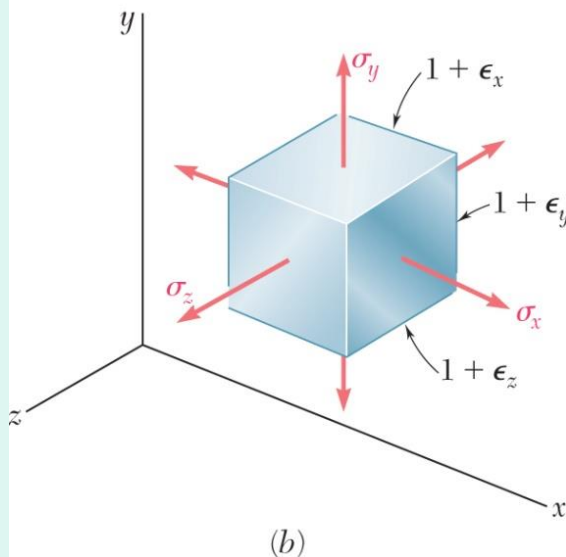
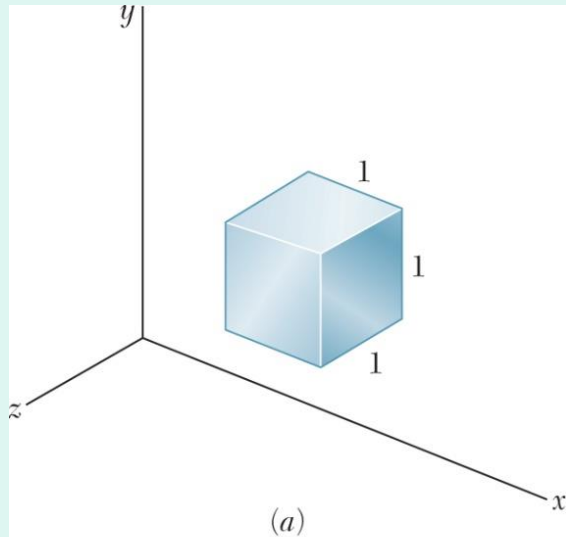
a deformação produzida na direção x da força é acompanhada por uma contração em qualquer direção transversal. Supondo que o material é isotrópico (sem dependência direcional),

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

Coeficiente de Poisson é definido como

$$\nu = \left| \frac{\text{deformação específica lateral}}{\text{deformação específica axial}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$





Para um componente sujeito a carregamento multiaxial, os elementos de tensão normais resultantes de componentes de tensão podem ser determinados a partir do *princípio da sobreposição*. Isto requer:

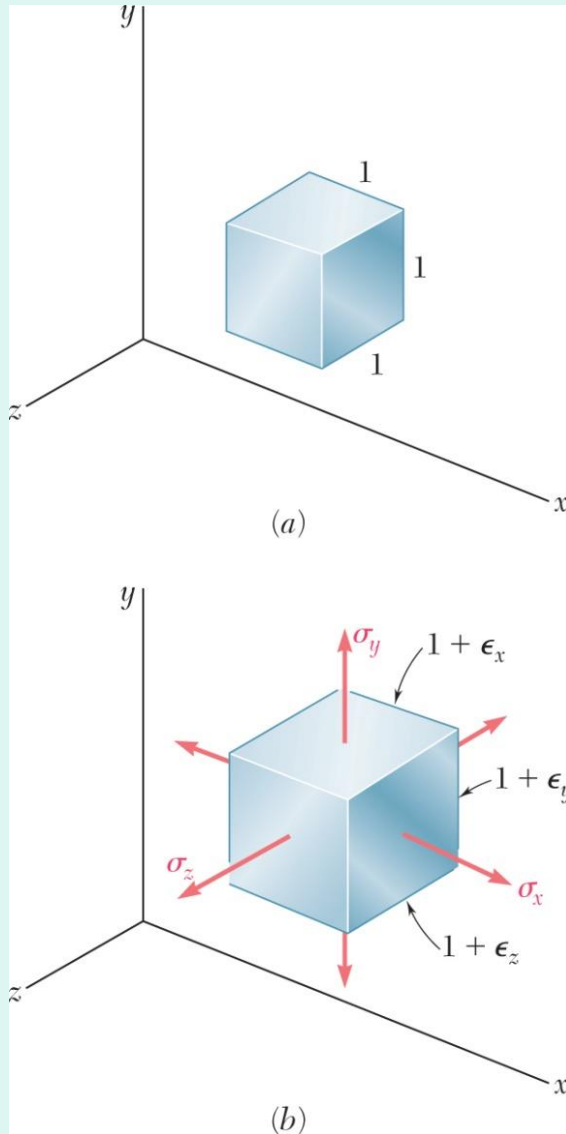
- 1) Cada efeito está linearmente relacionado com a força que o produz.
- 2) A deformação é pequena.

Com estas restrições:

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$



Em relação ao estado livre de tensões, a variação de volume é

$$e = -1 + \left[(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \right] \approx -1 + [1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]$$

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$= \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

= dilatação (mudança de volume por unidade)

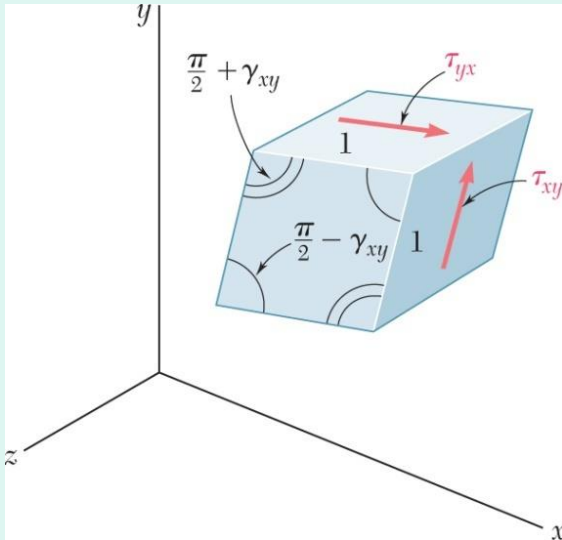
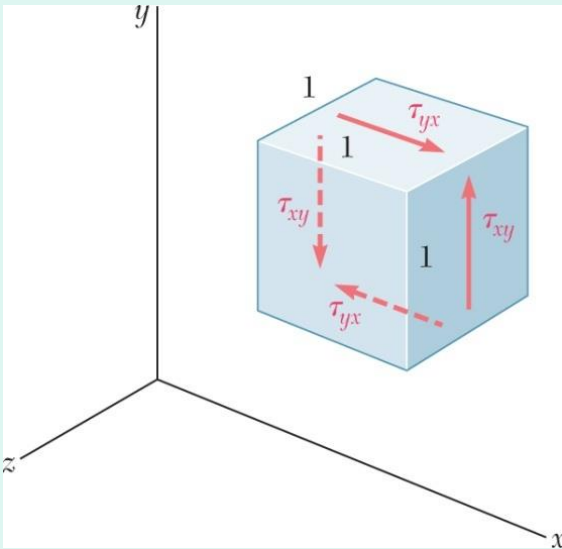
Para elemento submetido a uma pressão hidrostática constante

$$e = -p \frac{3(1 - 2\nu)}{E} = -\frac{p}{k}$$

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \text{módulo volumétrico}$$

Sob pressão uniforme, a dilatação deve ser negativa, portanto

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$



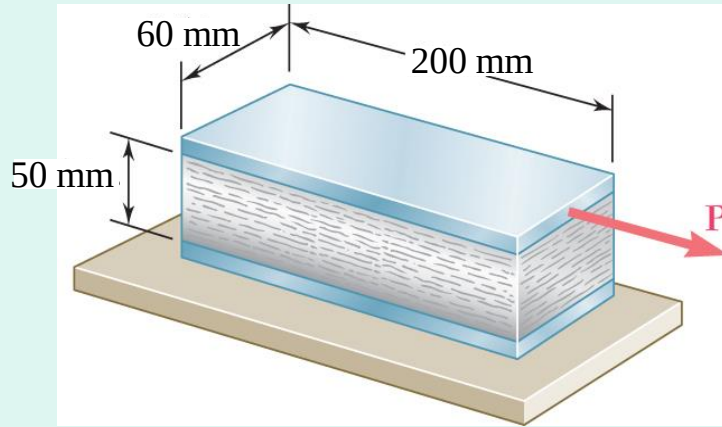
Um elemento cúbico submetido a uma tensão de cisalhamento irá deformar em um romboide. A deformação de cisalhamento correspondente é quantificada em termos de variação do ângulo entre os lados,

$$\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$$

Um gráfico de tensão de cisalhamento vs deformação de cisalhamento é similar ao dos gráficos anteriores de tensão normal *versus* tensão normal, exceto que os valores de resistência são aproximadamente metade. Para pequenas deformações,

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

Onde G é denominada *módulo de cisalhamento* ou *módulo transversal de elasticidade*



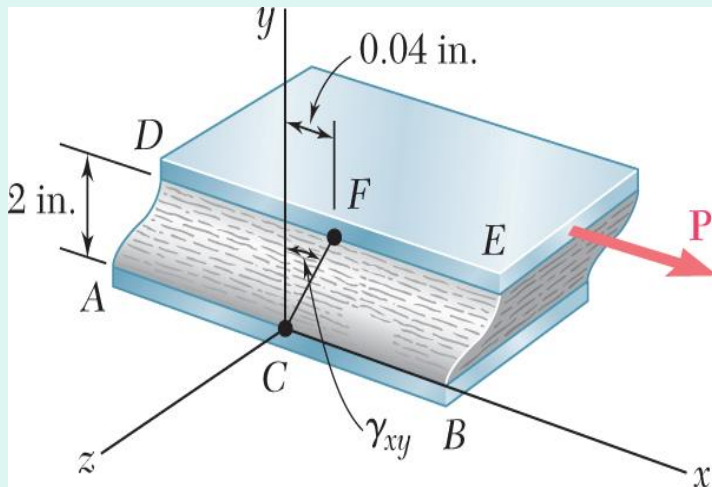
Um bloco retangular de um material com um módulo de elasticidade transversal $G = 620 \text{ MPa}$ é colado a duas placas rígidas horizontais. A placa inferior é fixa, enquanto a placa superior está submetida a uma força horizontal P (Fig. 9.45). Sabendo que a placa superior se desloca 1 mm sob a ação da força, determine (a) a deformação de cisalhamento média no material e (b) a força P que atua na placa superior.

SOLUÇÃO:

Determinar a deformação angular média ou tensão de cisalhamento do bloco.

Aplicar a lei de Hooke para a relação de estresse e tensão para encontrar a tensão de cisalhamento correspondente.

Utilizar a definição de tensão de cisalhamento para encontrar a força P .



Determinar a deformação angular média ou tensão de cisalhamento do bloco.

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{1 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \quad \gamma_{xy} = 0,020 \text{ rad}$$

Aplicar a lei de Hooke para a tosquia de estresse e tensão para encontrar a tensão de cisalhamento correspondente.

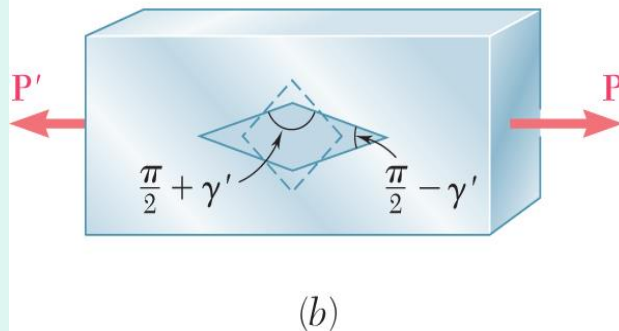
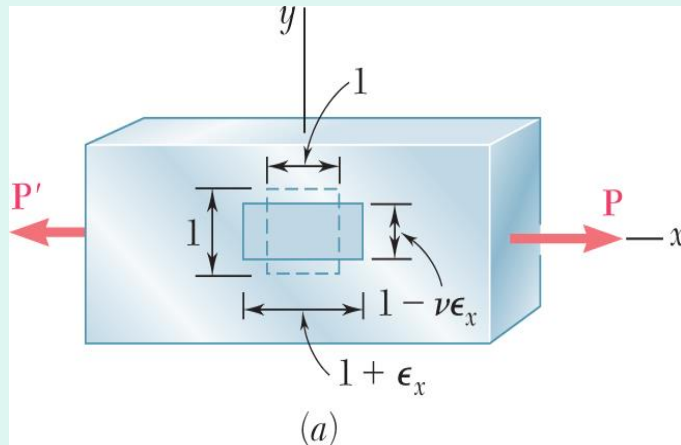
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (620 \text{ MPa})(0,020 \text{ rad}) = 12,4 \text{ MPa}$$

Utilizar a definição de tensão de cisalhamento para encontrar a força **P**.

$$P = \tau_{xy} A = (12,4 \text{ MPa})(200 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 148,8 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 148,8 \text{ kN}$$

LEI DE HOOKE: RELAÇÕES ENTRE CONSTANTES DO MATERIAL



Uma barra delgada submetida a uma força de tração axial se alongará na direção x e se contrairá nas direções transversais.

Um elemento na forma de um cubo com lado de comprimento unitário e orientado conforme mostra a figura se deformará, transformando-se em um paralelepípedo retangular. Uma carga axial provoca tensões normais.

Se o elemento cúbico é orientado como na figura inferior, irá deformar-se para um losango.

Força axial também resulta em uma deformação de cisalhamento.

Componentes de tensão normal e de cisalhamento são relacionadas,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

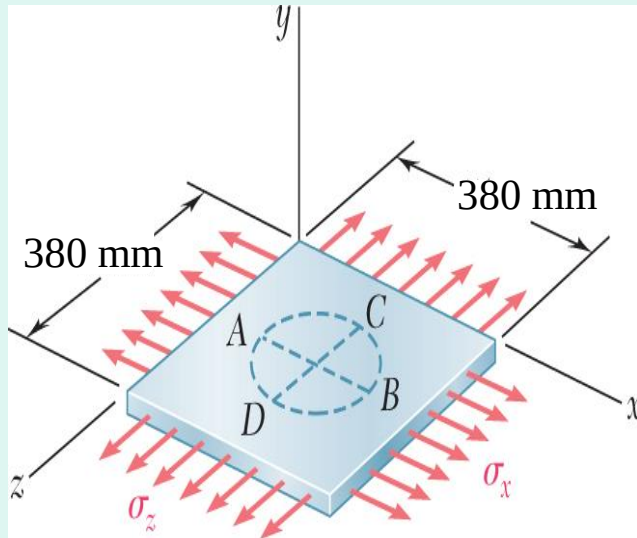
$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$



Um círculo de diâmetro $d = 220$ mm é desenhado em uma placa de alumínio livre de tensões de espessura $t = 19$ mm. Forças que atuam posteriormente no plano da placa provocam tensões normais $\sigma_x = 82$ MPa e $\sigma_z = 138$ MPa.

Para $E = 69$ GPa e $\nu = \frac{1}{3}$, determine a variação:

- do comprimento do diâmetro AB
- do comprimento do diâmetro CD
- da espessura da placa
- do volume da placa.

SOLUÇÃO:

Aplicar a Lei de Hooke generalizada para encontrar três componentes da tensão normal.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{69 \times 10^3 \text{ MPa}} \left[(82 \text{ MPa}) - 0 - \frac{1}{3}(138 \text{ MPa}) \right] \\ &= +0,522 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{69 \times 10^3 \text{ MPa}} \left[-\frac{1}{3}(82 \text{ MPa}) + 0 - \frac{1}{3}(138 \text{ MPa}) \right] \\ &= -1,063 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{69 \times 10^3 \text{ MPa}} \left[-\frac{1}{3}(82 \text{ MPa}) - 0 + (138 \text{ MPa}) \right] \\ &= +1,604 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

Avaliar os componentes de deformação.

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (+0,522 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(220 \text{ mm})$$

$$\delta_{B/A} = +0,114 \text{ mm}$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (+1,604 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(220 \text{ mm})$$

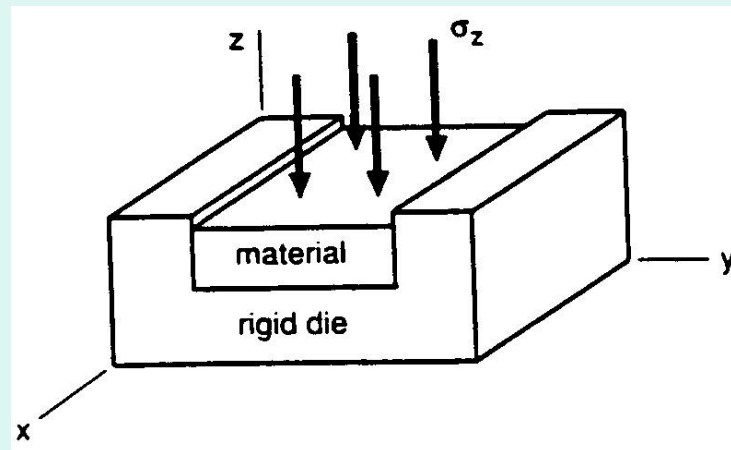
$$\delta_{C/D} = +0,353 \text{ mm}$$

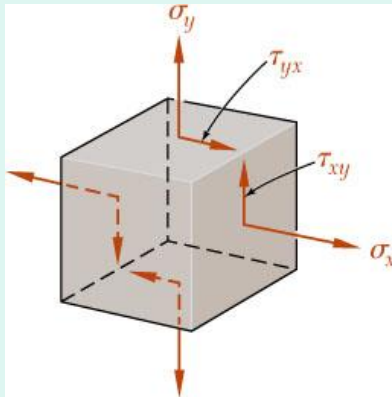
$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1,063 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(19 \text{ mm})$$

$$\delta_t = -0,020 \text{ mm}$$

Uma amostra, submetida à tensão compressiva na direção z , está confinada de modo que não pode se deformar na direção y , mas a deformação na direção x é permitida. Considerando que o material exibe comportamento linear elástico, determine:

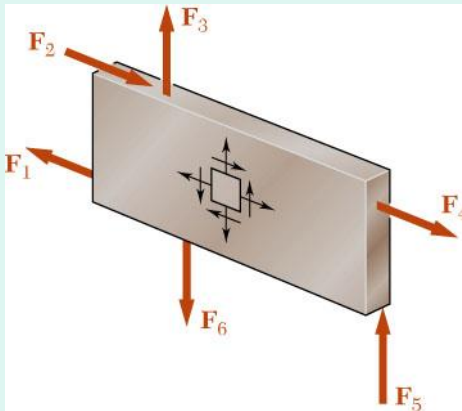
- a) a tensão na direção y ;
- b) a deformação na direção z ;
- c) a deformação na direção x .



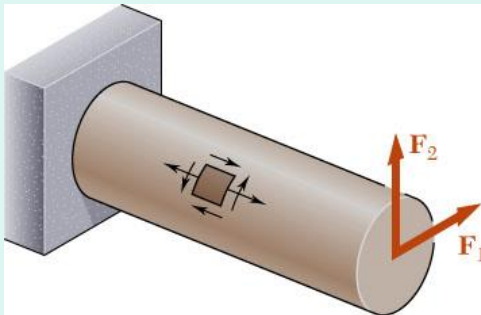


Estado plano de tensão - estado de tensão em que duas faces do elemento de volume estão livres de qualquer tensão. Para o exemplo ilustrado, o estado de tensão é definido por

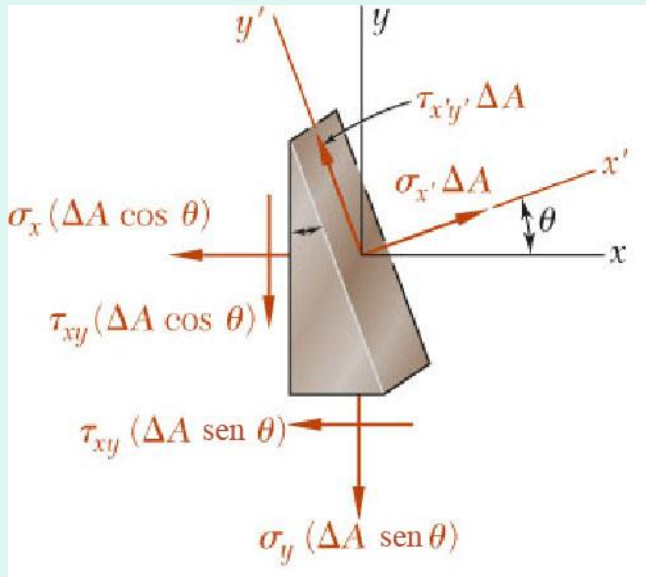
$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$



Estado plano de tensão ocorre em uma placa fina submetida a forças que atuam no plano médio da espessura da placa.



Estado plano de tensão também ocorre na superfície livre de um elemento estrutural ou componente de máquina, ou seja, em qualquer ponto da superfície que não esteja submetido a uma força externa.



Considerando condições de equilíbrio de um elemento prismático com faces perpendicular aos eixos x , y , e x' .

$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

$$\sum F_y = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta$$

Isolando componentes de tensão no sistema $x'y'$:

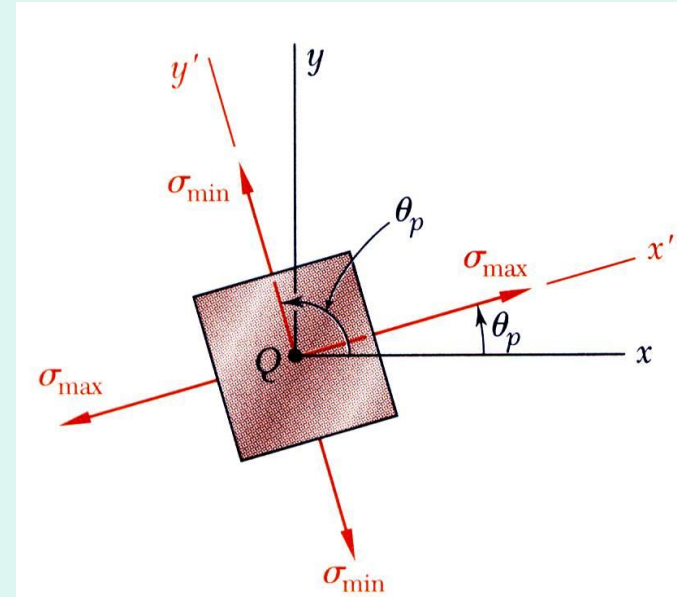
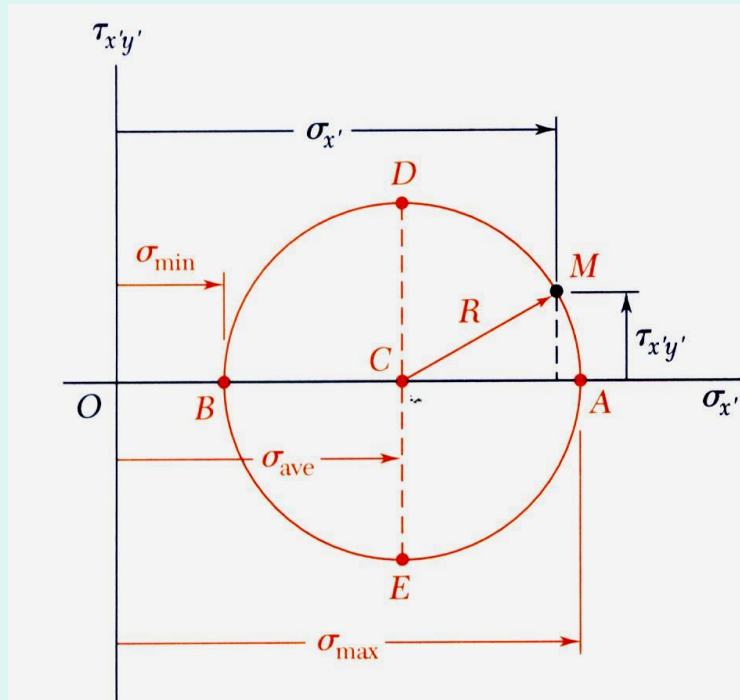
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Obs.: tensão normal ao eixo y' pode ser obtida a partir do resultado para x' incrementando ângulo θ em $\pi/2$

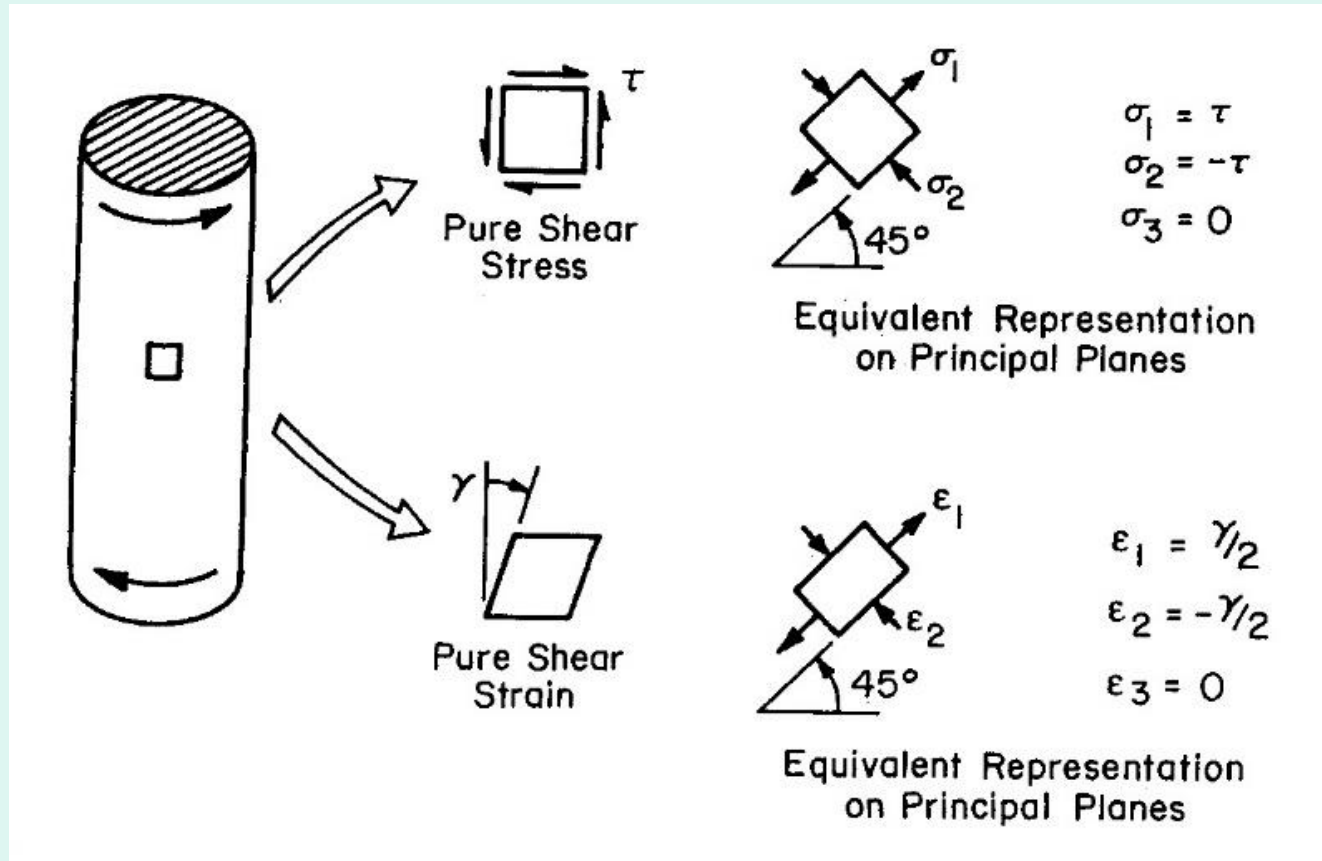
TENSÕES PRINCIPAIS E O CÍRCULO DE MOHR



$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Nota: define dois ângulos separados de 90°



$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

EXEMPLO

Para o estado de tensão mostrado, determine: (a) os planos principais, (b) as tensões principais, (c) a tensão máxima de cisalhamento e as correspondentes tensões normais.

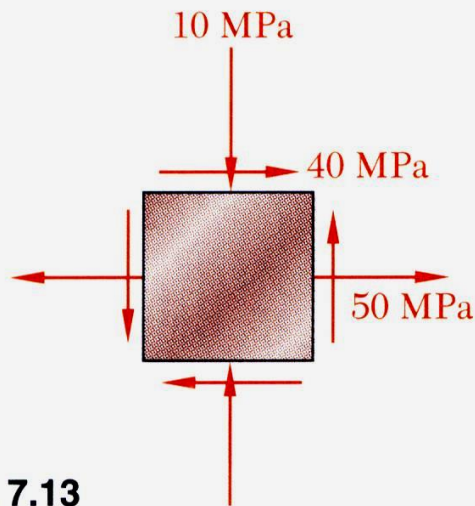


Fig. 7.13

SOLUÇÃO:

- Orientação dos planos principais:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Tensões principais:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Tensão máxima de cisalhamento

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

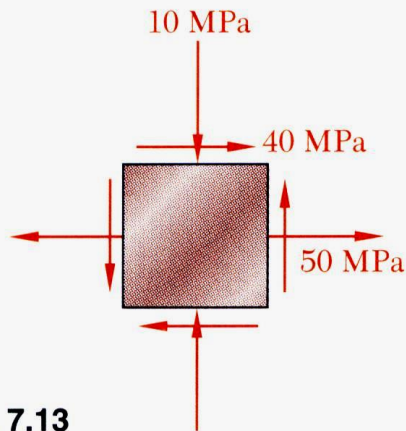


Fig. 7.13

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

SOLUÇÃO:

- Orientação dos planos principais:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = 1.333$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ, 233.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ, 116.6^\circ$$

- Tensões principais:

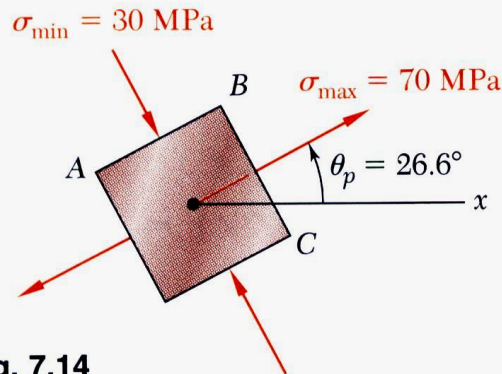


Fig. 7.14

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\max} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -30 \text{ MPa}$$

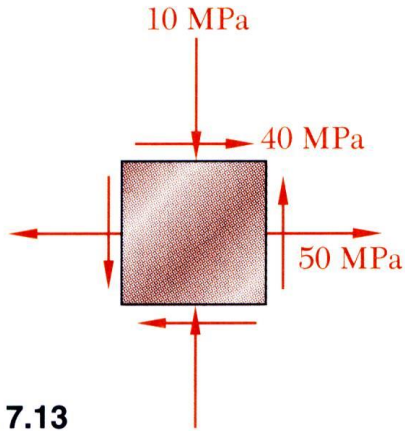


Fig. 7.13

$$\begin{aligned}\sigma_x &= +50 \text{ MPa} & \tau_{xy} &= +40 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -10 \text{ MPa}\end{aligned}$$

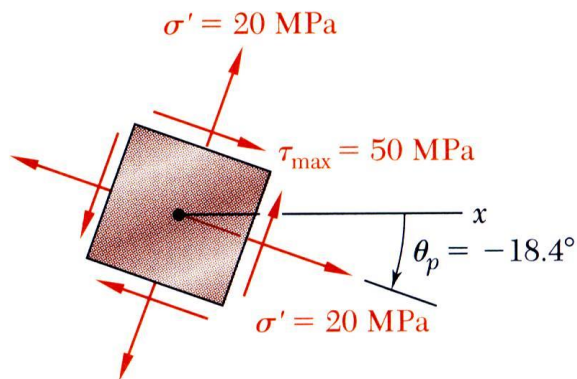


Fig. 7.16

- Tensão máxima de cisalhamento

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(30)^2 + (40)^2}\end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ$$

$$\theta_s = -18.4^\circ, 71.6^\circ$$

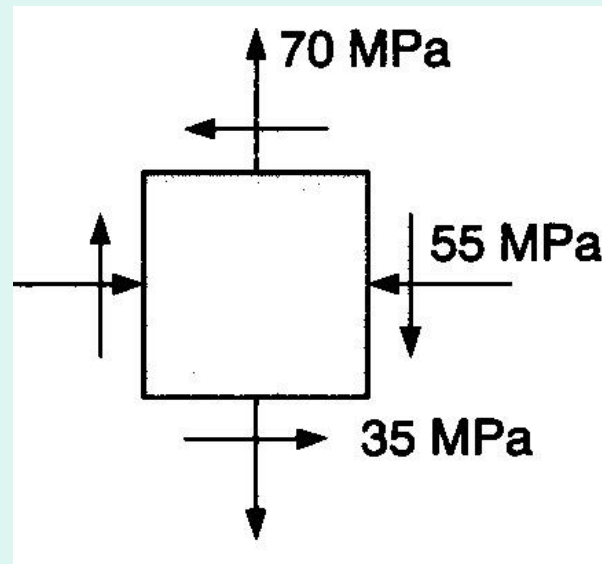
- A correspondente tensão normal

$$\sigma' = \sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2}$$

$$\sigma' = 20 \text{ MPa}$$

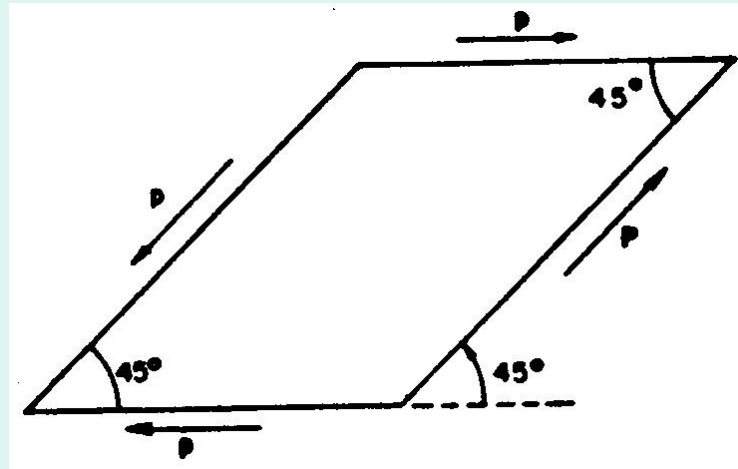
EXERCÍCIOS

1) Um ponto na superfície de um sólido em equilíbrio está sob o estado de tensões indicado na figura. Determine as tensões principais e os planos de corte principais, a máxima tensão de cisalhamento e o correspondente valor da tensão normal. Represente graficamente o estado de tensão em um círculo de Mohr. Responda ainda: qual o valor da tensão cisalhante nos planos de corte em que a tensão normal é nula?



EXERCÍCIOS

- 2) Para o estado de tensão indicado na figura, sendo $p = 50$ MPa, calcule as tensões principais e indique os cortes onde elas ocorrem.

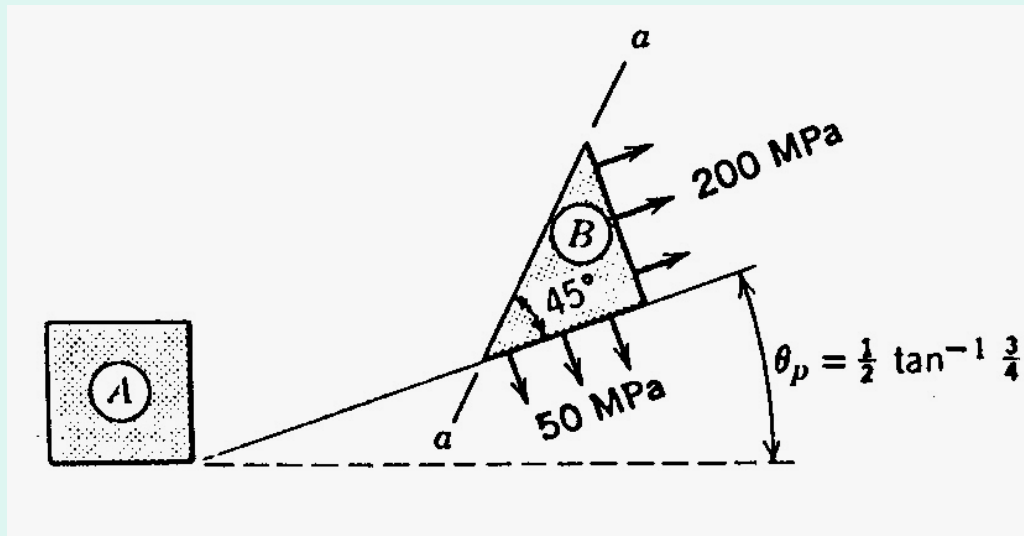


EXERCÍCIOS

3) As tensões principais de um ponto sob tensão plana estão mostradas no bloco **B** da figura.

Pede-se:

- i) Calcule as componentes de tensão no plano *a-a* do bloco **B**.
- ii) Calcule as tensões nos planos horizontal e vertical do bloco **A**.

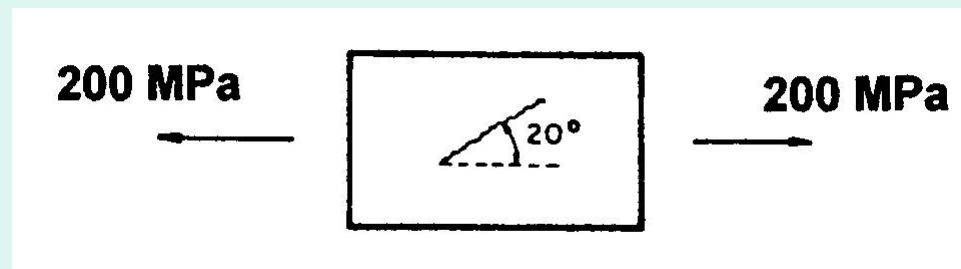


EXERCÍCIOS

4) Em uma chapa cujo estado de tensão é dado pela figura, descobriu-se uma trinca, conforme indicado, comprometendo a integridade da estrutura. Considerando que não são admitidas solicitações de tração nem de cisalhamento no plano da trinca, foram propostas duas soluções para que a trinca não afete a estrutura:

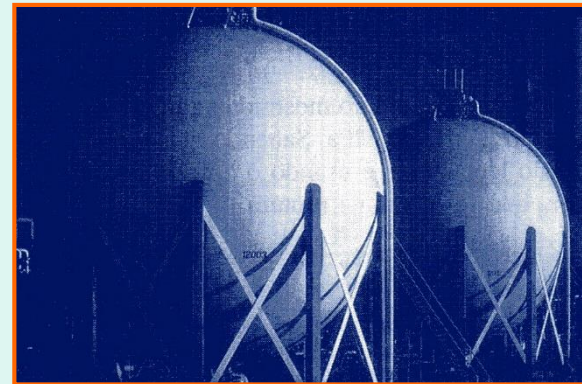
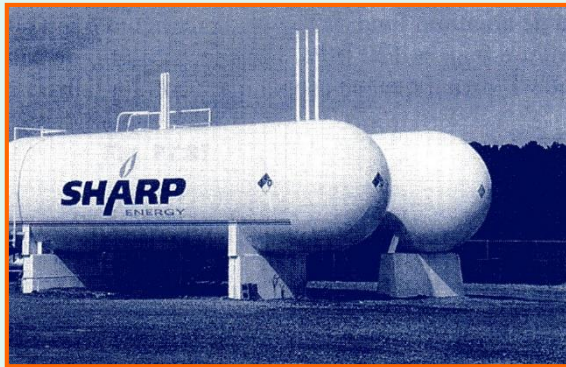
- i) o acréscimo de uma tensão de compressão na direção perpendicular à da tensão dada;
- ii) o acréscimo de uma tensão de cisalhamento na chapa.

Discuta a validade de cada proposta e calcule o valor da tensão que deve ser acrescentada ao estado de tensão original .



TENSÕES EM VASOS DE PRESSÃO DE PAREDE FINA

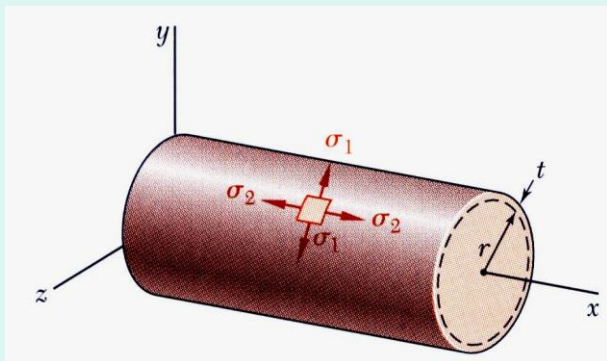
- Vasos de pressão são exemplos de aplicação do estado plano de tensões.
- Exemplos: Recipientes cilíndricos e esféricos



- Empregados como: Tanques de armazenamento de gás, caldeiras, tanque de ar comprimido, reservatórios de líquidos, oleodutos.
- Definição: Vasos de pressão de paredes finas:

$$\frac{t}{r} < 0,1 \Rightarrow \text{tensões uniformes}$$

(onde: t = espessura da parede; r = raio interno)



TUBO PRESSURIZADO DE PAREDE FINA

- Tensões num ponto qualquer:

σ_1 = tensão circunferencial

σ_2 = tensão longitudinal

- Tensão circunferencial:

$$\sum F_z = 0 = \sigma_1(2t \Delta x) - p(2r \Delta x)$$

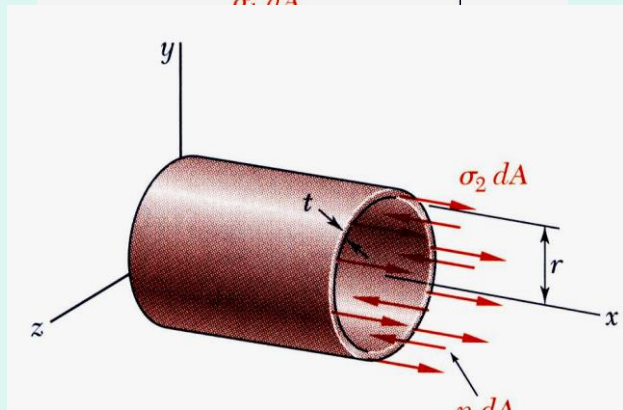
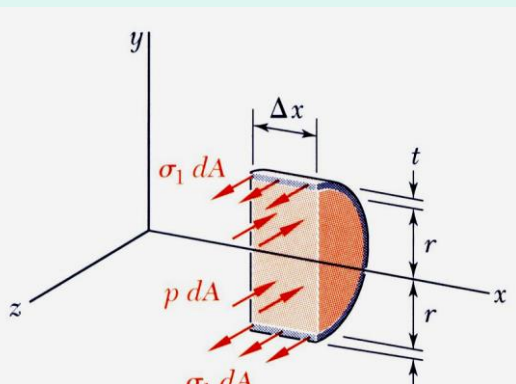
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

- Tensão Longitudinal:

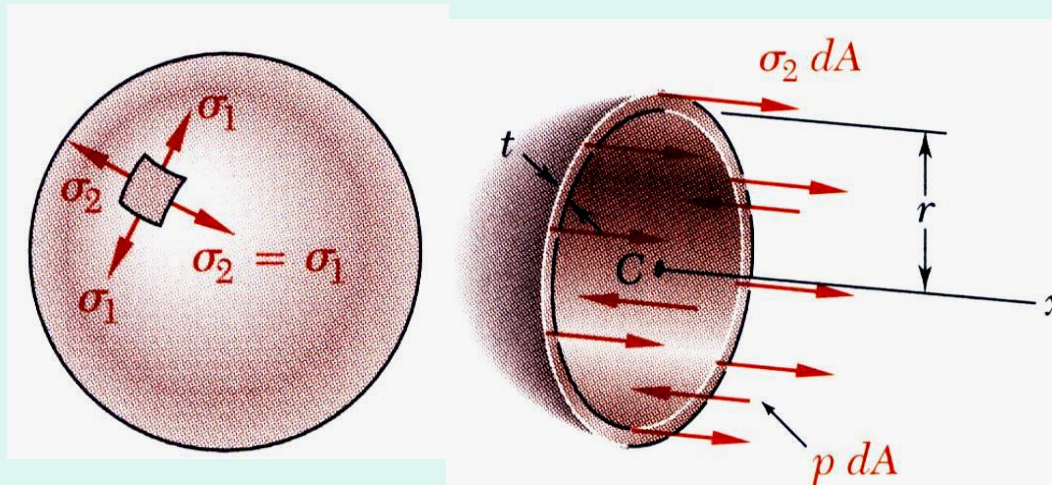
$$\sum F_x = 0 = \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2)$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$



VASO DE PRESSÃO ESFÉRICO



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

- O círculo de Mohr para transformações no plano das tensões reduz-se a um ponto.

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \text{constante}$$

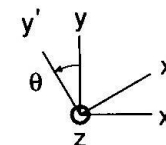
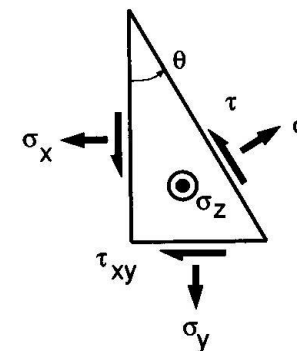
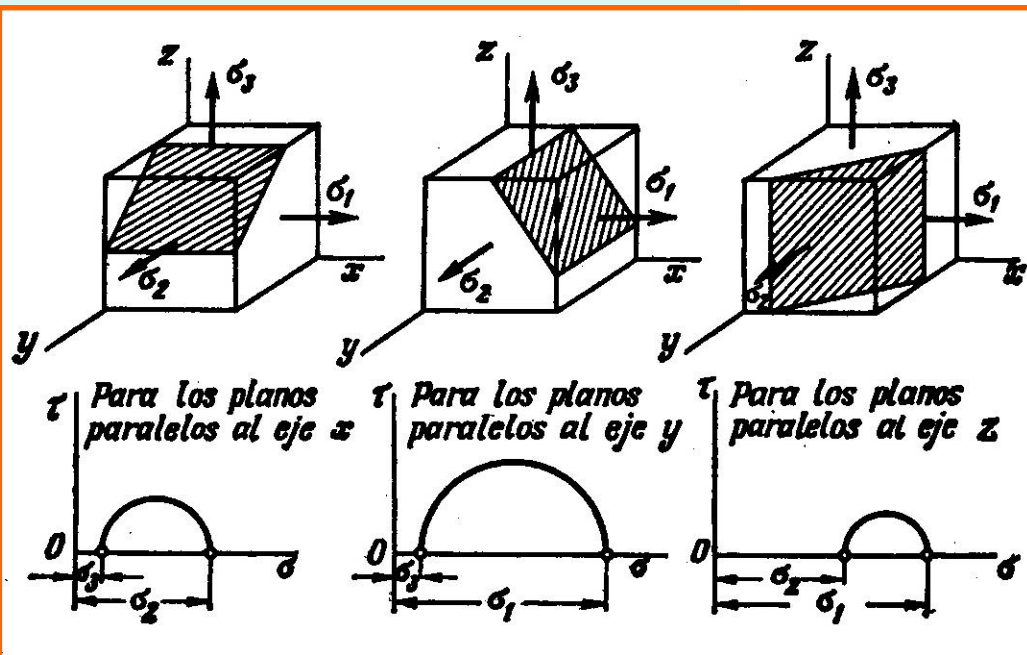
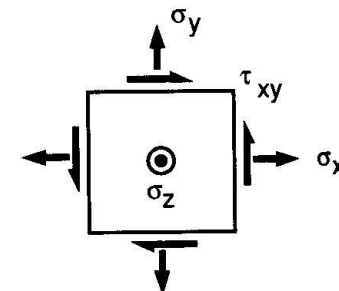
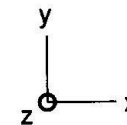
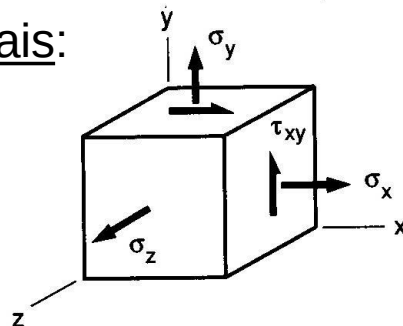
$$\tau_{\max(\text{plane})} = 0$$

(Obs.: Posteriormente será vista a reconsideração desses casos como estado tridimensional de tensão)

CÍRCULO DE MOHR PARA 3 DIMENSÕES

Planos paralelos aos eixos principais:

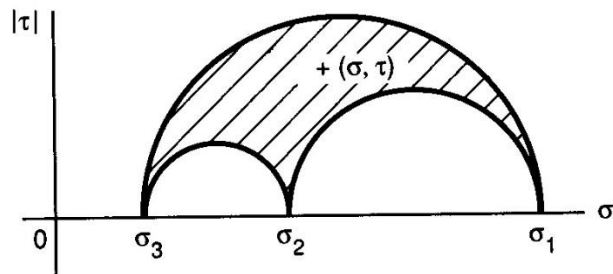
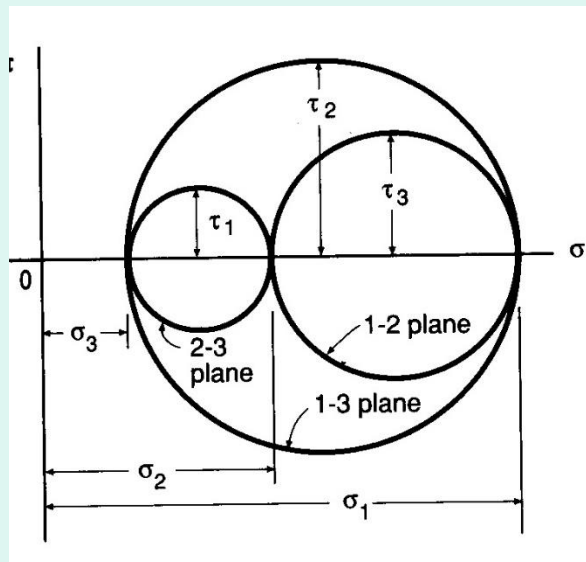
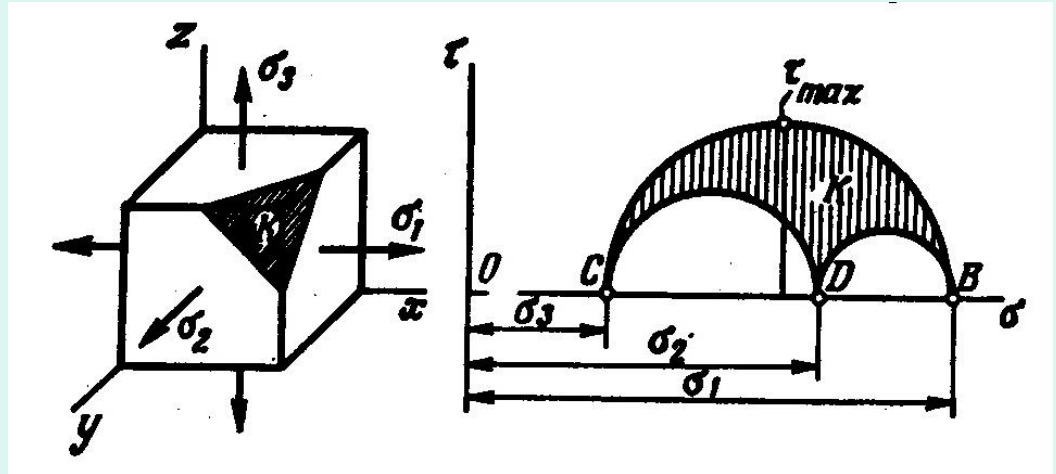
O equilíbrio no plano XY não se altera quando a tensão normal em Z é diferente de zero.



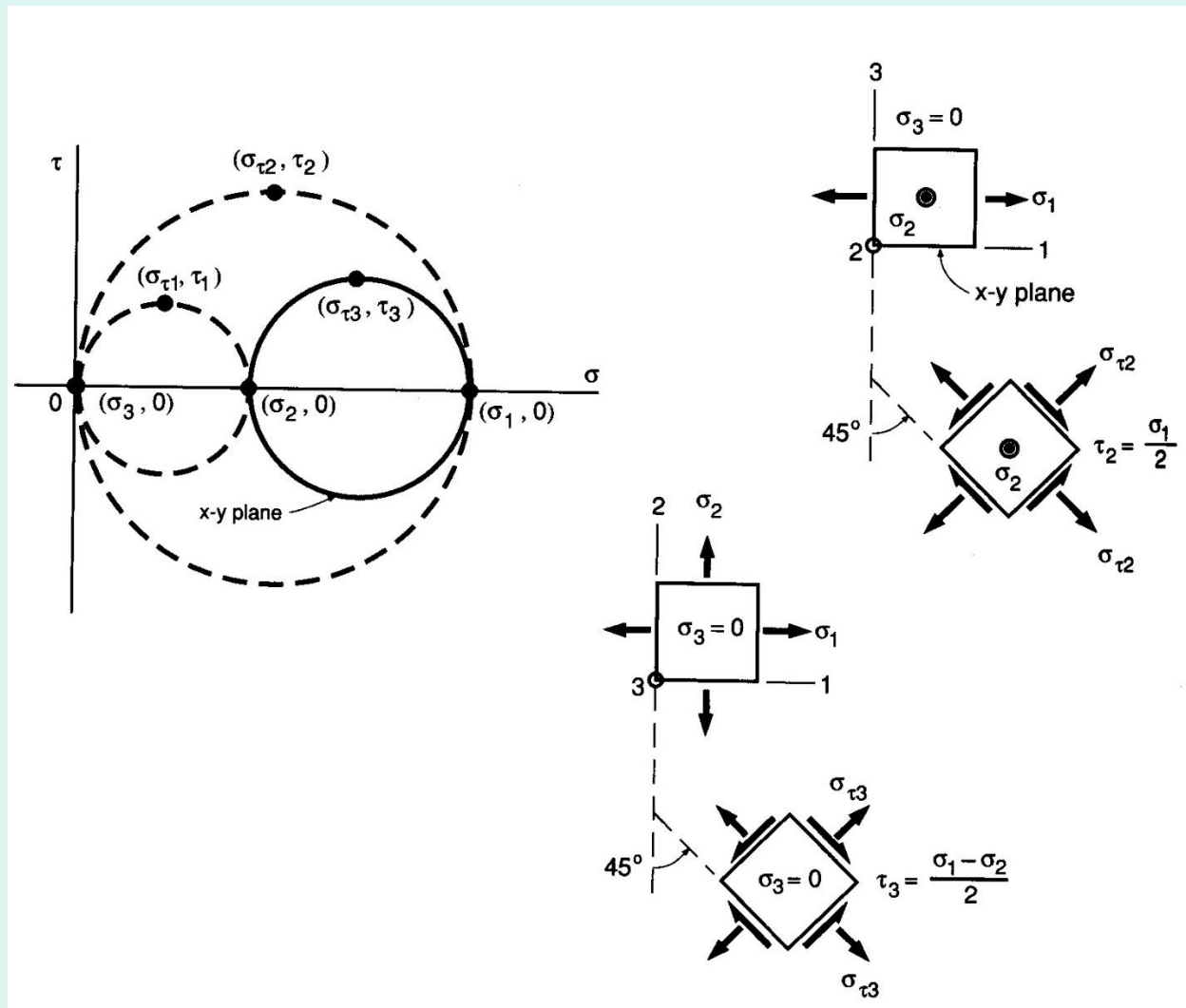
← Fazendo os eixos X, Y, Z coincidirem com as direções principais

CÍRCULO DE MOHR PARA 3 DIMENSÕES

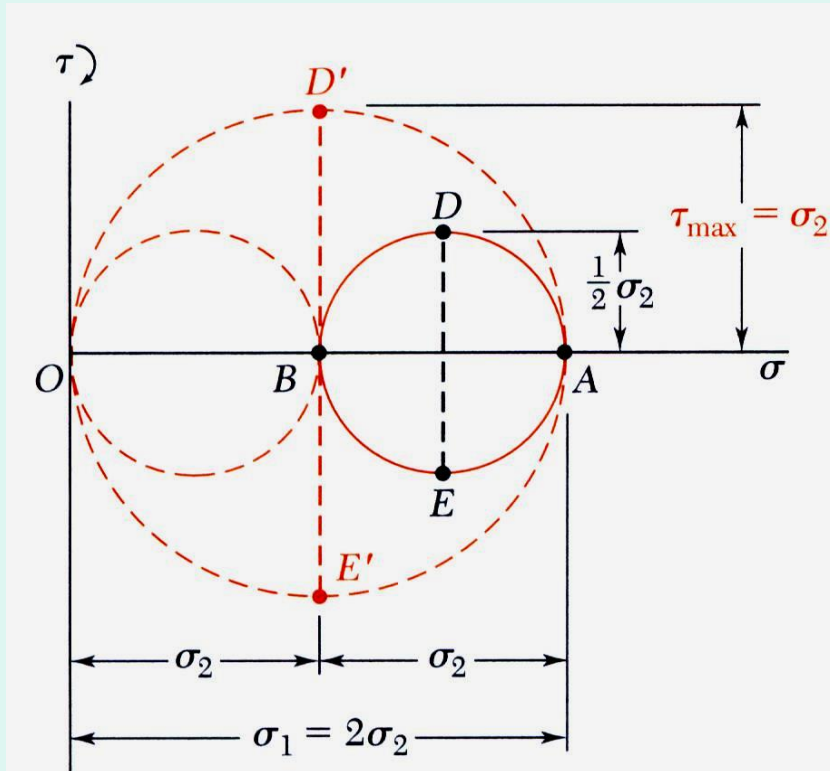
Plano de inclinação arbitrária:



CASO PLANO RECONSIDERADO COMO TRIDIMENSIONAL



EXEMPLO: TUBO DE PAREDE FINA



- Os pontos A e B correspondem, respectivamente, à tensão tangencial σ_1 , e tensão longitudinal, σ_2

- Máxima tensão de cisalhamento no plano das tensões:

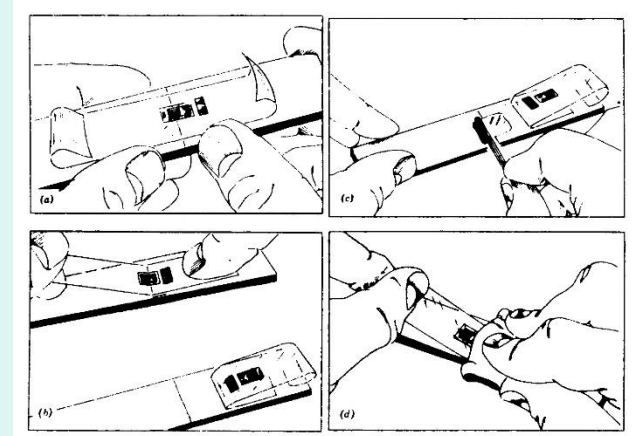
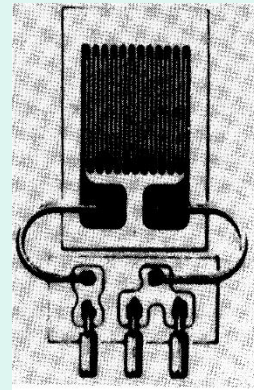
$$\tau_{\max(\text{plano})} = \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{pr}{4t}$$

- Máxima tensão de cisalhamento ocorre em um plano a 45° em torno do eixo longitudinal

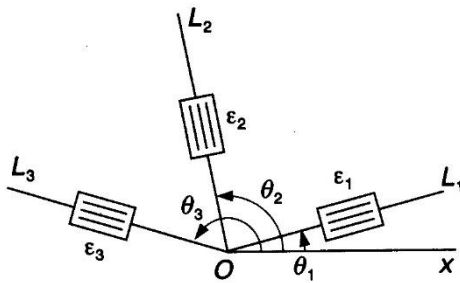
$$\tau_{\max} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

Extensômetro Elétrico de Resistência



Rosetas



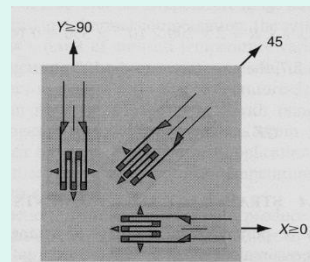
$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$

14

Roseta Retangular



$$\epsilon_{1,2} = \frac{(\epsilon_x + \epsilon_y)}{2} + / - \frac{\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}}{2}$$

$$\tan 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{45} - \epsilon_x - \epsilon_y$$

Exercícios adicionais para parte 2

- Referência principal:
- [1] Beer F.P., Johnston E.R.Jr., De Wolf, J.T., Resistência dos Materiais, Mecânica dos Materiais, McGraw-Hill, 4ª Ed., S.P., 2006
- p. 91-95: **2.61-2.82**;
- p. 421-423: **7.1-7.30**;
- p. 432-434: **7.31-7.65**
- p. 453, **Problema resolvido 7.5**; p. 454-457: **7.98-7.125**

- Alternativa:
- [2] Beer F.P., Johnston E.R.Jr., Resistência dos Materiais, Pearson Ed. do Brasil, 3ª Ed., S.P., 2006
- p. 144-150: **2.66-2.87**;
- p. 607-613: **6.1-6.28**;
- p. 625-628: **6.29-6.63**
- p. 656-659: **Problema resolvido 6.5**; p. 659-663: **6.96-6.115**