

CÁLCULO III
1º semestre de 2014
Aulas 13-14

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

A seguir, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a **integral de superfície de f na superfície S** como

I

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Observe a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição de integral dupla (15.1.5).

Para calcular a integral de superfície na Equação 1, aproximamos a área do retalho S_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente. Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

onde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij} . Se as componentes são contínuas e \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v são não nulos e não paralelos no interior de D , pode ser mostrado, da Definição 1, mesmo quando D não é retangular, que

2

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

Compare com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Observe também que

$$\iint_S 1 dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA = A(S)$$

A Fórmula 2 nos permite calcular a integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio dos parâmetros D . Quando usamos essa fórmula, precisamos lembrar que $f(\mathbf{r}(u, v))$ deve ser calculada escrevendo-se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula de $f(x, y, z)$.

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2 dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação paramétrica

$$x = \text{sen } \phi \cos \theta \quad y = \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \quad z = \cos \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ou seja, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \text{sen } \phi$$

Portanto, pela Fórmula 2,

$$\begin{aligned}\iint_S x^2 dS &= \iint_D (\sin \phi \cos \theta)^2 |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos^2 \theta \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^\pi (\sin \phi - \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes às daquelas das integrais que estudamos anteriormente. Por exemplo, se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tiver a forma de uma superfície S e se a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então, a **massa** total da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

e o **centro de massa** será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x, y, z) dS \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x, y, z) dS \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x, y, z) dS$$

Os momentos de inércia também podem ser definidos como antes (veja o Exercício 39).

GRÁFICOS

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser considerada uma superfície parametrizada com equações paramétricas

$$x = x \quad y = y \quad z = g(x, y)$$

e, então, temos $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \mathbf{k}$

de modo que

3

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Logo, neste caso, a Fórmula 2 se torna

$$\boxed{4} \quad \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Existem fórmulas análogas para quando for mais conveniente projetar S no plano yz ou no plano xz . Por exemplo, se S for a superfície com equação $y = h(x, z)$ e D for sua projeção no plano xz , então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S y dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ (veja a Figura 2).

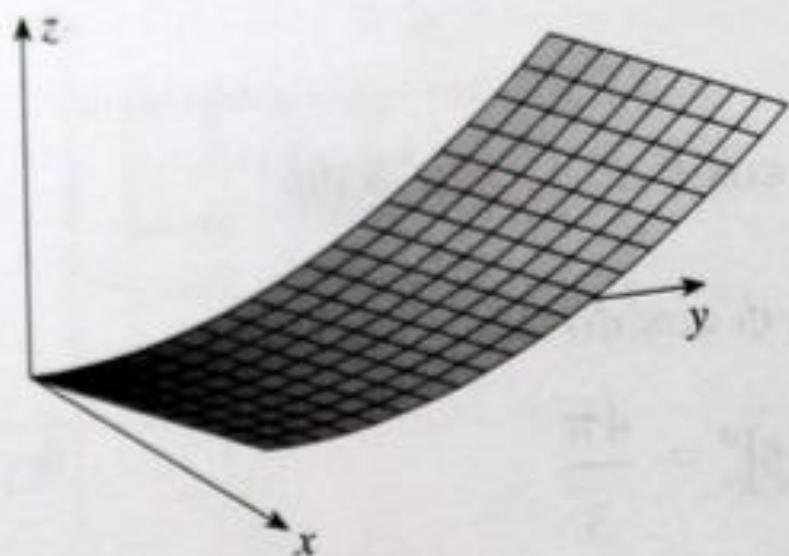


FIGURA 2

SOLUÇÃO Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

a Fórmula 4 dá

$$\begin{aligned} \iint_S y \, dS &= \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 dx \sqrt{2} \int_0^2 y \sqrt{1 + 2y^2} \, dy \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\right) \frac{2}{3} (1 + 2y^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_S z \, dS$, onde S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cujo fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 0$, e cujo topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2 .

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 3 (trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S). Para S_1 , usamos como parâmetros θ e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = \cos \theta \quad y = \text{sen } \theta \quad z = z$$

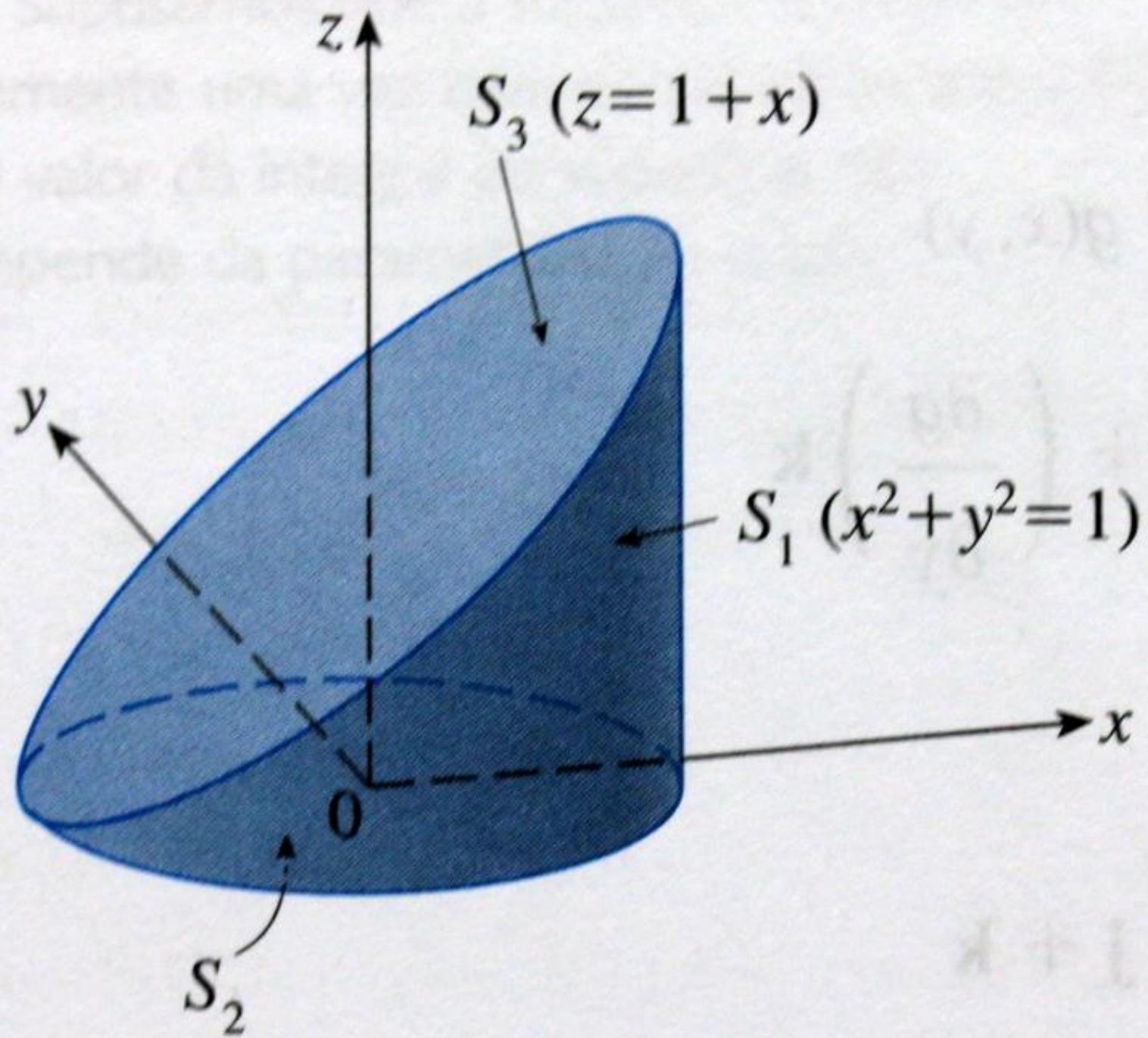
onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$

Portanto,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}$$

e

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta} = 1$$



Então, a integral de superfície em S_1 é

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z \, dS &= \iint_D z |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} z \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Como S_2 está no plano $z = 0$, temos

$$\iint_{S_2} z \, dS = \iint_{S_3} 0 \, dS = 0$$

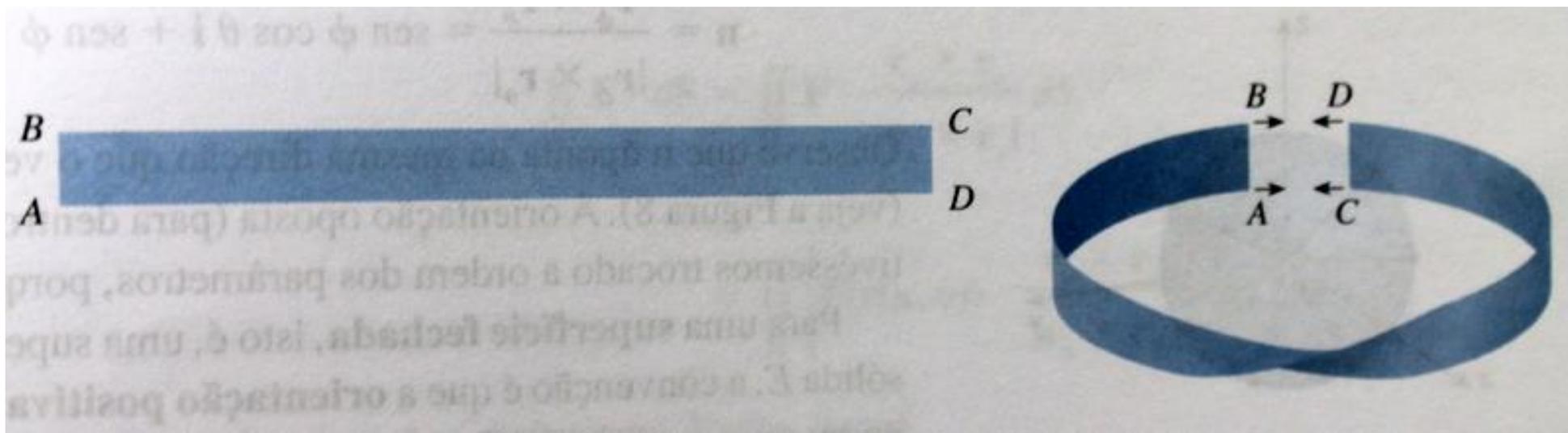
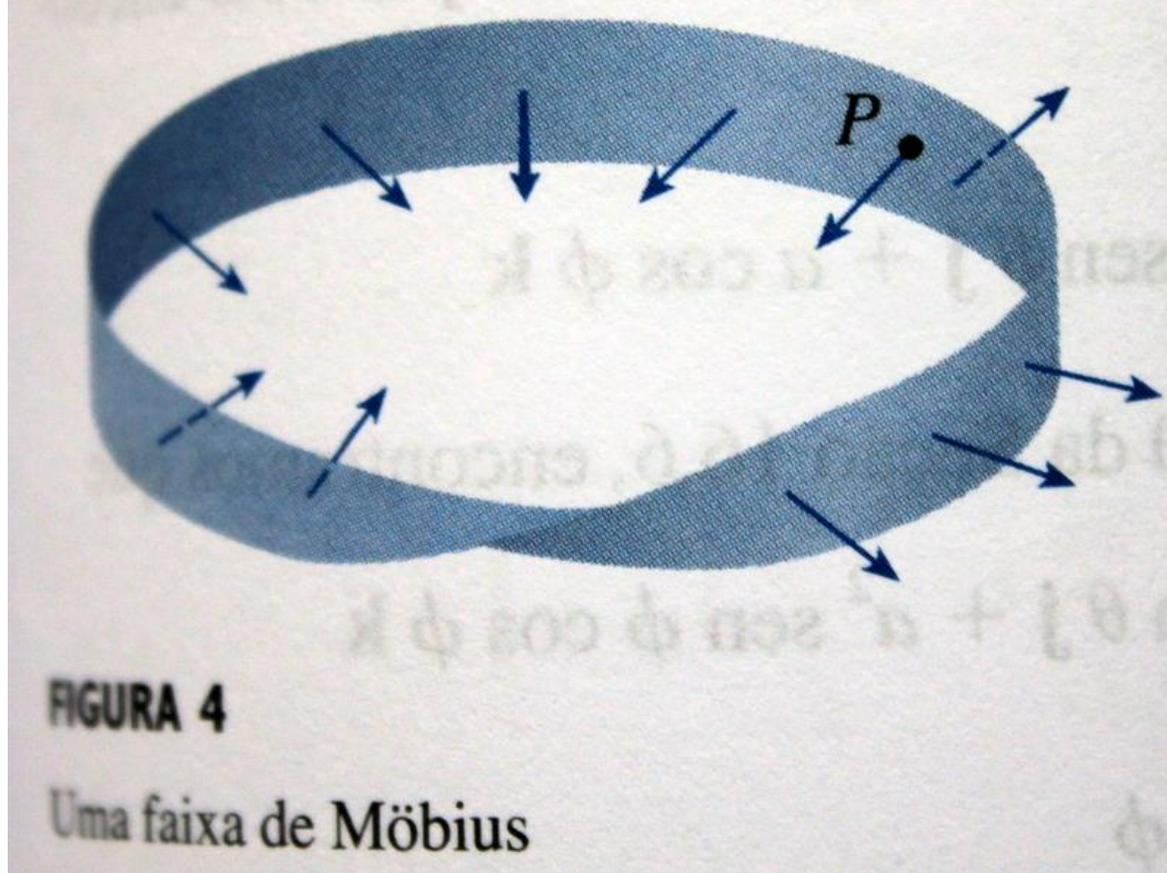
A superfície do topo S_3 está acima do círculo D e é parte do plano $z = 1 + x$. Portanto, tomando $g(x, y) = 1 + x$ na Fórmula 4 e transformando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z \, dS &= \iint_D (1 + x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos \theta) \sqrt{1 + 1 + 0} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + r^2 \cos \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \theta\right) \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \pi\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S z \, dS &= \iint_{S_1} z \, dS + \iint_{S_2} z \, dS + \iint_{S_3} z \, dS \\ &= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2} \pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi\end{aligned}$$

□



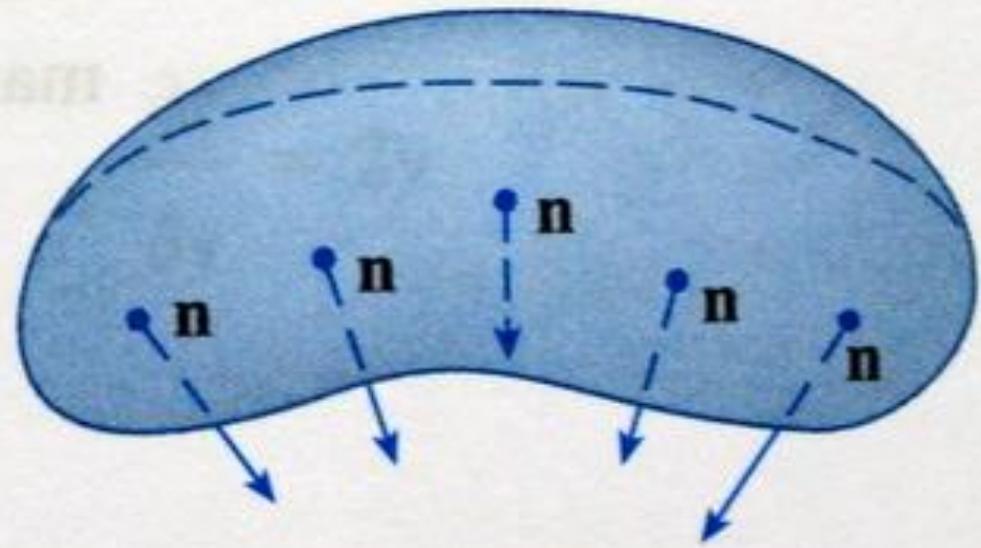
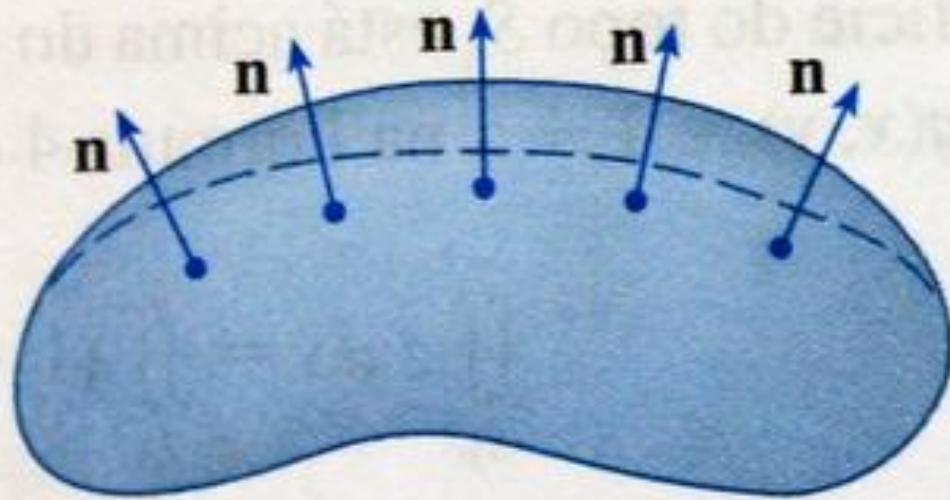


FIGURA 7 As duas orientações de uma superfície orientável

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de g , usamos a Equação 3 e vemos que a orientação induzida é dada pelo vetor normal unitário

5

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como a componente na direção de \mathbf{k} é positiva, isso fornece a orientação *para cima* da superfície.

Se S for uma superfície orientada lisa dada na forma paramétrica pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente associada à orientação do vetor normal unitário.

6

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo, no Exemplo 4 da Seção 16.6 encontramos a representação paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Então, no Exemplo 10 da Seção 16.6, encontramos que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sin \phi$$

Assim, a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} = \frac{1}{a} \mathbf{r}(\phi, \theta)$$

7

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

e ela é interpretada fisicamente como a vazão através de S .

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, então \mathbf{F} também é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e a integral da Equação 7 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando \mathbf{F} não é $\rho \mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de \mathbf{F} em S .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando \mathbf{F} não é $\rho\mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de \mathbf{F} em S .

8 **DEFINIÇÃO** Se \mathbf{F} for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário \mathbf{n} , então a **integral de superfície de \mathbf{F} em S** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de \mathbf{F} através de S .

Em palavras, a Definição 8 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de sua componente normal em S (como definido

Se $\mathbf{r}(u, v)$ é uma função vetorial dada, então \mathbf{n} é dado pela Equação 6 da Definição 8 e, da Equação 2, temos

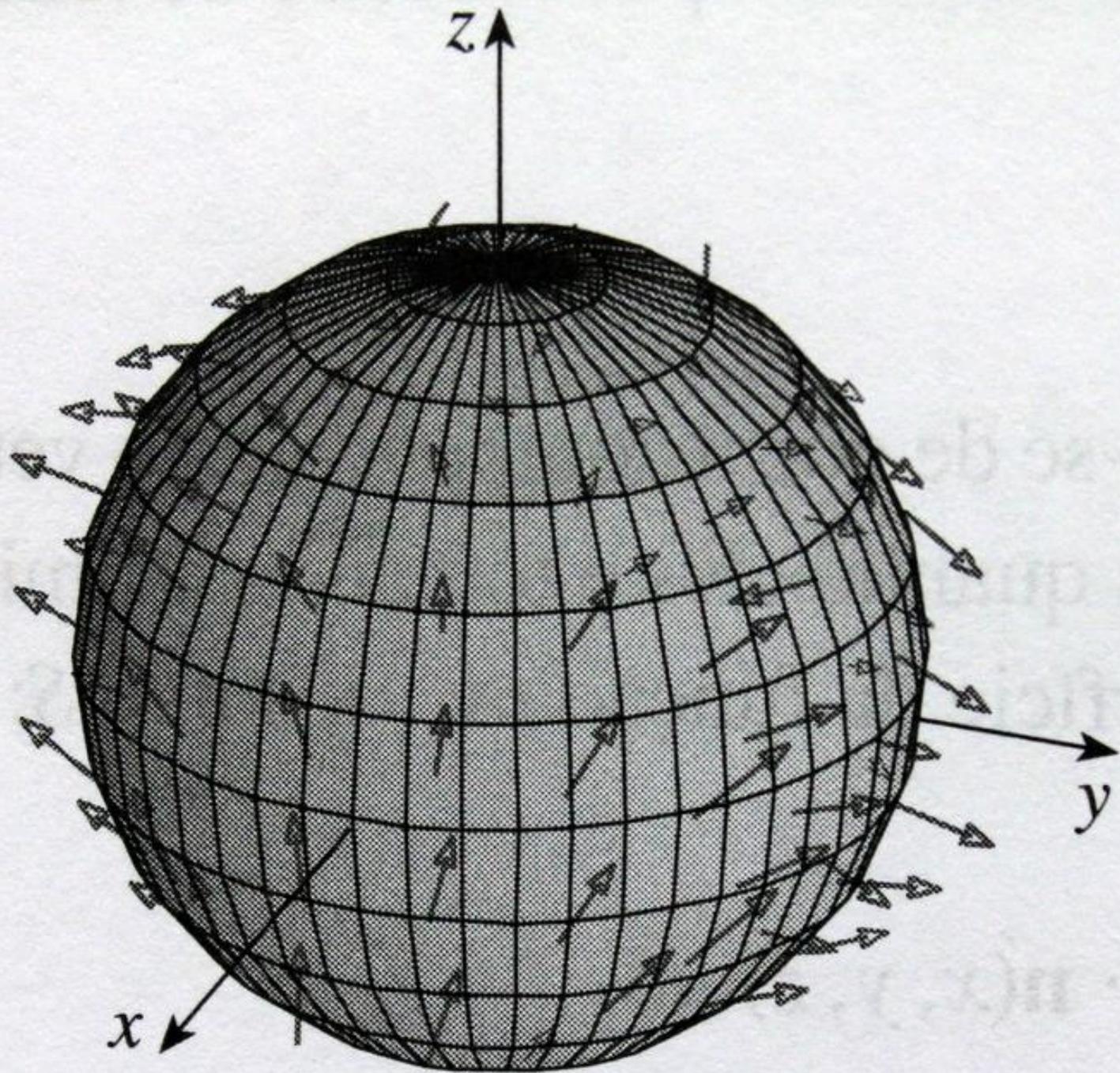
$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS \\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA\end{aligned}$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Então, temos

9

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

EXEMPLO 4 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

temos $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{k}$

e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \text{sen}^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen}^2 \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \text{sen } \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Portanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos \phi \text{sen}^2 \phi \cos \theta + \text{sen}^3 \phi \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta$$

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) d\phi d\theta$$

$$= 2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

$$= 0 + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \quad (\text{já que } \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0)$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 1.

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 4 é um campo de velocidade descrevendo o escoamento de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

No caso de uma superfície dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos considerar x e y como parâmetros e usar a Equação 3 para escrever

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

Logo, a Fórmula 9 se torna

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

Esta fórmula pressupõe uma orientação de S para cima. Para uma orientação para baixo, multiplicamos por -1 . Fórmulas semelhantes podem ser obtidas se S for dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$ (veja os Exercícios 35 e 36).

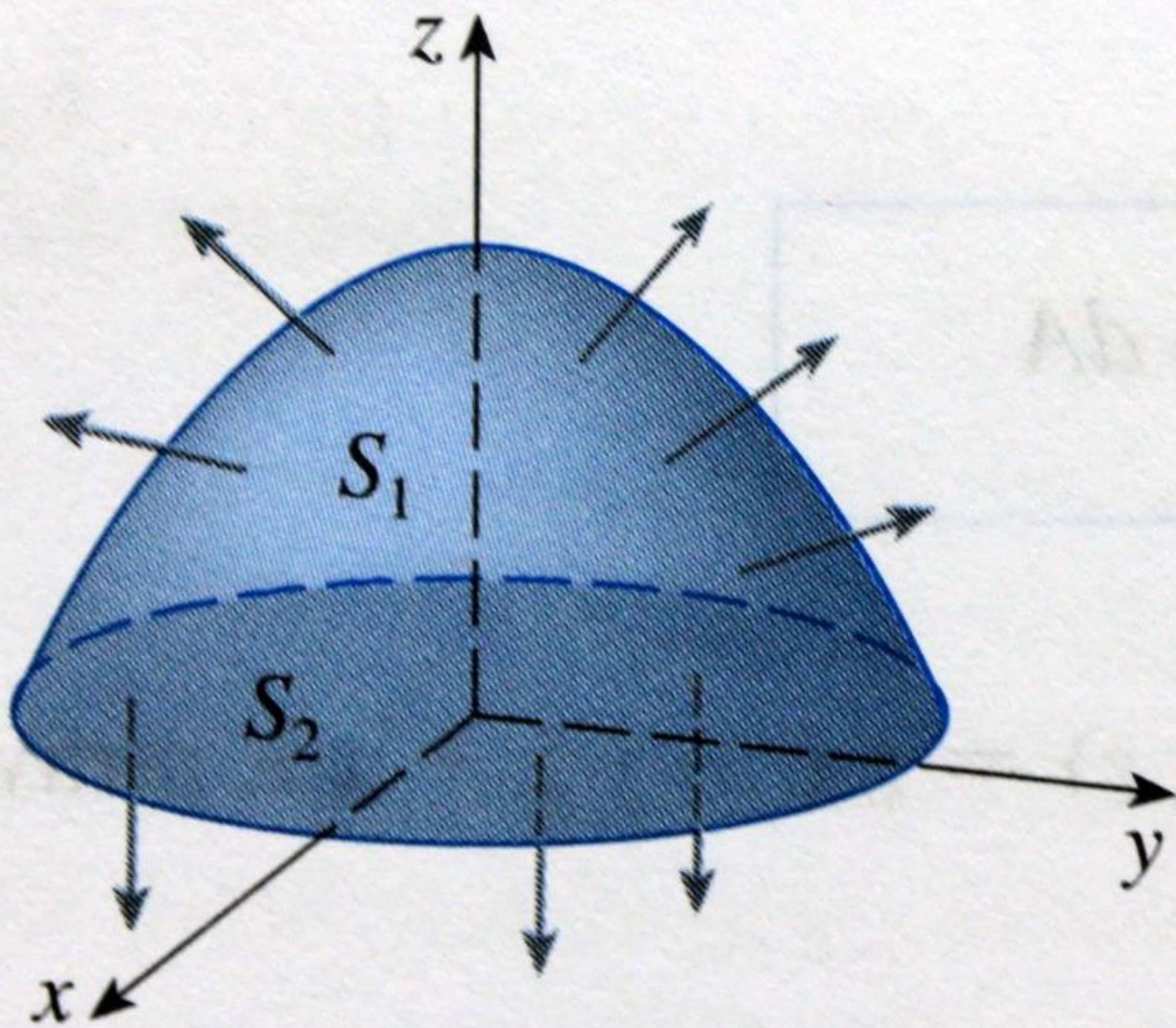
EXEMPLO 5 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e S é a fronteira da região sólida E delimitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabólica do topo, S_1 , e pela superfície circular do fundo, S_2 , (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que S_1 é orientada para cima e podemos usar a Equação 8 com D sendo a projeção de S_1 sobre o plano xy , ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Como

$$P(x, y, z) = y \quad Q(x, y, z) = x \quad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

sobre S_1 e

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$



$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \\ &= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2] dA \\ &= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos \theta \sin \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos \theta \sin \theta \right) d\theta = \frac{1}{4} (2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

O círculo S_2 é orientado para baixo, então seu vetor normal unitário é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS = \iint_D (-z) dA = \iint_D 0 dA = 0$$

já que $z = 0$ sobre S_2 . Finalmente, calculamos, pela definição, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como a soma das integrais de superfície de \mathbf{F} sobre S_1 e S_2 :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo, se \mathbf{E} é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

é chamada **fluxo elétrico** de \mathbf{E} através da superfície S . Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície S é

II

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde ϵ_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\epsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$). Portanto, se o campo vetorial

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K \nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 6 A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K \nabla u = -KC(2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 5, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

e, então,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas, sobre S , temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de transmissão de calor através de S é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -2aKC \iint_S dS \\ &= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3 \quad \square \end{aligned}$$

1. Seja S a superfície que é fronteira da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0,1(x+y+z)} dS$ usando uma soma de Riemann, como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como os retângulos que são as faces da caixa S e os pontos P_{ij}^* como os centros destes retângulos.

2. Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$, e por círculos no fundo e no topo. Suponha que você saiba que f é uma função contínua com

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \quad f(0, \pm 1, 0) = 3 \quad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z) dS$ usando a soma de Riemann, tomando como retalhos S_{ij} os círculos do fundo e do topo e a lateral dividida em quatro partes.

3. Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geq 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Dividindo H em quatro retalhos, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z) dS$.

4. Suponha que $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z) dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5-18 Calcule a integral de superfície.

5. $\iint_S x^2 yz \, dS$, S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$.

6. $\iint_S xy \, dS$, S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

7. $\iint_S yz \, dS$, S é a parte do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante.

8. $\iint_S y \, dS$, S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

9. $\iint_S yz \, dS$, S é a superfície com equações paramétricas $x = u^2$,
 $y = u \sin v$, $z = u \cos v$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi/2$

10. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dS$, S é o helicóide com equação vetorial,
 $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$

11. $\iint_S x^2 z^2 \, dS$, S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$

12. $\iint_S z \, dS$, S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$

13. $\iint_S y \, dS$, S é a parte do parabolóide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$
14. $\iint_S y^2 \, dS$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy
15. $\iint_S (x^2z + y^2z) \, dS$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$
16. $\iint_S xz \, dS$, S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$ e $x + y = 5$
17. $\iint_S (z + x^2y) \, dS$, S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante
18. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$, S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos do fundo e do topo

19-30 Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial \mathbf{F} e superfície orientada S . Em outras palavras, determine o fluxo de \mathbf{F} através de S . Para superfícies fechadas, use a orientação positiva (para fora).

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$, S é o helicóide do Exercício 10 com orientação para cima.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^y \mathbf{i} - xze^y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, com orientação para baixo.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z^4 \mathbf{k}$, S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$, com orientação para baixo.

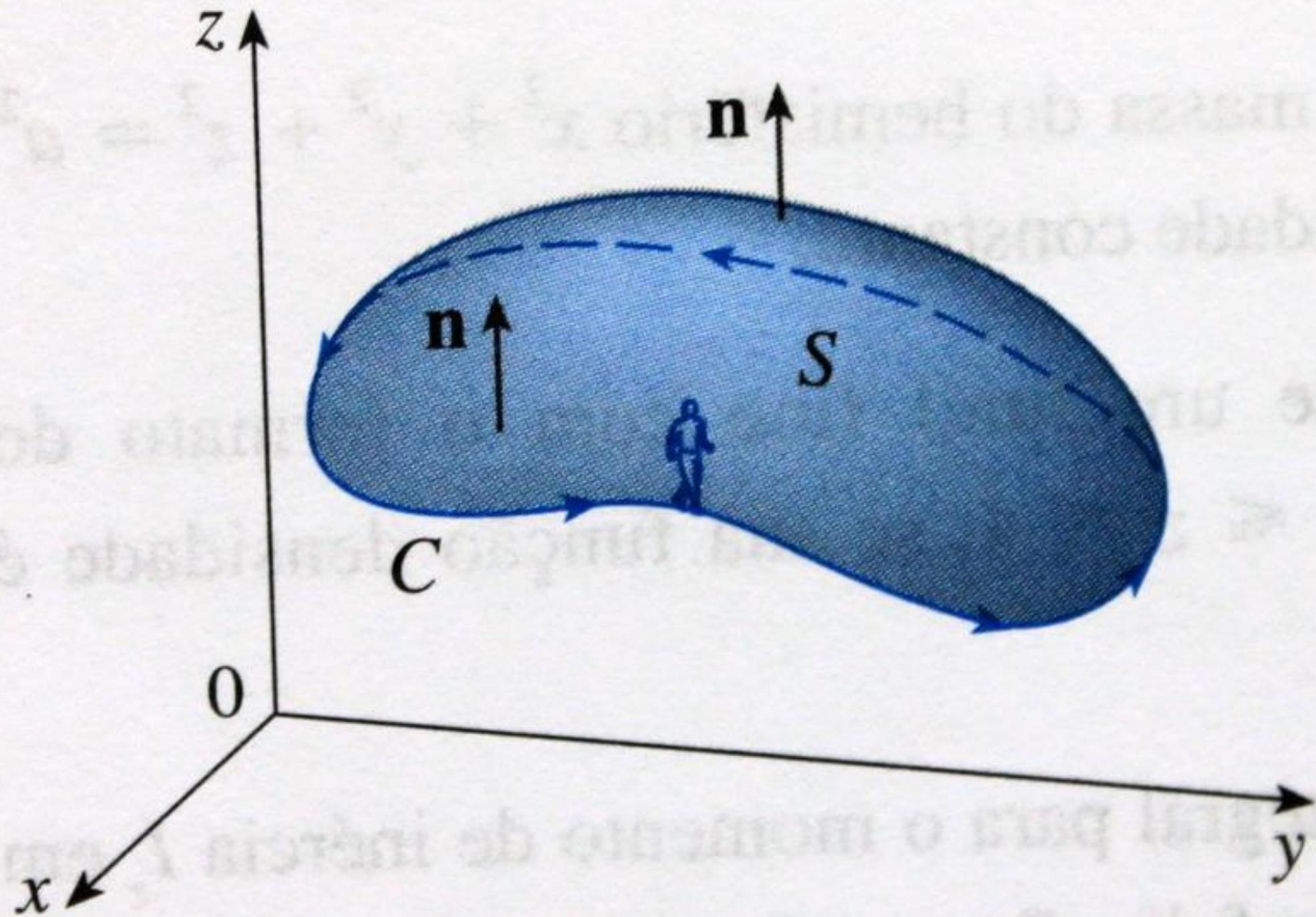
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$, S é o hemisfério
 $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $y \geq 0$, com orientação para cima.
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{j} - z \mathbf{k}$, S é formada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$,
 $0 \leq y \leq 1$ e pelo círculo $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$.
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + 4x^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$, S é a superfície $z = xe^y$,
 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$, S é o cubo com vértices
 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$, S é a fronteira da região delimitada
pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$.
29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$, S é a fronteira do semicilindro sólido
 $0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leq x \leq 2$.
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + (z - y) \mathbf{j} + x \mathbf{k}$, S é a superfície do tetraedro
com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

O TEOREMA DE STOKES

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva fronteira plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com seu vetor normal unitário \mathbf{n} . A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira C** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de \mathbf{n} , então a superfície estará sempre à sua esquerda.

TEOREMA DE STOKES Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad \text{e} \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de \mathbf{F} é igual à integral de superfície da componente normal do rotacional de \mathbf{F} .

A curva fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S , de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

1

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que o $\text{rot } \mathbf{F}$ é uma espécie de derivada de \mathbf{F}) e do lado direito, envolvendo valores de \mathbf{F} calculados somente na *fronteira* de S .

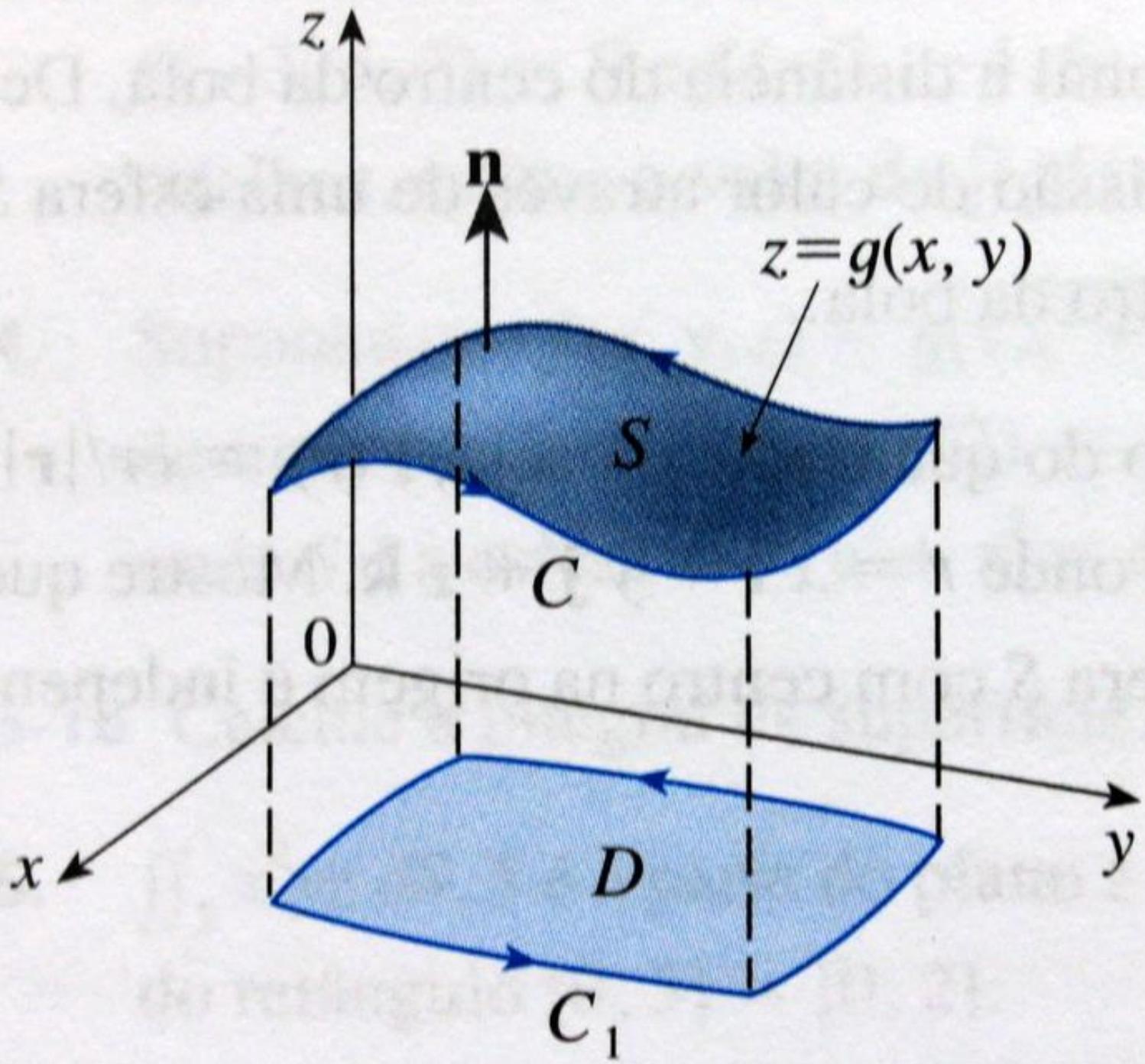
De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy , com orientação para cima, o vetor normal unitário é \mathbf{k} , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

Esta é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada pela Equação 16.5.12. Então vemos que o Teorema de Green é, na verdade, um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de demonstrar no caso geral, podemos fazer uma demonstração quando S for um gráfico e \mathbf{F} , S e C forem bem comportados.

DEMONSTRAÇÃO DE UM CASO ESPECIAL DO TEOREMA DE STOKES Admitiremos que a equação de S seja $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja curva fronteira C_1 corresponde a C . Se a orientação de S for para cima, então a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 (veja a Figura 2). Foi-nos dado que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ e que as derivadas parciais de P , Q e R são contínuas.

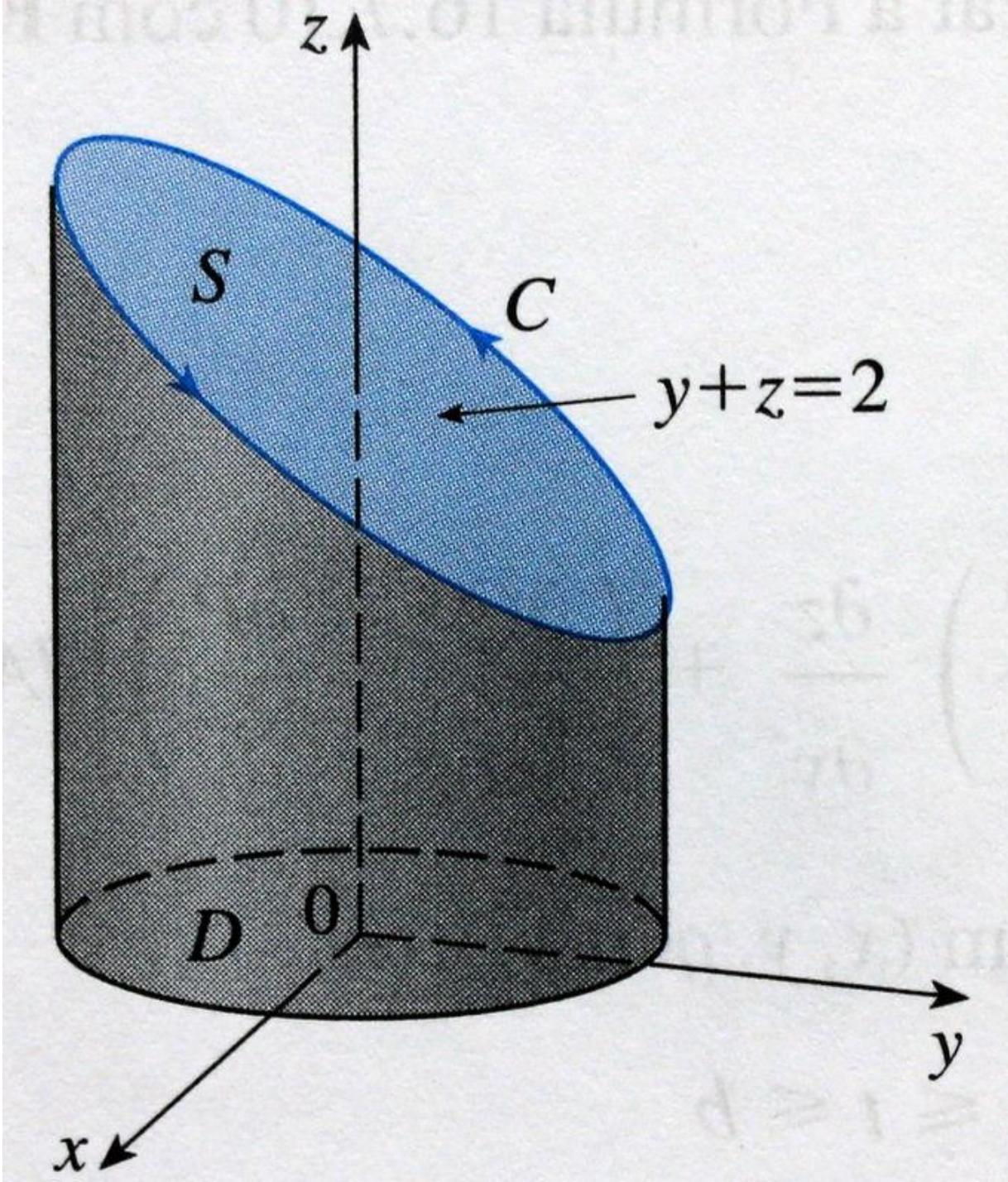


$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser rearranjados para que coincidam com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \square$$

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando visto de cima.)



SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y) \mathbf{k}$$

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira C , a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é C . Se orientarmos S para cima, então a orientação induzida em C será positiva. A projeção D de S sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, e assim, usando a Equação 16.7.10 com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2 \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (2\pi) + 0 = \pi \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 2 Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy (veja a Figura 4).

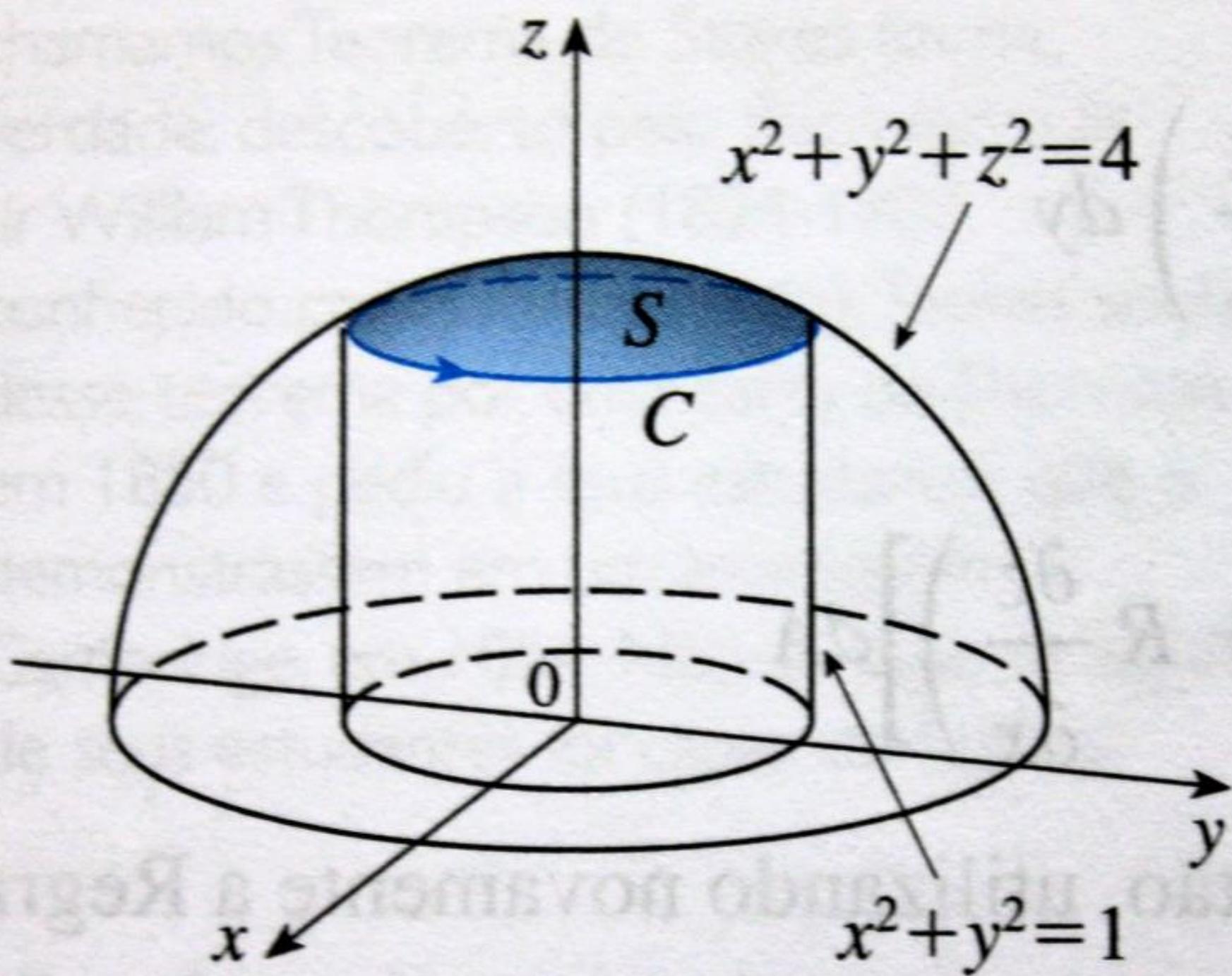
SOLUÇÃO Para achar a curva fronteira C , resolvemos as equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$. Subtraindo, obtemos $z^2 = 3$ e, assim, $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$). Então C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Temos também

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$



$$\mathbf{F}(r(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e \mathbf{v} represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds$$

e lembre-se de que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente de \mathbf{v} na direção do vetor tangente unitário \mathbf{T} . Isso significa que, quanto mais próxima a direção de \mathbf{v} está da direção de \mathbf{T} , maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover em torno de C e é chamada **circulação** de \mathbf{v} em torno de C (veja a Figura 5).

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0 . Então $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos os pontos P de S_a , porque $\text{rot } \mathbf{F}$ é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação da circulação em torno do círculo fronteira C_a :

$$\begin{aligned} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2 \end{aligned}$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \rightarrow 0$ e temos

$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

4

$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que $\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a medida do efeito da rotação do fluido em torno do eixo \mathbf{n} . O efeito de girar é maior em um eixo paralelo a $\text{rot } \mathbf{v}$.

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 16.5.4 (que afirma que, se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre \mathbb{R}^3 , então \mathbf{F} é conservativo). De nosso trabalho prévio (Teoremas 16.3.3 e 16.3.4), sabemos que \mathbf{F} é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C . Dado C , suponha que possamos achar uma superfície orientada S cuja fronteira seja C (isso pode ser feito, mas a demonstração requer técnicas avançadas). Então o Teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C .

2-6 Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y \cos z \mathbf{i} + e^x \sin z \mathbf{j} + xe^y \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, orientado para cima
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2 \mathbf{i} + y^2z^2 \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado para cima
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y^3z \mathbf{i} + \sin(xyz) \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$, S é a parte do cone $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 3$, orientado na direção positiva do eixo y
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + x^2yz \mathbf{k}$, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, com orientação para fora. [Sugestão: use a Equação 3.]
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \cos z \mathbf{i} + x^2z \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ orientado na direção positiva do eixo x [Sugestão: use a Equação 3.]

7-10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2) \mathbf{i} + (y + z^2) \mathbf{j} + (z + x^2) \mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \mathbf{i} + e^x \mathbf{j} + e^z \mathbf{k}$, C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + e^{xy} \mathbf{k}$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 16, z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + 2z \mathbf{j} + 3y \mathbf{k}$, C é a curva de intersecção do plano $x + z = 5$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$$

e C é a curva da intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine as equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C .

13-15 Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado \mathbf{F} e a superfície S .

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está acima do plano $z = 1$, orientado para cima.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$, S é a parte do plano $2x + y + z = 2$ que está no primeiro octante, orientada para cima.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientado na direção positiva do eixo y .

O TEOREMA DO DIVERGENTE

Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

onde C é a curva fronteira da região do plano D , orientada positivamente. Se quisermos estender esse teorema para campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , podemos conjecturar que

$$\boxed{1} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E . A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas e é chamada Teorema do Divergente. Observe sua semelhança com

TEOREMA DO DIVERGENTE Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de \mathbf{F} pela superfície fronteira de E é igual à integral tripla do divergente de \mathbf{F} em E .

DEMONSTRAÇÃO Seja $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

EXEMPLO I Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos o divergente de \mathbf{F} :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_B 1 \, dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3} \quad \square$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

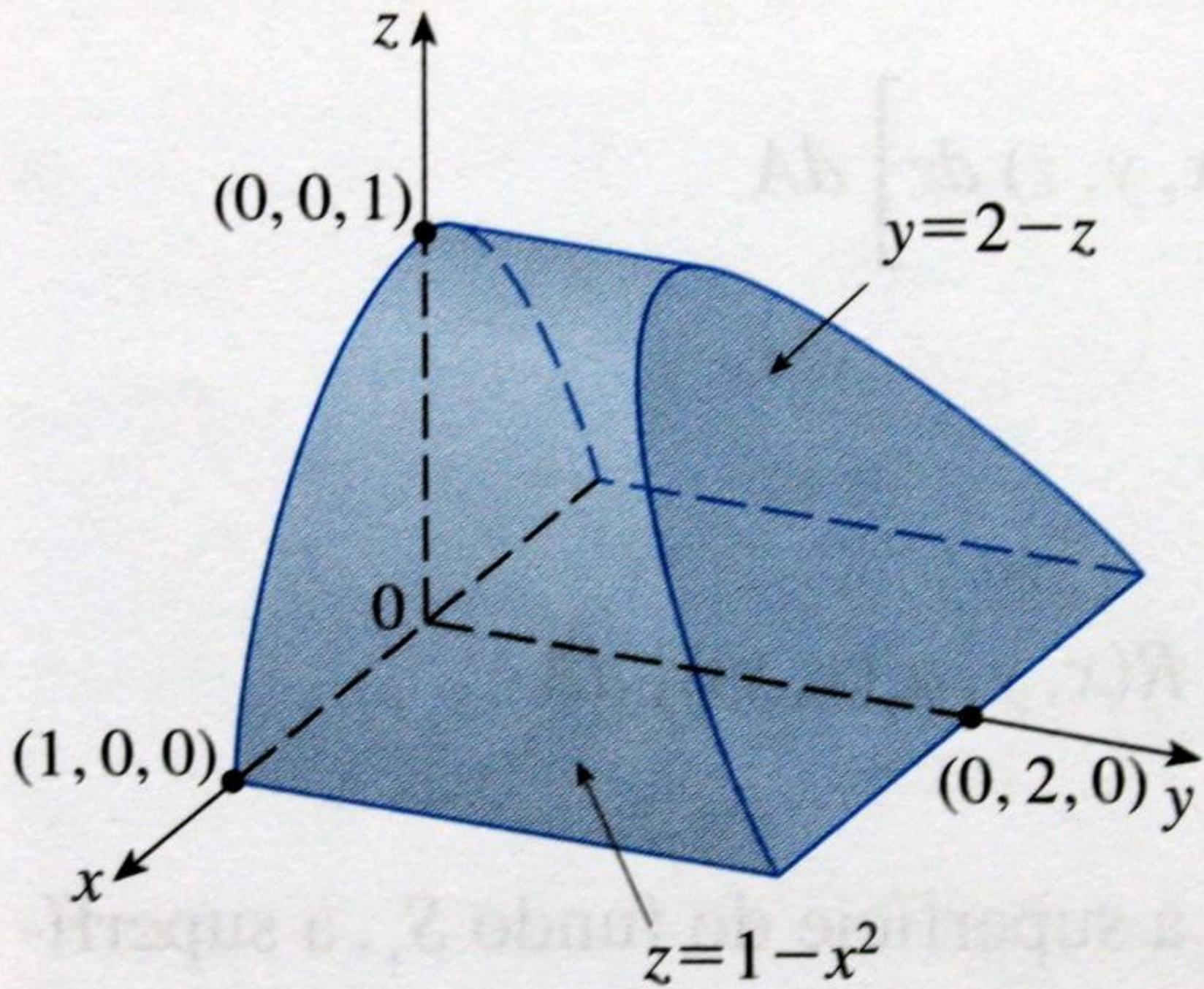
$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2}) \mathbf{j} + \text{sen}(xy) \mathbf{k}$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$ (veja a Figura 2).

SOLUÇÃO Seria extremamente difícil calcular a integral da superfície dada diretamente (teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S). Além disso, o divergente de \mathbf{F} é muito menos complicado que o próprio \mathbf{F} :

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{sen } xy) = y + 2y = 3y$$

Portanto, usamos o Teorema do Divergente para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:



em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_E 3y \, dV \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} \, dz \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(x^2+1)^3 - 8] dx \\ &= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7) dx = \frac{184}{35} \end{aligned}$$

□

Então, a superfície fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e sua normal \mathbf{n} é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ sobre S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ sobre S_2 (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema do Divergente a S , obtemos

$$\begin{aligned} \boxed{7} \quad \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Vamos aplicar isso ao campo elétrico (veja o Exemplo 5 na Seção 16.1):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

onde S_1 é uma pequena esfera com raio a e centro na origem. Você pode verificar que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (veja o Exercício 23). Portanto, da Equação 7 vem

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 , porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em \mathbf{x} é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\epsilon Q}{a^2}$$

já que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\epsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS \\ &= \frac{\epsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\epsilon Q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi\epsilon Q \end{aligned}$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de \mathbf{E} é $4\pi\epsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.11) para uma

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ . Então, a vazão do fluido por unidade de área é $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a , então $\text{div } \mathbf{F}(P) \approx \text{div } \mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos de B_a , uma vez que $\text{div } \mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F} dV = \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F}(P_0) dV = \text{div } \mathbf{F}(P_0)V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \rightarrow 0$ e sugere que

8

$$\text{div } \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 nos diz que $\text{div } \mathbf{F}(P_0)$ é a vazão total por unidade de volume que sai de P_0 (essa é a razão para o nome *divergente*). Se $\text{div } \mathbf{F}(P) > 0$, o escoamento total perto de P é para fora e P é chamado **fonte**. Se $\text{div } \mathbf{F}(P) < 0$, o escoamento total perto de P é para dentro e P é denominado **sorvedouro**.

16.9

EXERCÍCIOS

1-4 Verifique que o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial \mathbf{F} na região E .

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$, E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$,
 $0 \leq z \leq 1$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

5-15 Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de \mathbf{F} através de S .

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + yz^2 \mathbf{k}$, S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e $z = 2$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + xz^4 \mathbf{k}$, S é a superfície da caixa de vértices $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2 \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 y \mathbf{i} - x^2 y^2 \mathbf{j} - x^2 yz \mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \sin z \mathbf{i} + \cos(xz) \mathbf{j} + y \cos z \mathbf{k}$, S é o elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + 2xyz \mathbf{k}$, S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y + z = 2$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2) \mathbf{i} + xe^{-z} \mathbf{j} + (\sin y + x^2 z) \mathbf{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 \mathbf{i} - x^3 z^2 \mathbf{j} + 4xy^2 z \mathbf{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x^3 z \mathbf{i} + 4y^3 z \mathbf{j} + 3z^4 \mathbf{k}$, S é a esfera com centro na origem e raio R
14. $\mathbf{F} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, onde $r = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, S consiste do hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano xy
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \operatorname{tg} z \mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2} \mathbf{j} + x \operatorname{sen} y \mathbf{k}$, S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$

- 16.** Use um sistema de computação algébrica para traçar o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x \cos^2 y \mathbf{i} + \sin^3 y \cos^4 z \mathbf{j} + \sin^5 z \cos^6 x \mathbf{k}$ no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ e $z = \pi/2$. Em seguida, calcule o fluxo através da superfície do cubo.
- 17.** Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 x \mathbf{i} + (\frac{1}{3} y^3 + \operatorname{tg} z) \mathbf{j} + (x^2 z + y^2) \mathbf{k}$ e S é a metade de cima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [Sugestão: observe que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2 , onde S_1 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]
- 18.** Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \operatorname{tg}^{-1}(y^2) \mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Determine o fluxo de \mathbf{F} através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para baixo.

24. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25-30 Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, onde \mathbf{a} é um vetor constante

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

27. $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

28. $\iint_S D_n f dS = \iiint_E \nabla^2 f dV$

29. $\iint_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$

30. $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$

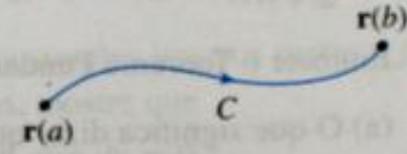
Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$



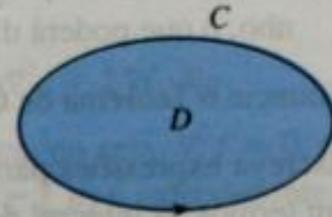
Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



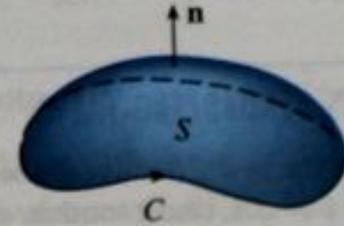
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy$$



Teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema do Divergente

$$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} \cdot dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

