CÁLCULO III
1º semestre de 2014
Aulas 11-12

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2

Lembre-se, da Seção 5.3, no Volume I, que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \boxed{1}$$

onde F é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 também é chamada Teorema da Variação Total: a integral da taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser considerado uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

2 TEOREMA Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

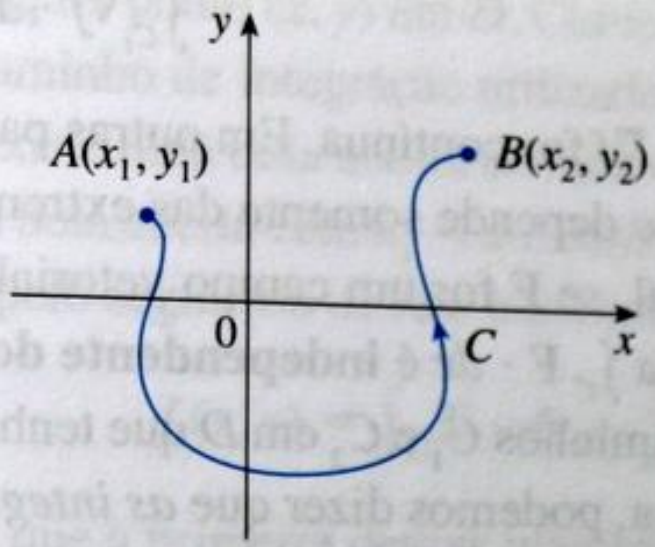
OBS. O Teorema 2 nos diz que podemos calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) sabendo apenas o valor de f nas extremidades de C. De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de ∇f é a variação total de f. Se f é uma função de duas variáveis e C, uma curva plana com início em $A(x_1, y_1)$ e término em $B(x_2, y_2)$, como na Figura 1, o Teorema 2 fica

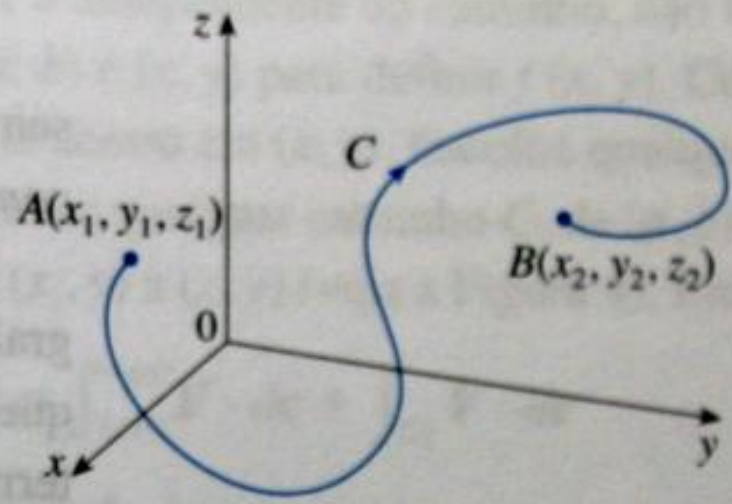
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C, uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vejamos agora a demonstração do Teorema 2 para este caso.





DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt \qquad \text{(pela Regra de Cadeia)}$$

$$= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

EXEMPLO 1 Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo da curva lisa por partes C (veja o Exemplo 4 da Seção 16.1).

SOLUÇÃO Da Seção 16.1, sabemos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)$$

□

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínua. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente das extremidades da curva.

Em geral, se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho*.

Uma curva é dita **fechada** se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2). Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D, podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A (veja a Figura 3). Então,

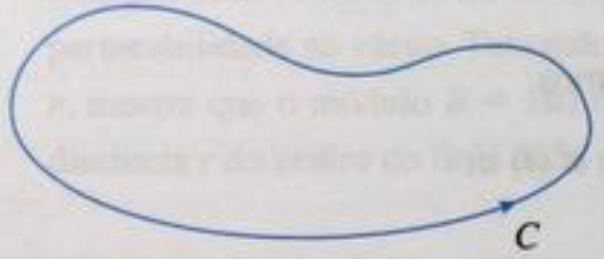


FIGURA 2
Uma curva fechada

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos inicial e final.

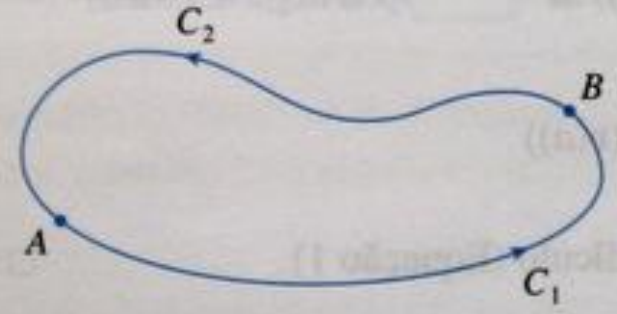


FIGURA 3

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D, podemos demonstrar a independência do caminho da seguinte forma. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então,

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, demonstramos o seguinte teorema:

3 TEOREMA $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

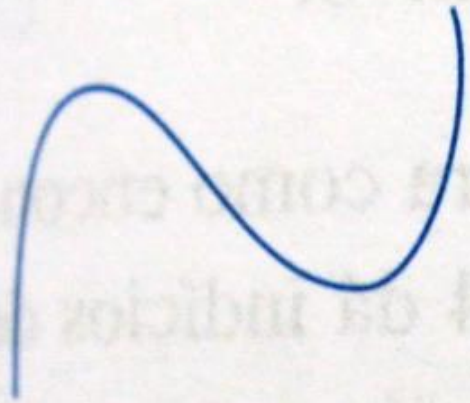
Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo $\mathbf{F}$ é independente do caminho, segue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir fala que *todos* os campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele foi enunciado e demonstrado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admita que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existirá uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D. (Portanto, D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, admita que D seja **conexo**. Isso significa que quaisquer dois pontos de D poderão ser ligados por um caminho inteiramente contido em D.

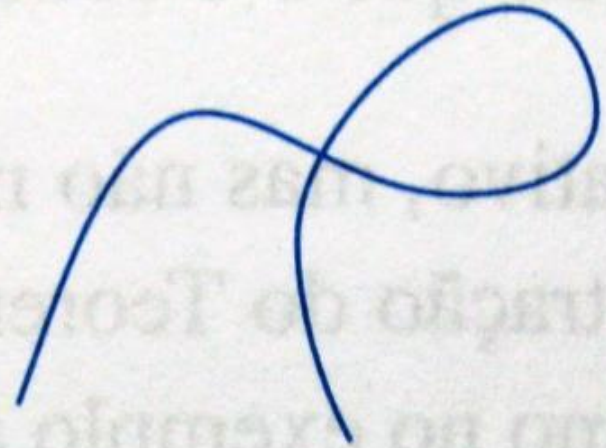
4 TEOREMA Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta conexa D. Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D, então $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $A(a, b)$ um ponto fixo em D. Vamos construir a função potencial f desejada definindo

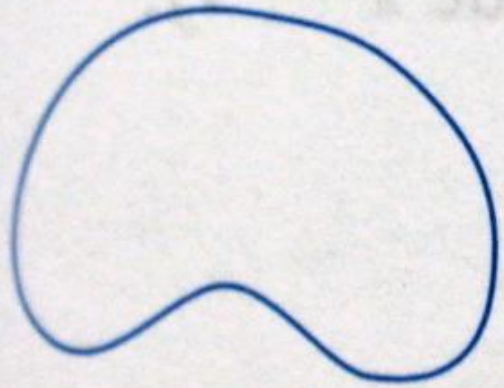
$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



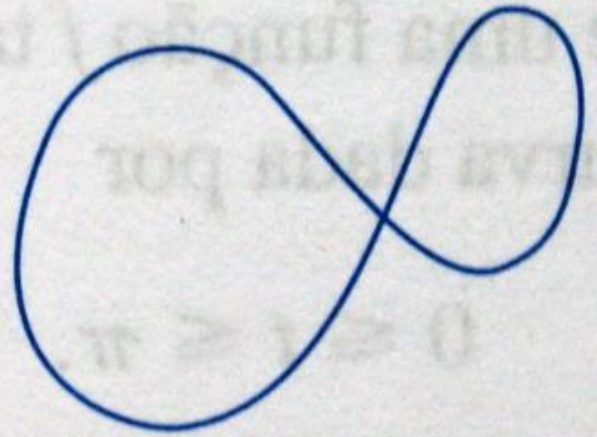
simples,
não fechada



não simples,
não fechada



simples,
fechada



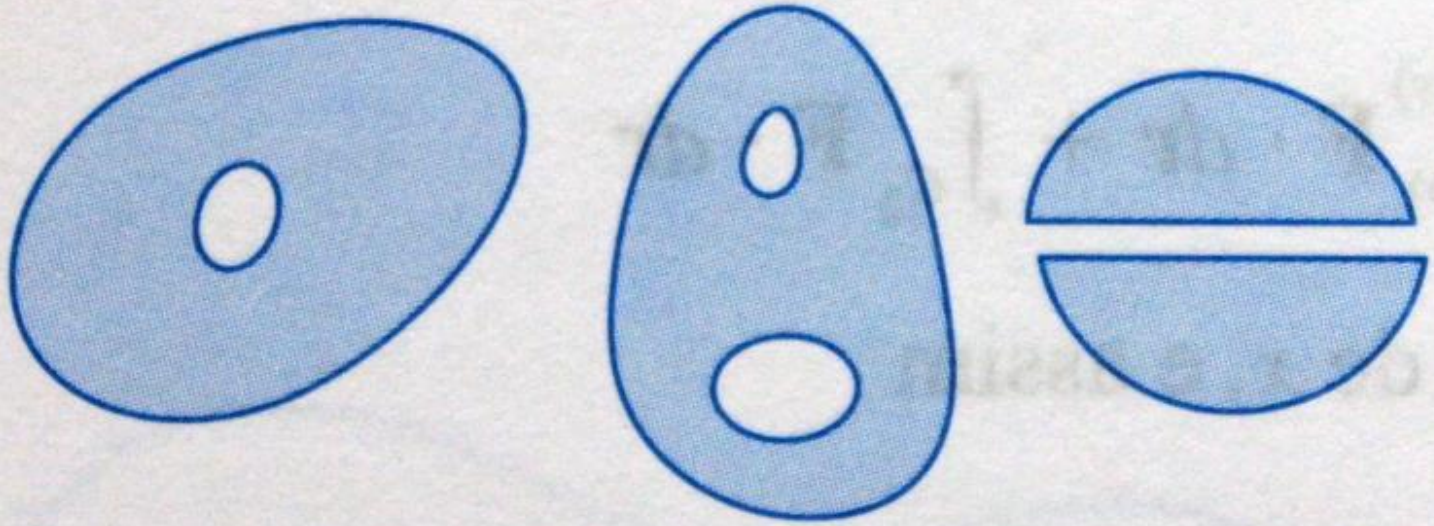
não simples,
fechada

5 TEOREMA Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

A recíproca do Teorema 5 só é verdadeira para um tipo especial de região. Para explicar isso, precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva fechada simples, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]

região simplesmente conexa



regiões que não são
simplesmente conexas

6 TEOREMA Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em } D$$

Então $\mathbf{F}$ é conservativo.

EXEMPLO 2 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, $\mathbf{F}$ não é conservativo.

EXEMPLO 3 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de $\mathbf{F}$ é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$) que é aberto e simplesmente conexo. Portanto, podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que $\mathbf{F}$ é conservativo. □

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que $\mathbf{F}$ é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. A demonstração do Teorema 4 dá indícios de como encontrar f, utilizando "integração parcial", como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k}$, determine uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Se existe tal função f, então

$$f_x(x, y, z) = y^2 \tag{11}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z} \tag{12}$$

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z} \tag{13}$$

Integrando (11) em relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z) \tag{14}$$

onde $g(y, z)$ é uma constante em relação a x. Então, derivando (14) em relação a y, temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + gy(y, z)$$

e, comparando com (12), vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então, $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ e reescrevemos (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, derivando em relação a z e comparando com (13), obtemos $h'(z) = 0$ e, portanto, $h(z) = K$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$. □

Vamos aplicar as ideias deste capítulo a um campo de forças contínuo $\mathbf{F}$ que move um objeto ao longo de uma trajetória C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto final de C. Pela Segunda Lei do Movimento de Newton (veja a Seção 13.4), a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ em um ponto de C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt \qquad \text{(Teorema 13.2.3, Fórmula 4)}$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt = \frac{m}{2} \left[|\mathbf{r}'(t)|^2 \right]_a^b \qquad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)}$$

$$= \frac{m}{2}\left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2\right]$$

Portanto,

$$W = \tfrac{1}{2} m\, |\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2} m\, |\mathbf{v}(a)|^2 \tag{15}$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2} m\, |\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

$$W = K(B) - K(A) \tag{16}$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças conservativo; ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto (x, y, z) é defi-

nida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, e temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei de Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

3-10 Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e \cos y\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4xy + 3)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x \cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cos xy + \operatorname{sen} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cos xy)\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \operatorname{senh} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\,\mathbf{j}$

12-18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leq t \leq 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + 2y \operatorname{arctg} x\,\mathbf{j}$,

C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$, C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (x^2 + 3z^2)\,\mathbf{k}$,
C: $x = t^2, y = t + 1, z = 2t - 1, 0 \leq t \leq 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z\,\mathbf{i} + 2xy \cos z\,\mathbf{j} - xy^2 \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + (z + 1)e^z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

19-20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C 2x \operatorname{sen} y\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$,
C é qualquer caminho de $(-1, 0)$ a $(5, 1)$

20. $\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)\, dx + (4xy - 9x^4y^2)\, dy$,
C é qualquer caminho de $(1, 1)$ a $(3, 2)$

21-22 Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de P a Q.

21. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1), Q(2, 4)$

22. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\,\mathbf{i} - xe^{-y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1), Q(2, 0)$

29-32 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo e (c) simplesmente conexo.

29. $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$

30. $\{(x, y) | x \neq 0\}$

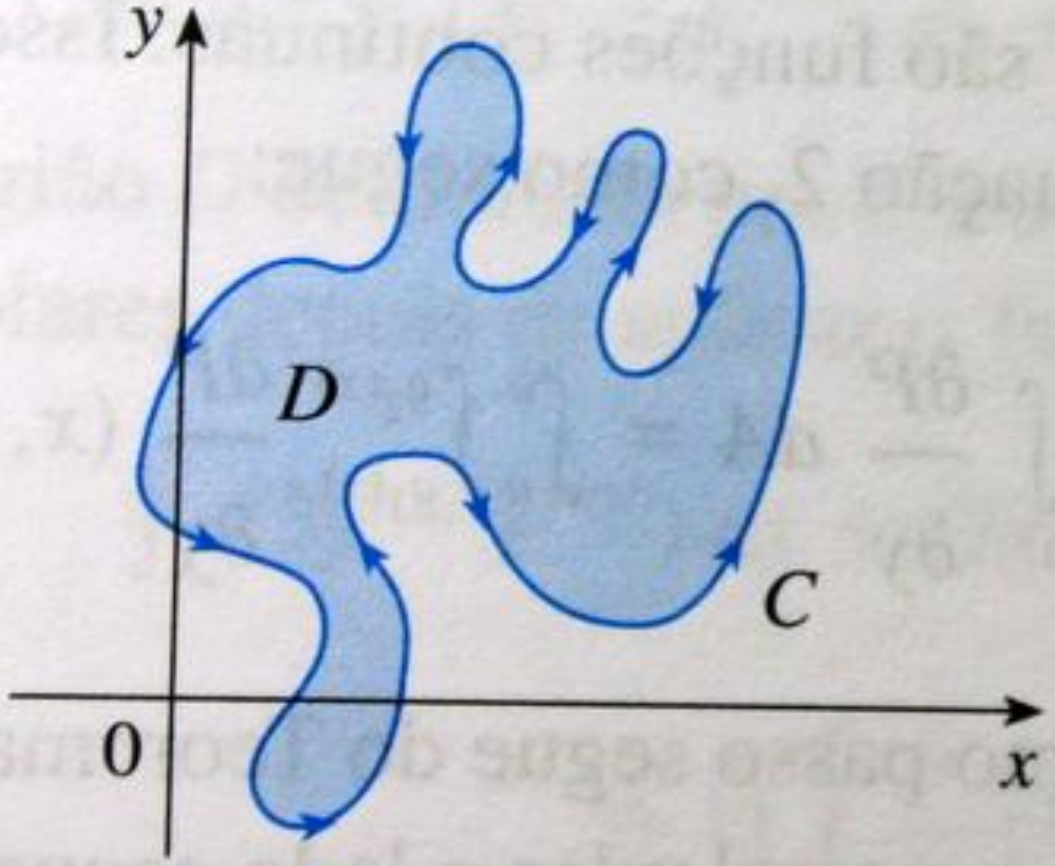
31. $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

32. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ ou } 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

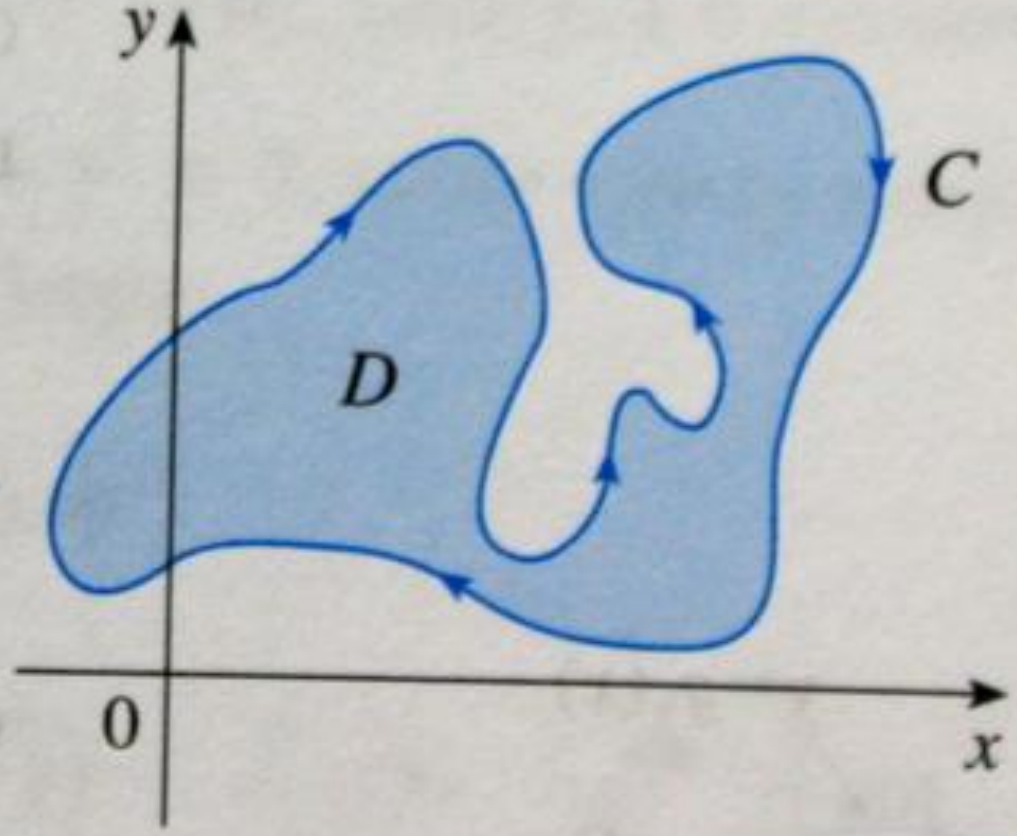
---

33. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.



(a) Orientação positiva



(b) Orientação negativa

TEOREMA DE GREEN Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Obs.: A notação

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{ou} \qquad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

é usada algumas vezes para indicar que a integral de linha é calculada usando-se a orientação positiva da curva fechada C. Outra notação para a orientação positiva da curva fron-

tação positiva da curva fechada C. Outra notação para a orientação positiva da curva fronteira a D é ∂D, assim a equação no Teorema de Green pode ser escrita como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \qquad 1$$

O Teorema de Green pode ser olhado como o correspondente do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais duplas. Compare a Equação 1 com o enunciado da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

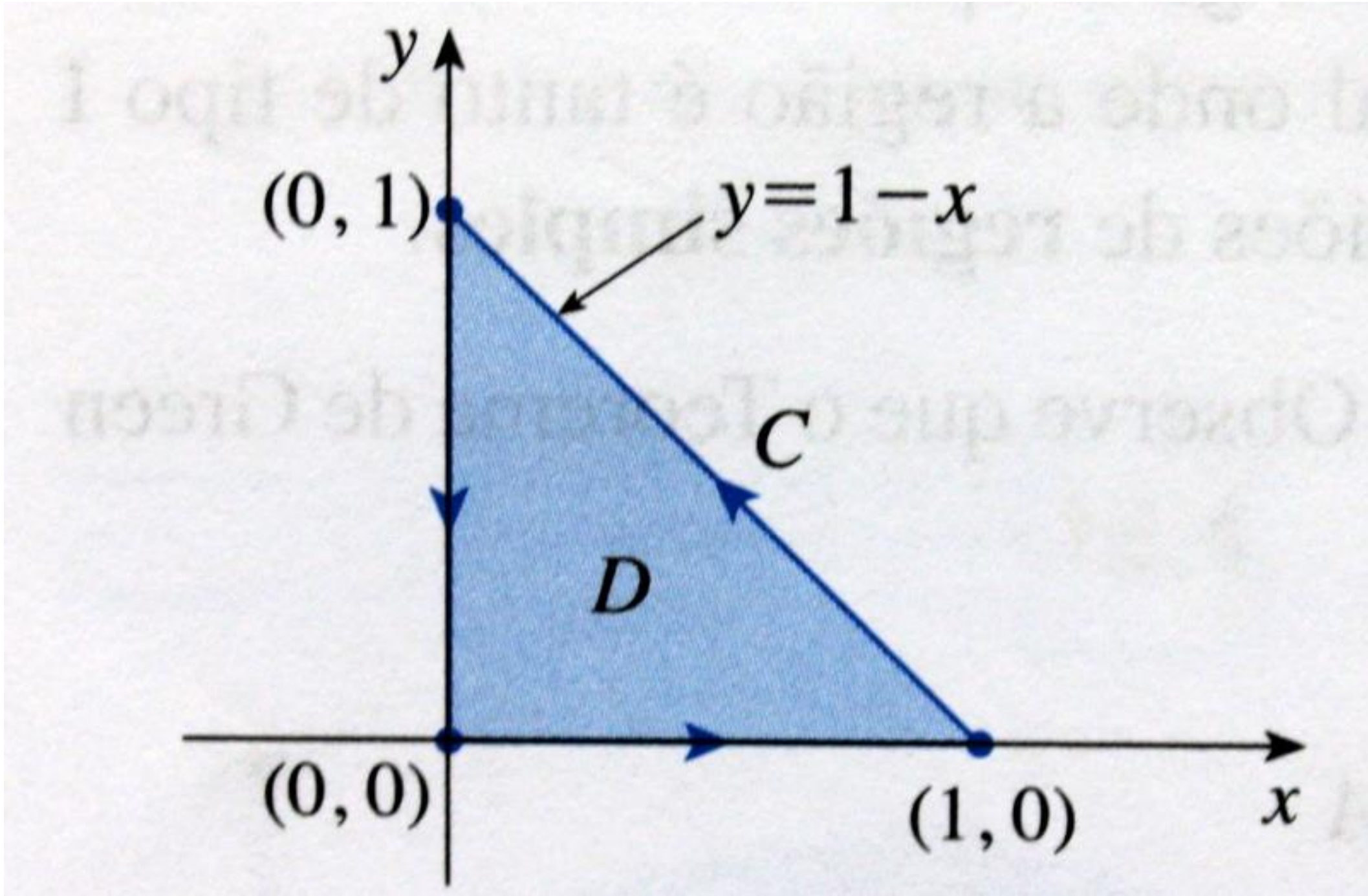
SOLUÇÃO Apesar de essa integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

□


y
(0, 1)
y=1−x
C
D
(0, 0)
(1, 0)
x

EXEMPLO 2 Calcule $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\,dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\,dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\operatorname{sen} x}) \right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3)\, r\, dr\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\, dr = 36\pi$$

□

Outra aplicação da direção inversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1\, dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2} y$$
$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2} x$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D:

5

$$A = \oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx = \tfrac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx$$

EXEMPLO 3 Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \operatorname{sen} t$, onde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\operatorname{sen} t)(-a\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

□

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green somente para o caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo, se D é uma região como a mostrada na Figura 5, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$. Assim, aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos

EXEMPLO 4 Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde C é a fronteira da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y a divide em duas regiões simples (veja a Figura 7). Em coordenadas polares, podemos escrever

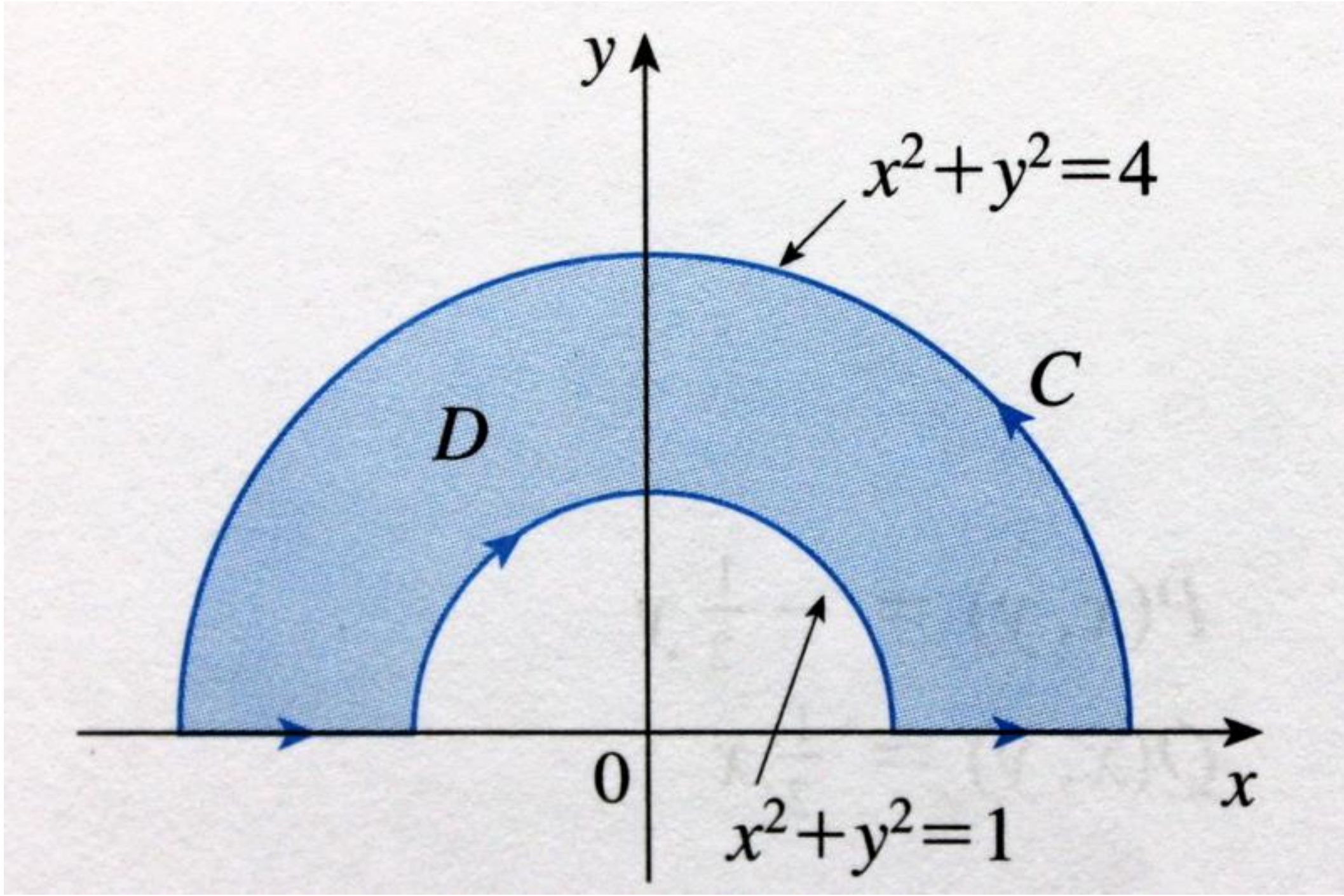
$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r \operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = [-\cos\theta]_0^{\pi}\left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \frac{14}{3}$$


y
$x^2+y^2=4$
C
D
0
x
$x^2+y^2=1$

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

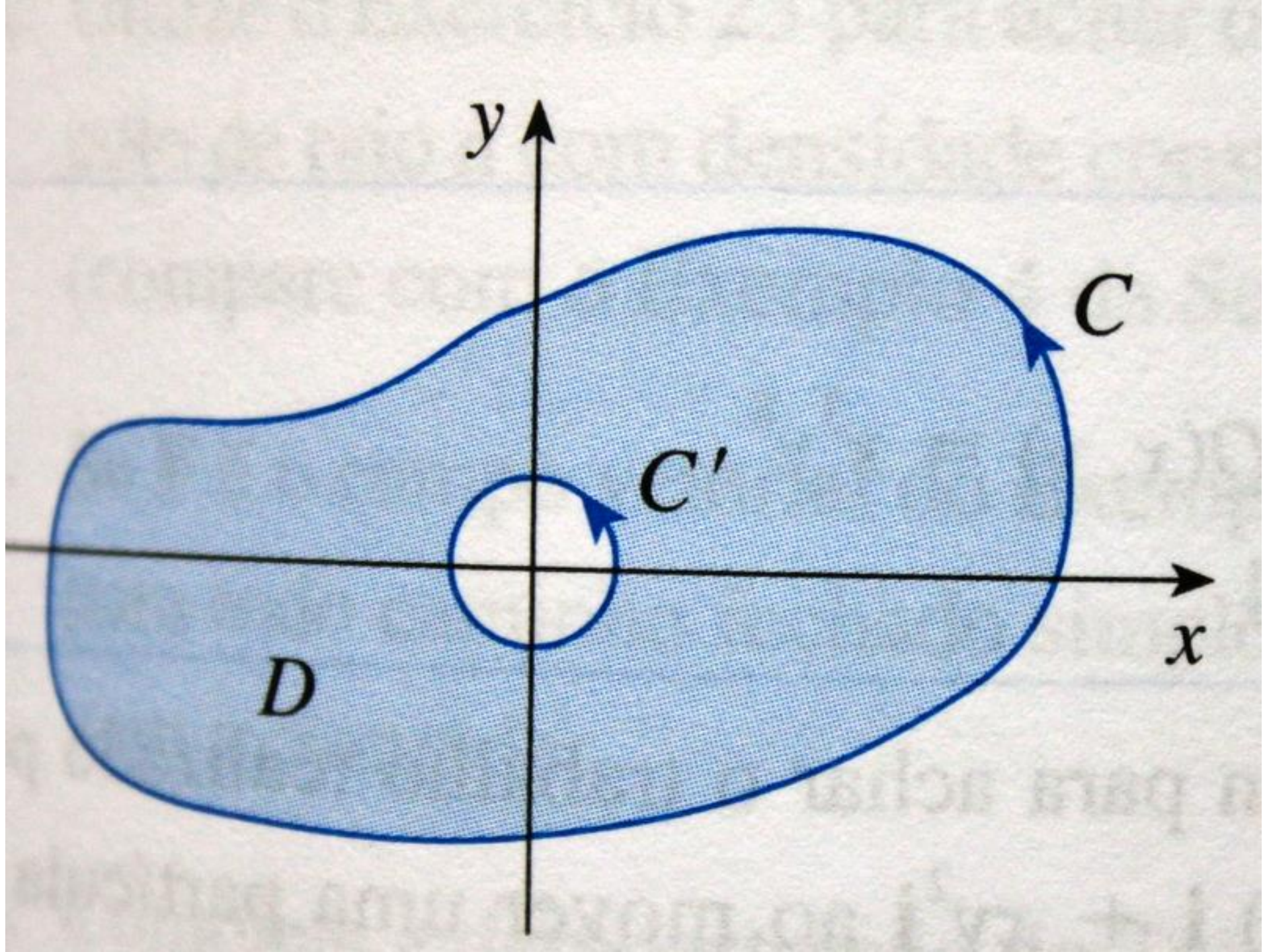
SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Vamos então considerar um círculo, percorrido no sentido anti-horário C' com centro na origem e raio a, onde o a escolhido é pequeno o suficiente para que C' esteja inteiramente contido em C (veja a Figura 10). Seja D a região limitada por C e C'. Então a orientação positiva da fronteira é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0$$

Portanto,
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

ou seja,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$


y
C
C′
x
D

ou seja,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \qquad \square$$

16.4 EXERCÍCIOS

1-4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y)dx + (x + y)dy$, C é o círculo com centro na origem e raio 2

2. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, C é o retângulo com vértices (0,0), (3, 0), (3, 1) e (0, 1)

3. $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$, C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)

4. $\oint_C x\,dx + y\,dy$, C consiste nos segmentos de reta de (0, 1) a (0, 0) e de (0, 0) a (1, 0) e na parábola $y = 1 - x^2$ de (1, 0) a (0, 1)

5-10 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

5. $\int_C e^y\,dx + 2xe^y\,dy$, C é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

6. $\int_C x^2y^2\,dx + 4\,xy^3\,dy$, C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$, e $(0, 3)$

7. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, C é a fronteira da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

8. $\int_C xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)\,dy$, C é a fronteira da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

9. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C \operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy$, C é a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

11-14 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$,

C consiste no arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ de $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$ e no segmento de reta $(\pi, 0)$ a $(0, 0)$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \operatorname{sen} x \rangle$,

C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(2, 6)$ a $(2, 0)$ a $(0, 0)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2 y, e^y - xy^2 \rangle$,

C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, orientada no sentido horário

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2 \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \rangle$,

C é a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário

ROTACIONAL E DIVERGENTE

Nesta seção, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais e que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

ROTACIONAL

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

1
$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Para auxiliar na memorização, vamos reescrever a Equação 1 usando notação de operadores. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") como

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Quando ele opera sobre uma função escalar, produz o gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial F, como segue:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{2}$$

EXEMPLO 1 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine o rotacional de $\mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Usando a Equação 2, temos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

□

3 TEOREMA Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO Temos

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

pelo Teorema de Clairaut. □

Como um campo vetorial conservativo é da forma $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

Se $\mathbf{F}$ é conservativo, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

E assim obtemos um modo de verificar que um campo vetorial não é conservativo.

EXEMPLO 2 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

SOLUÇÃO No Exemplo 1 mostramos que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Isso mostra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, pelo Teorema 3, $\mathbf{F}$ não é conservativo. □

Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se $\mathbf{F}$ for definido em todo o espaço, a recíproca vale. (Mais especificamente, a recíproca vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, "não apresenta furos".) O Teorema 4 é a versão tridimensional do Teorema 16.3.6. Sua demonstração requer o Teorema de Stokes e será apresentada no final da Seção 16.8.

4 TEOREMA Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{F}$ será um campo vetorial conservativo.

EXEMPLO 3

(a) Mostre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

é um campo vetorial conservativo.

(b) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUÇÃO

(a) Calculemos o rotacional de $\mathbf{F}$:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\,\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e o domínio de $\mathbf{F}$ é $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, pelo Teorema 4.

(b) A técnica para achar f foi dada na Seção 16.3. Temos

$$f_x(x, y, z) = y^2 z^3 \tag{5}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xyz^3 \tag{6}$$

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2 z^2 \tag{7}$$

Integrando (5) em relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 + g(y, z) \tag{8}$$

Derivando (8) em relação a y, obtemos $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$ e comparando com (6), temos $g_y(y, z) = 0$. Então, $g(y, z) = h(z)$ e

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Então, de (7) temos $h'(z) = 0$. Portanto

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma das conexões será explicada no Exercício 37. Outra ocorre quando $\mathbf{F}$ representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (ver Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas de perto (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de rot $\mathbf{F}$ (x, y, z), e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ no ponto P, então o fluido não gira em P e $\mathbf{F}$ é chamado **irrotacional** em P. Em outras palavras, não existe redemoinho em P. Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, uma pequena roda com pás deslizaria com o fluido, mas não rodaria em torno de seu eixo. Se rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Veremos mais detalhes sobre essa explanação na Seção 16.8, como consequência do Teorema de Stokes.

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e existem $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$, então o **divergente de F** é a função de três variáveis definida por

9
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que rot **F** é um campo vetorial, mas div **F** é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, o divergente de **F** pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e **F**:

10
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, encontre div **F**.

SOLUÇÃO Pela definição de divergente (Equação 9 ou 10), temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

□

Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$, então rot $\mathbf{F}$ também é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$. Como tal, podemos calcular seu divergente. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

11 TEOREMA Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO Usando as definições de divergente e rotacional temos

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}$$

$$= 0$$

pois os termos se cancelam aos pares, pelo Teorema de Clairaut. □

EXEMPLO 5 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja, $\mathbf{F} \neq \text{rot}\,\mathbf{G}$.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 mostramos que

$$\text{div}\,\mathbf{F} = z + xz$$

e portanto $\text{div}\,\mathbf{F} \neq 0$. Se fosse verdade que $\mathbf{F} = \text{rot}\,\mathbf{G}$, pelo Teorema 11, teríamos

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \text{div rot}\,\mathbf{G} = 0$$

o que contradiz $\text{div}\,\mathbf{F} \neq 0$. Portanto $\mathbf{F}$ não é o rotacional de outro campo vetorial. □

Novamente, a razão para o nome *divergente* pode ser entendida no contexto da mecânica dos fluidos. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a velocidade de um fluido (ou gás), então div $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa a taxa de variação total (com relação ao tempo) da massa do fluido (ou gás) escoando do ponto (x, y, z), por unidade de volume. Em outras palavras, div $\mathbf{F}(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z). Se div $\mathbf{F} = 0$, então $\mathbf{F}$ é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f. Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão frequentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado **operador de Laplace** ou laplaciano, por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

em termos de suas componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

FORMAS VETORIAIS DO TEOREMA DE GREEN

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil futuramente. Considere uma região plana D, sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Então, podemos considerar o campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Portanto,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

12

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

13

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de $\mathbf{F}$ ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de $\mathbf{F}$ na região D delimitada por C.

1-8 Determine (a) o rotacional e (b) o divergente do campo vetorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2 y\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 yz\,\mathbf{i} + xy^2 z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + y \operatorname{tg}^{-1}(x/z)\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$

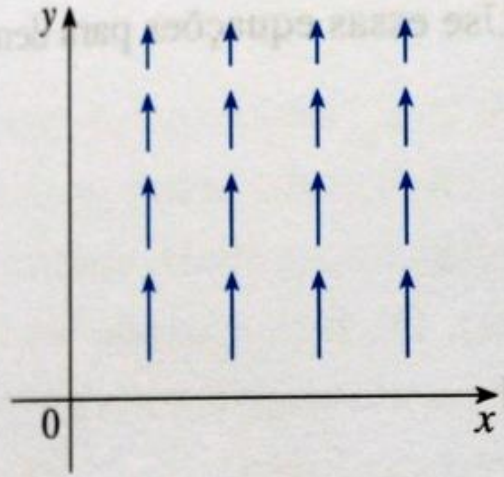
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, e^{xy}, e^{xyz} \rangle$

9-11 O campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais (em outras palavras, $\mathbf{F}$ é independente de z e sua componente z é 0).

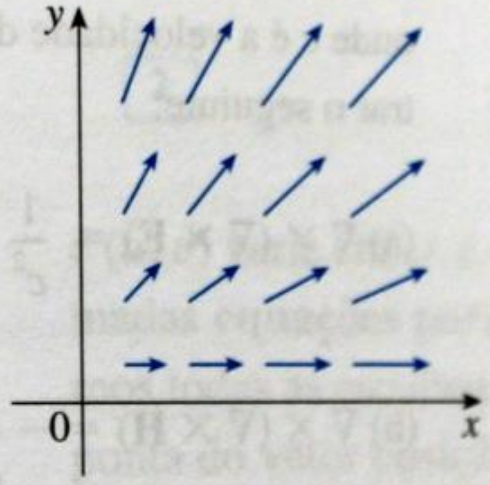
(a) O div $\mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Explique.

(b) Determine se o rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção rot $\mathbf{F}$ aponta?

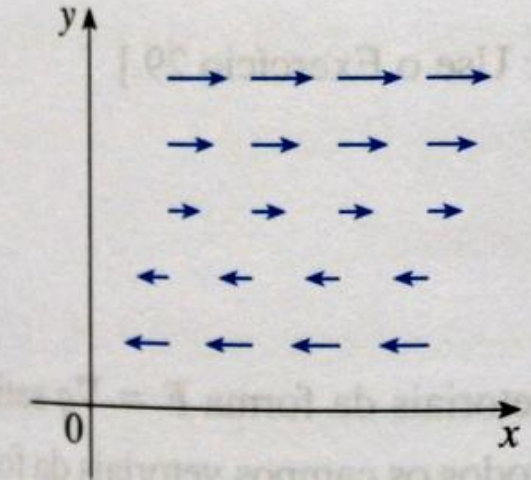
9.



10.



11.



12. Seja f um campo escalar e $\mathbf{F}$ um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f

(b) grad f

(c) div $\mathbf{F}$

(d) rot(grad f)

(e) grad $\mathbf{F}$

(f) grad(div $\mathbf{F}$)

(g) div(grad f)

(h) grad(div f)

(i) rot(rot $\mathbf{F}$)

(j) div(div $\mathbf{F}$)

(k) (grad f) $\times$ (div $\mathbf{F}$)

(l) div(rot(grad f))

13-18 Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + xe^z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x}\,\mathbf{i} + e^{-x}\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\cos xy\,\mathbf{i} + x\cos xy\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\mathbf{k}$

23-29 Demonstre a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ forem campos vetoriais, então $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ e $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ serão definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot}\mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$