

CÁLCULO III

1º semestre de 2014

Aulas 9-10

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2

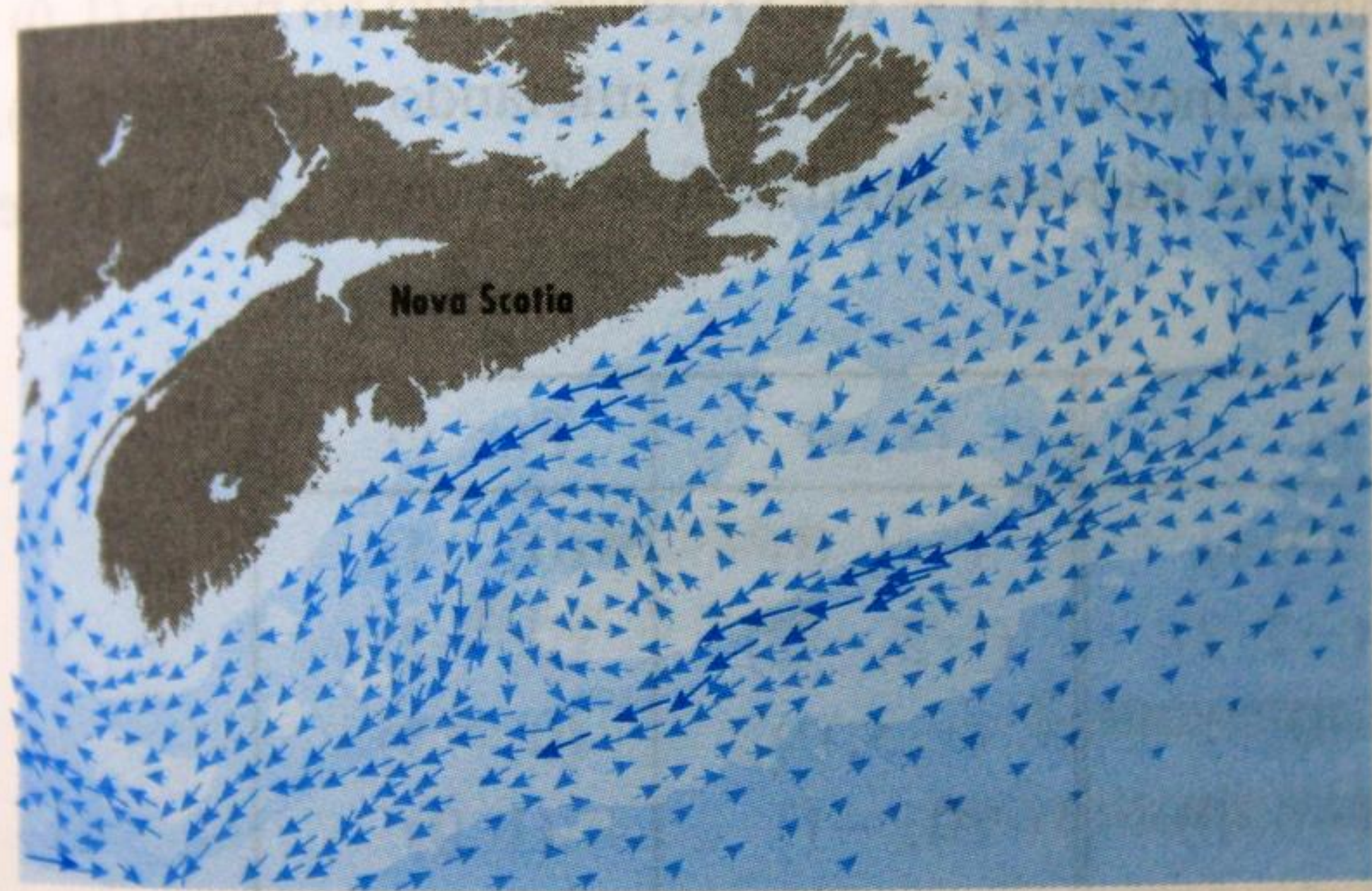
Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a velocidade escalar, a direção e o sentido do vento em pontos a 10 m da superfície, na área da baía de São Francisco (Observe que os padrões de vento em dias consecutivos são bem diferentes). Associado a cada ponto do ar, podemos imaginar um vetor velocidade do vento. Este é um exemplo de *campo vetorial de velocidade*.



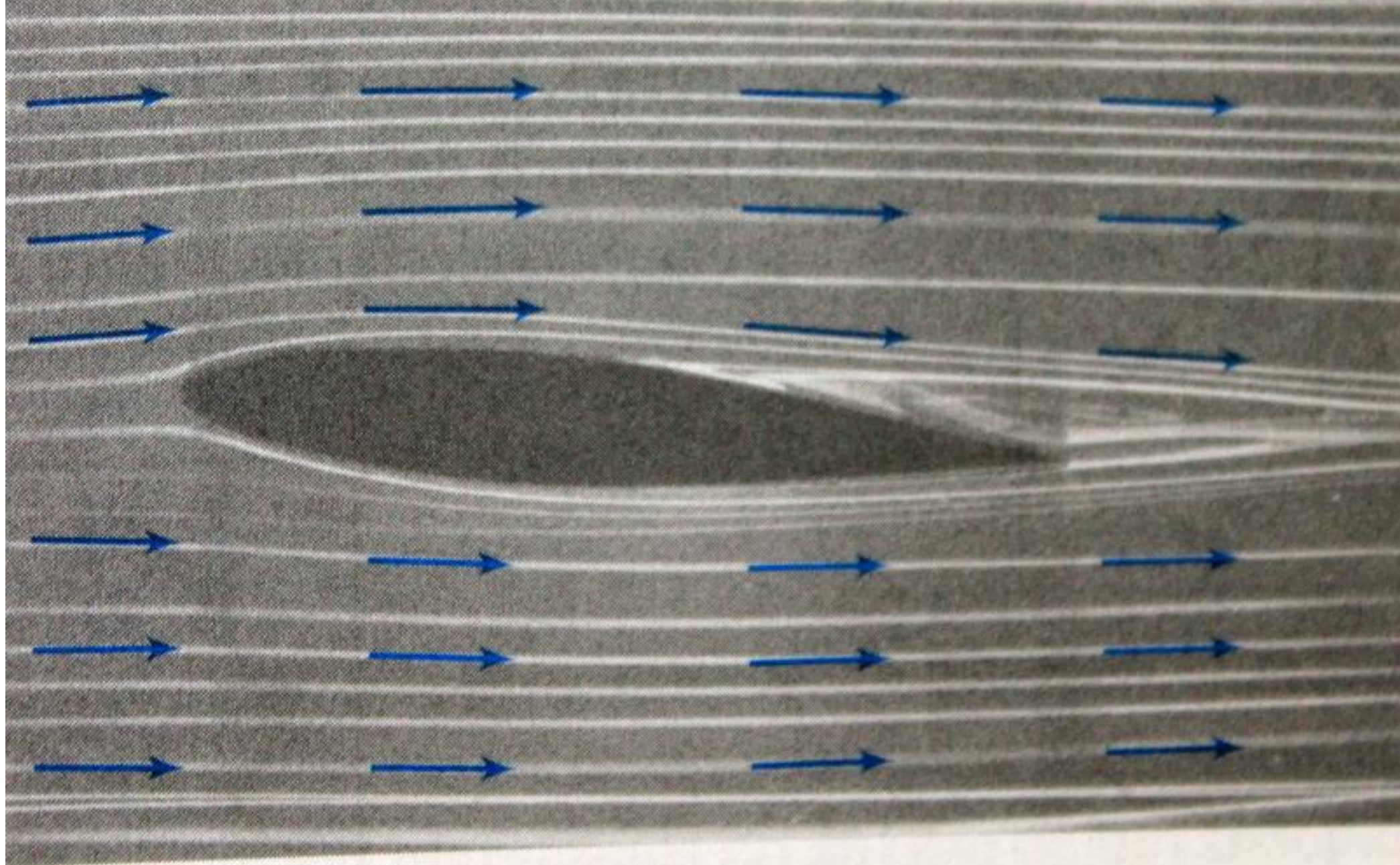
(a) 20 de fevereiro de 2007, 12 horas



(b) 21 de fevereiro de 2007, 14 horas



(a) Correntes oceânicas em frente à costa de Nova Scotia



(b) Escoamento do ar por um aerofólio inclinado

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

I DEFINIÇÃO Seja D um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em $\mathbb{R}^2$** é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

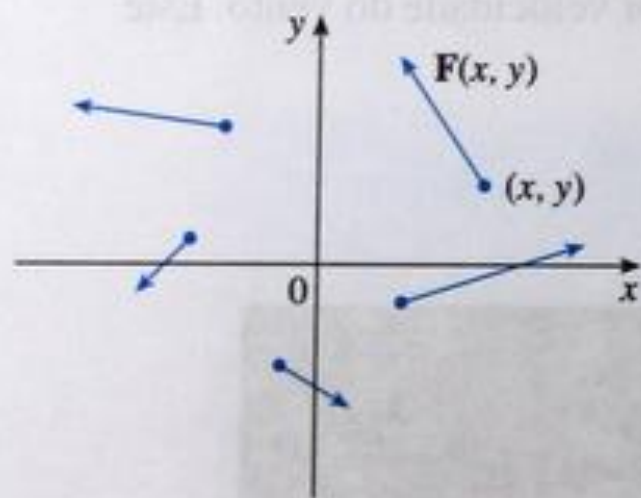


FIGURA 3
Campo vetorial no $\mathbb{R}^2$

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores $\mathbf{F}(x, y)$, começando no ponto (x, y) . É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y) , mas podemos visualizar $\mathbf{F}$ fazendo isso para alguns pontos representativos em D , como na Figura 3. Como $\mathbf{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q , da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou, de forma mais compacta, $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$

Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distingui-los dos campos vetoriais.

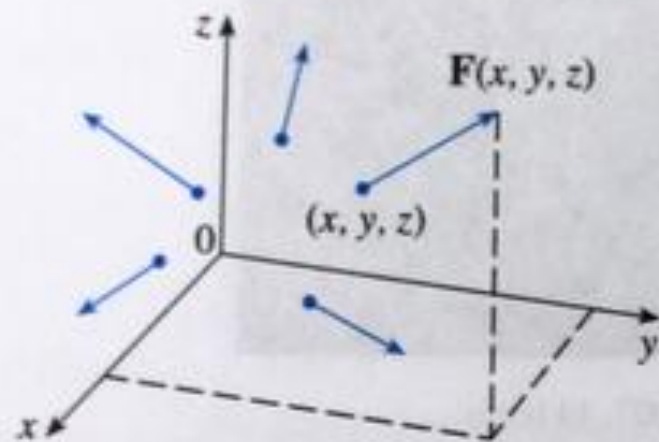


FIGURA 4
Campo vetorial no $\mathbb{R}^3$

2 DEFINIÇÃO Seja E um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial** em $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ está ilustrado na Figura 4. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P , Q e R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

Como nas funções vetoriais na Seção 13.1, podemos definir a continuidade dos campos vetoriais e mostrar que $\mathbf{F}$ será contínua se e somente se suas funções componentes P , Q e R forem contínuas.

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ e escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então, $\mathbf{F}$ se torna uma função que associa um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a um vetor $\mathbf{x}$.

EXEMPLO 1 Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ desenhando alguns de seus vetores $\mathbf{F}(x, y)$, como na Figura 3.

SOLUÇÃO Como $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 5. Como $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, desenhamos o vetor $\langle -1, 0 \rangle$ iniciando no ponto $(0, 1)$. Continuamos desse modo desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 5.

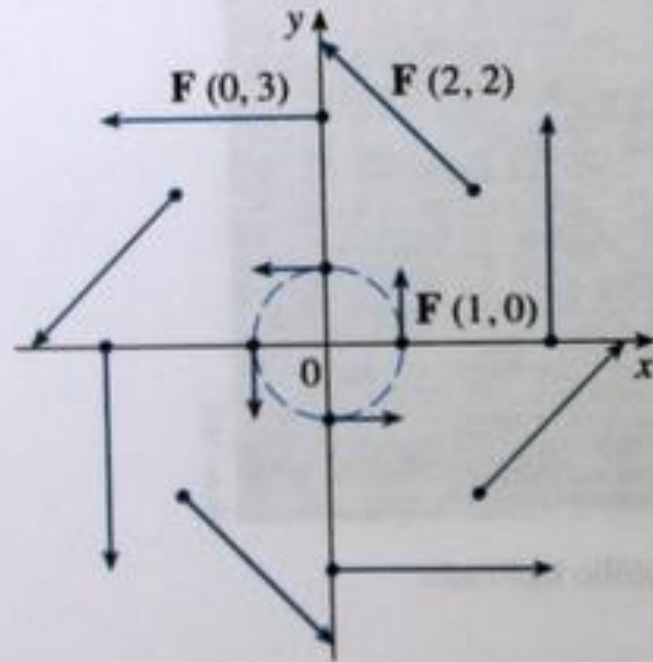


FIGURA 5
 $\mathbf{F}(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$

Na Figura 5, parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Para confirmar isso, vamos tomar o produto escalar do vetor posição $\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ com o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \cdot (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

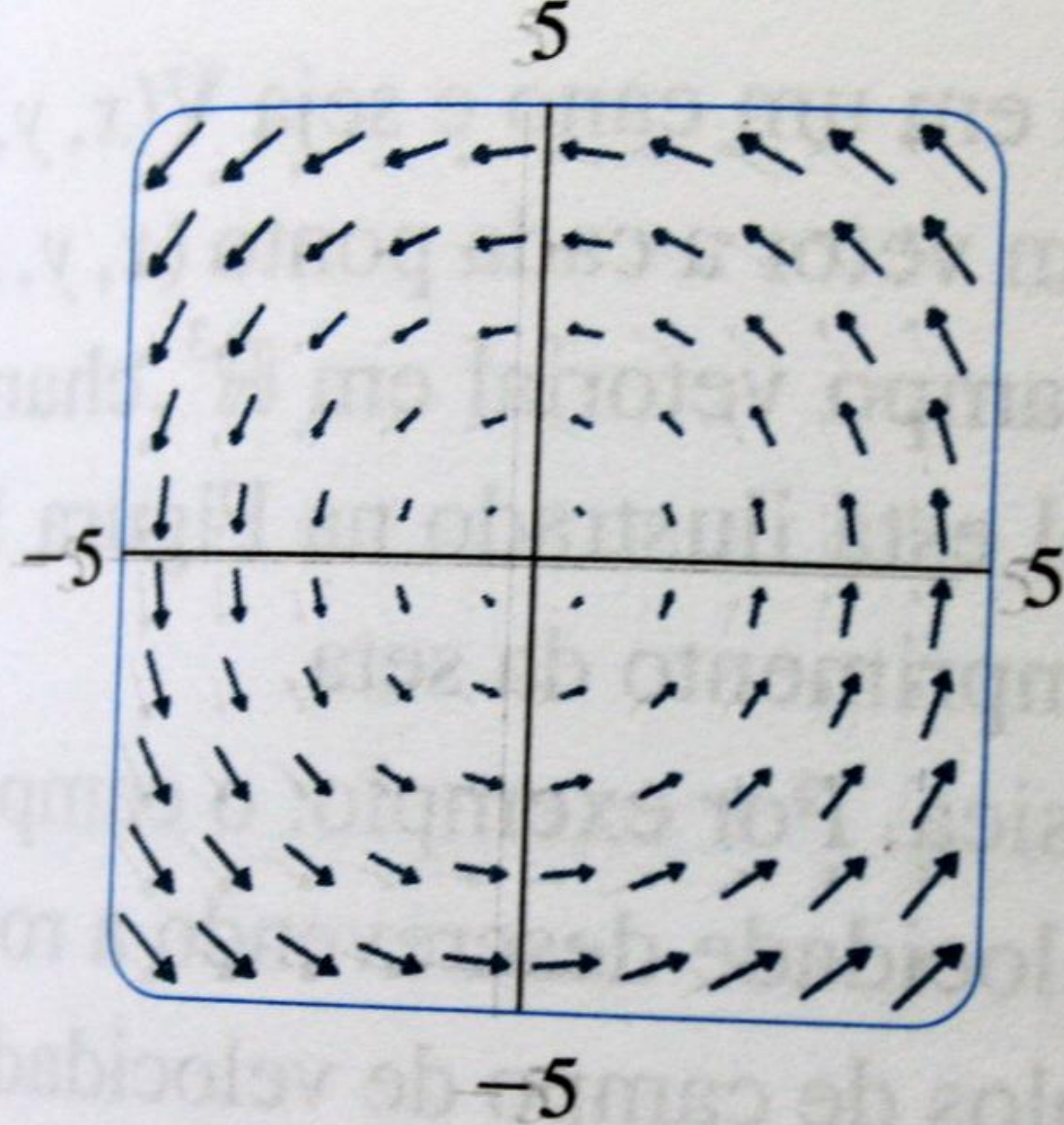


FIGURA 6

$$F(x, y) = \langle -y, x \rangle$$

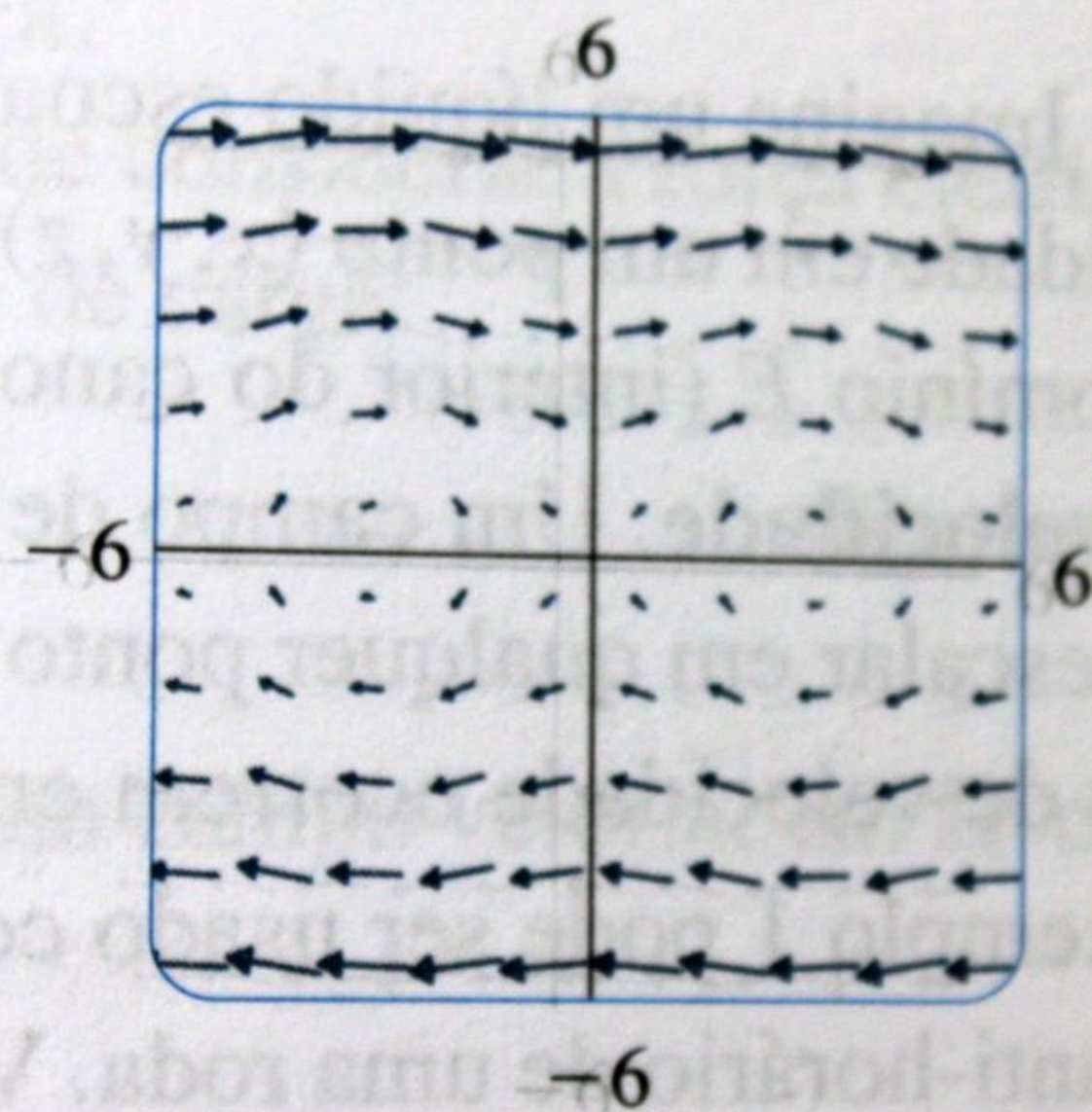


FIGURA 7

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \sin x \rangle$$

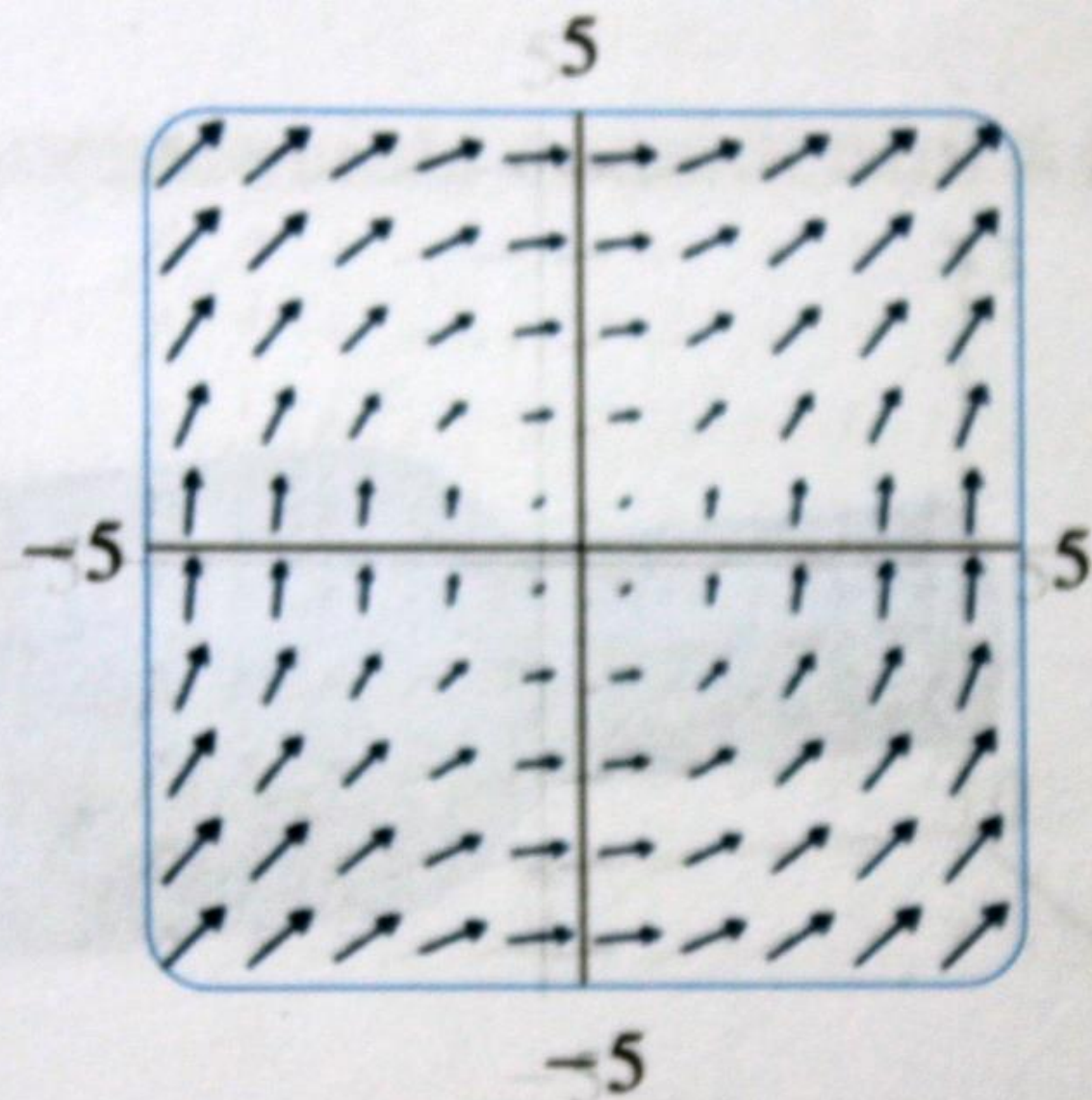
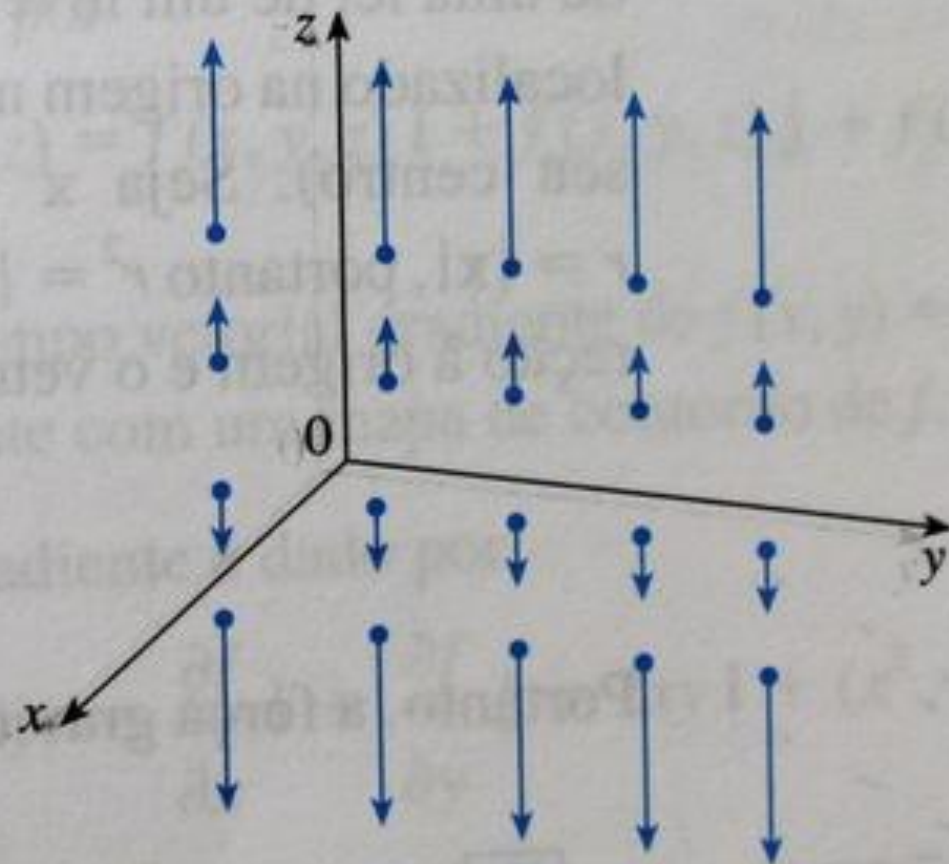


FIGURA 8

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$$

EXEMPLO 2 Esboce o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O desenho está mostrado na Figura 9. Observe que todos os vetores são verticais: apontando para cima, quando acima do plano xy , e para baixo, quando abaixo do plano xy . O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy .



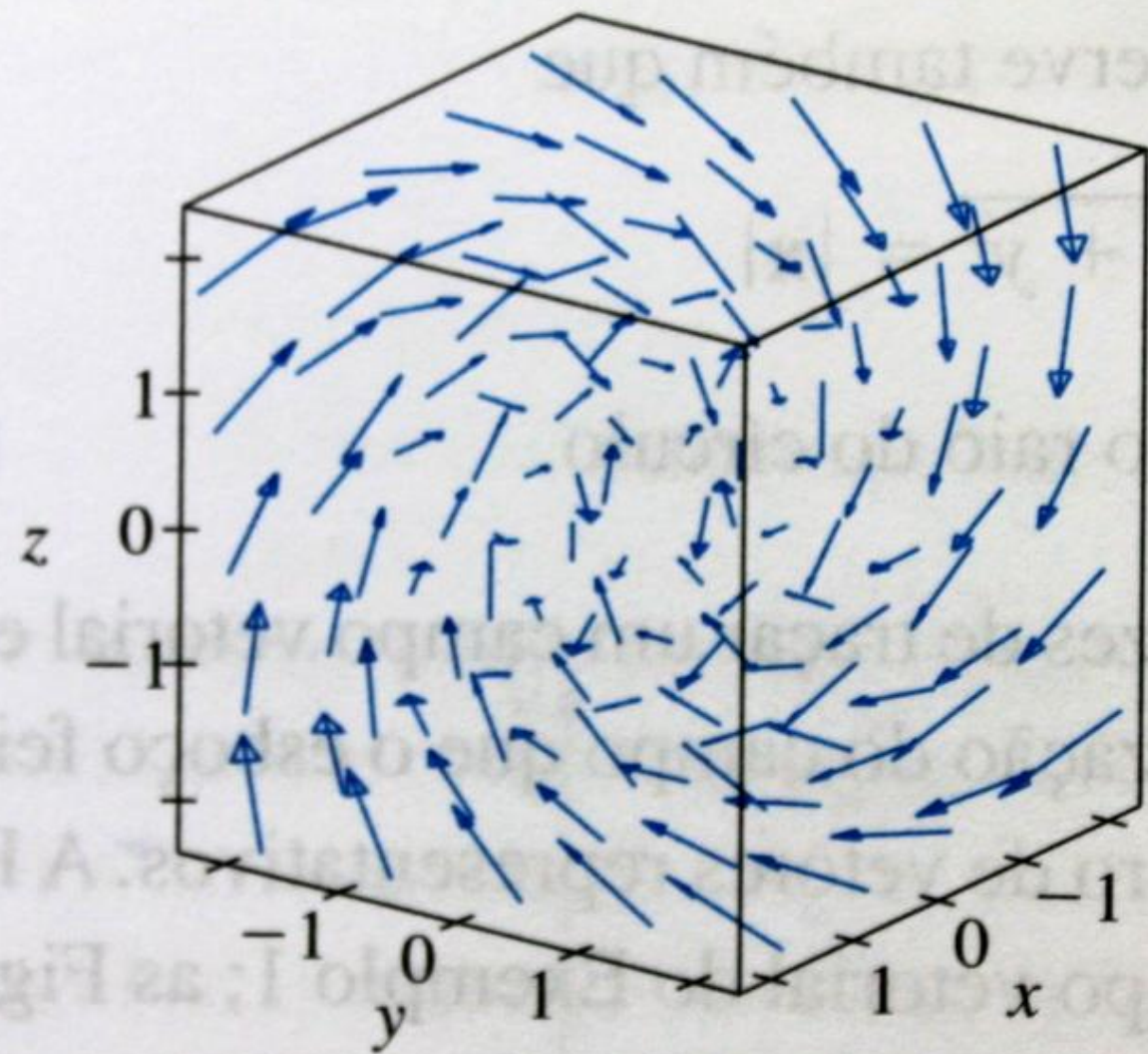


FIGURA 10

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

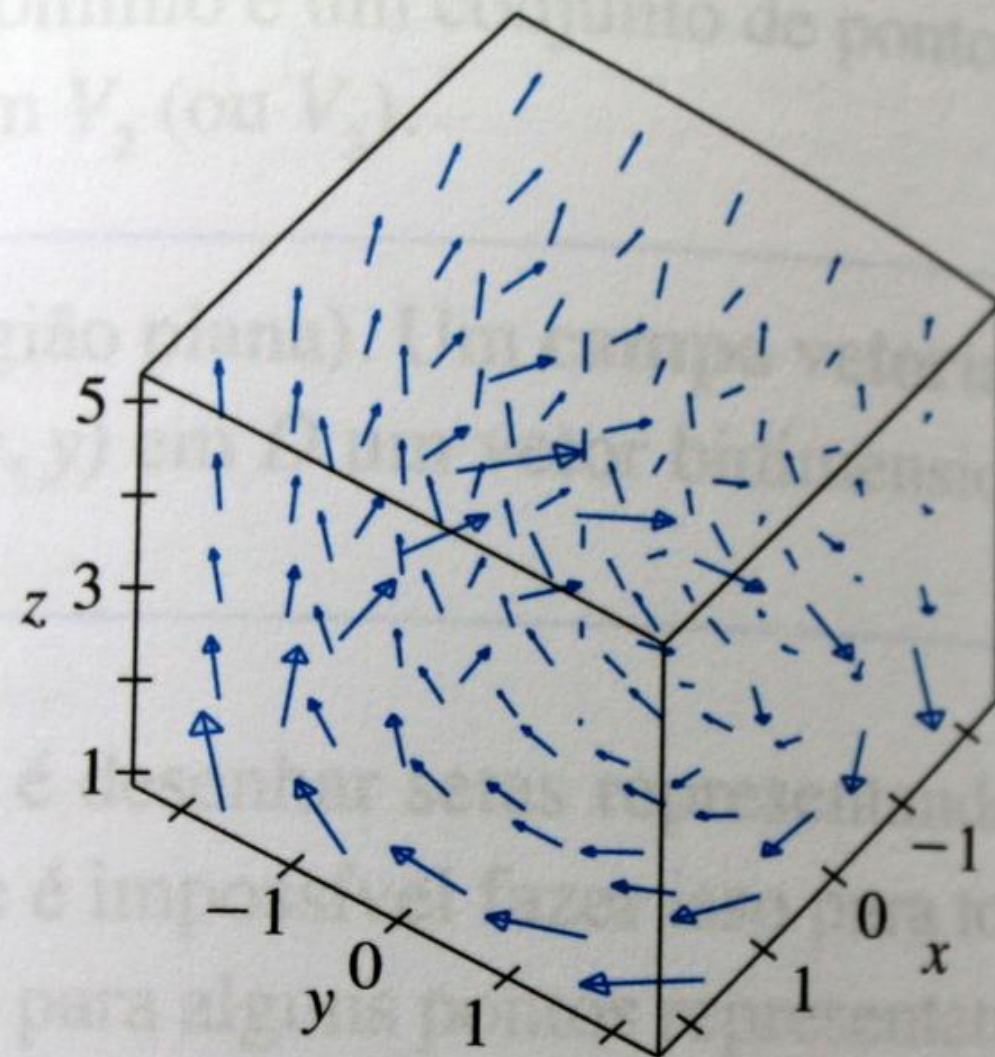


FIGURA 12

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z} \mathbf{i} + \frac{x}{z} \mathbf{j} + \frac{z}{4} \mathbf{k}$$

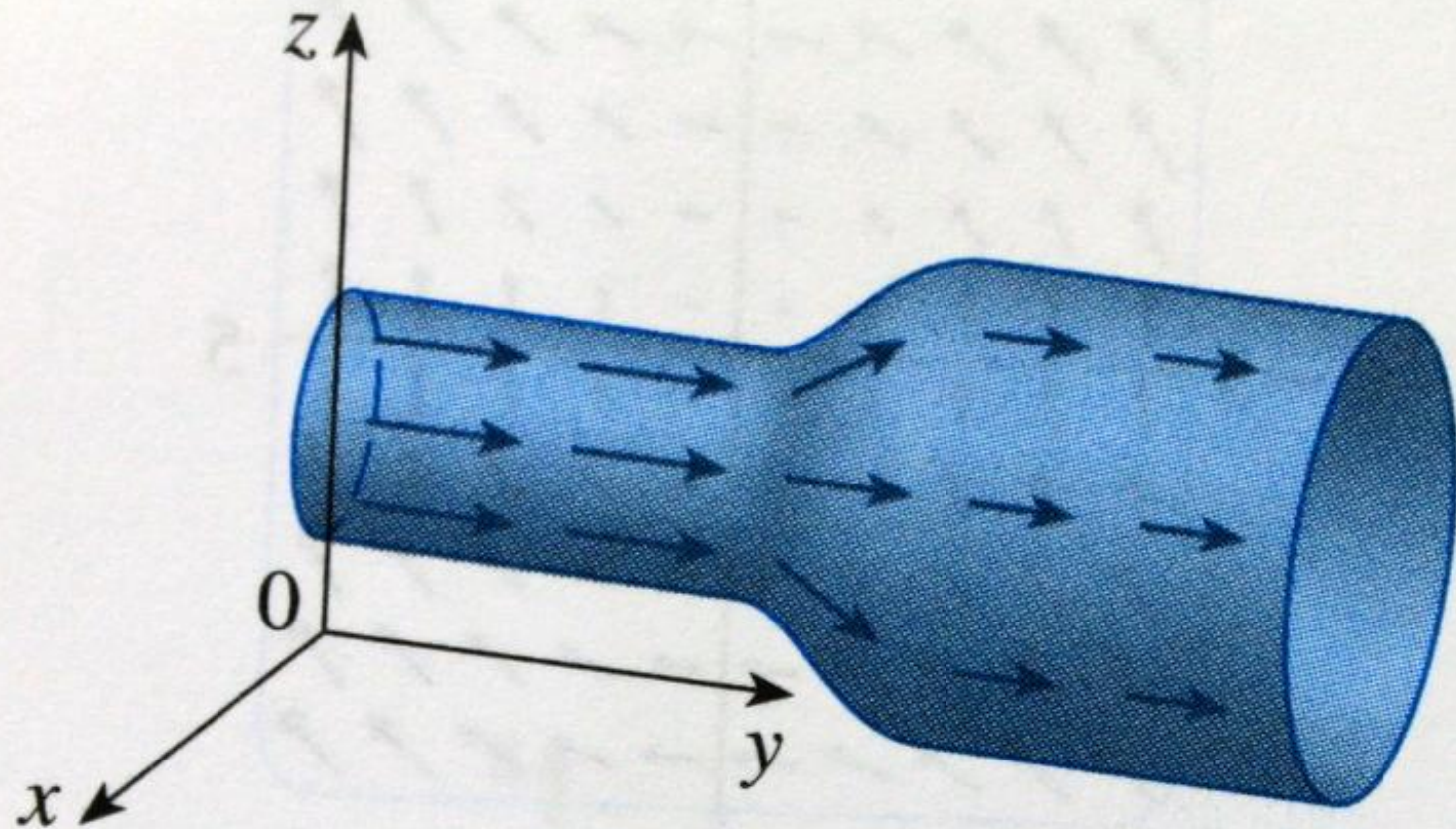


FIGURA 13
Campo de velocidade do escoamento
de um fluido

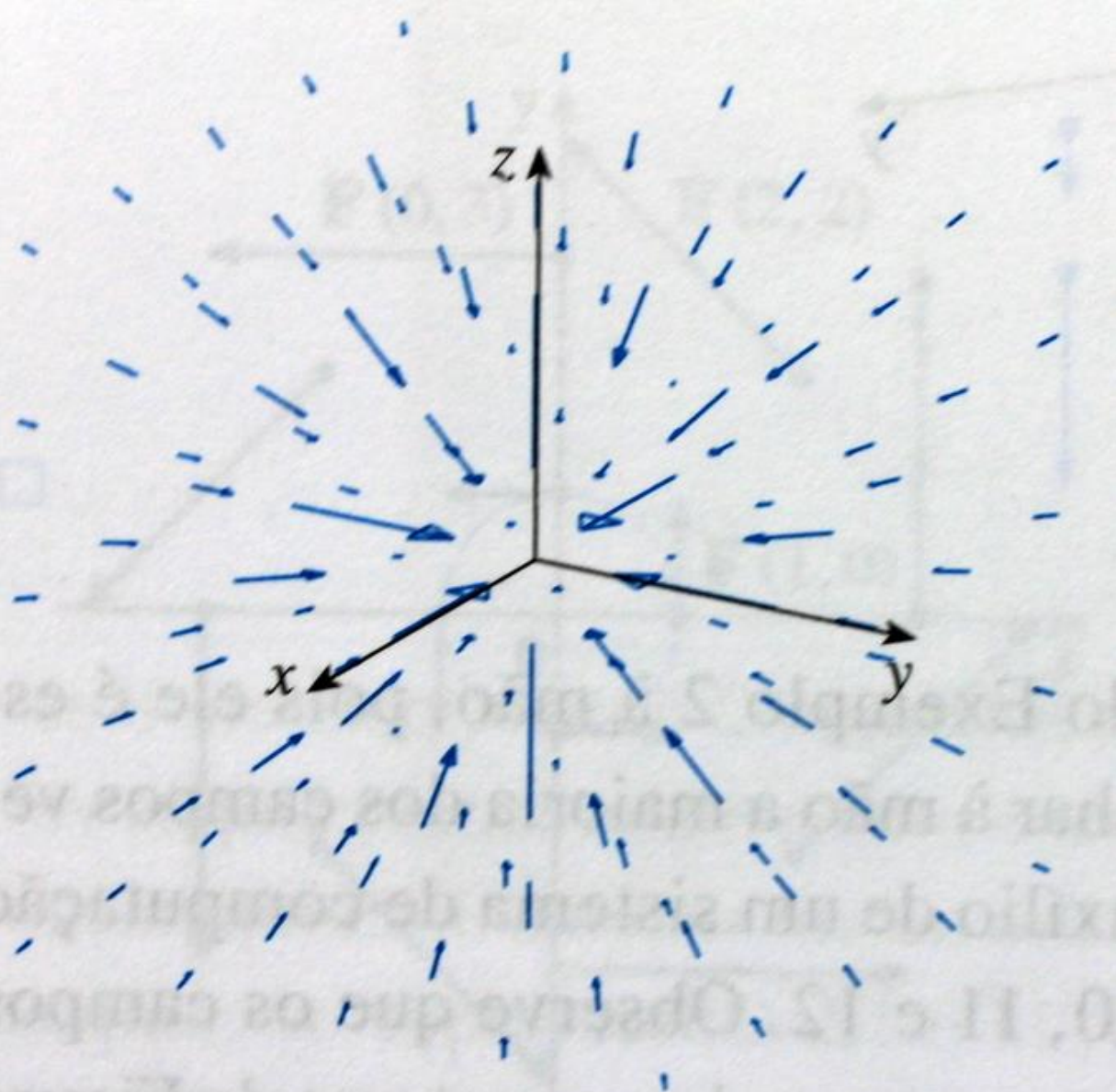


FIGURA 14

Campo de força gravitacional

EXEMPLO 4 A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional (esse é um exemplo de uma lei de um inverso do quadrado). Vamos admitir que o objeto com massa M esteja localizado na origem no $\mathbb{R}^3$ (por exemplo, M poderia ser a massa da Terra e a origem seria seu centro). Seja $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ o vetor posição do objeto com massa m . Então $r = |\mathbf{x}|$, portanto $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

3

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

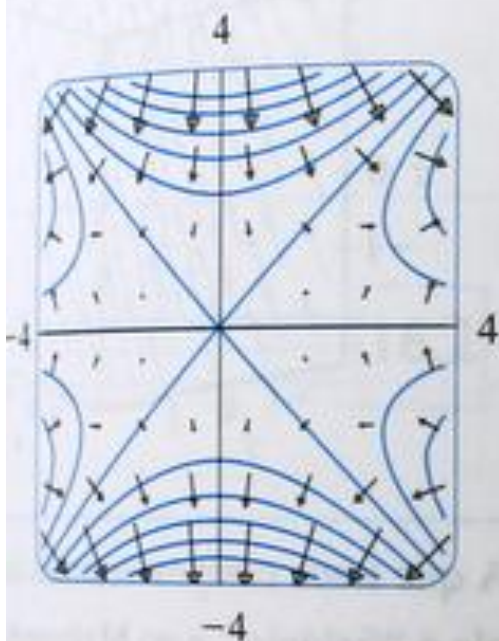
CAMPOS GRADIENTE

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente ∇f (ou $\text{grad } f$) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e é denominado **campo vetorial gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \mathbf{i} + f_y(x, y, z) \mathbf{j} + f_z(x, y, z) \mathbf{k}$$



RA 15

EXEMPLO 6 Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de f . Como estão relacionados?

SOLUÇÃO O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$$

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo vetorial gradiente. Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico. $\square$

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação, f é denominada **função potencial** de $\mathbf{F}$.

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional $\mathbf{F}$ do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{F}(x, y, z)$$

1-10 Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}$, desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x \mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = y \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y) \mathbf{i} + x \mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y \mathbf{i} - x \mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{k}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y \mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

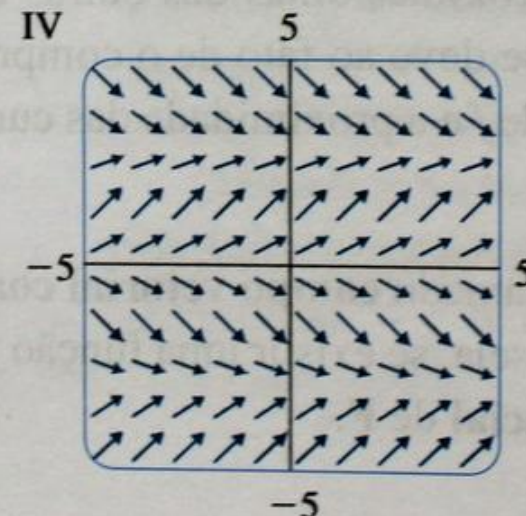
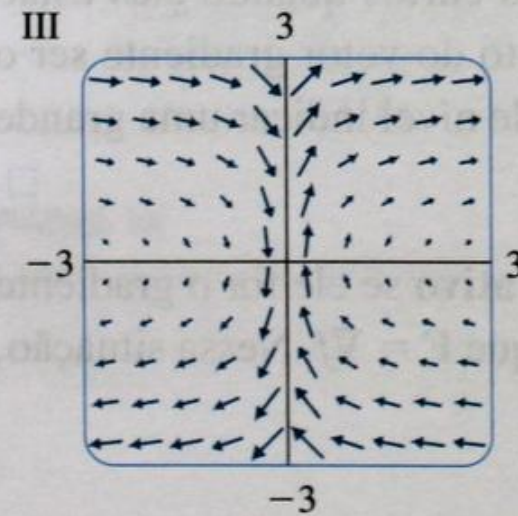
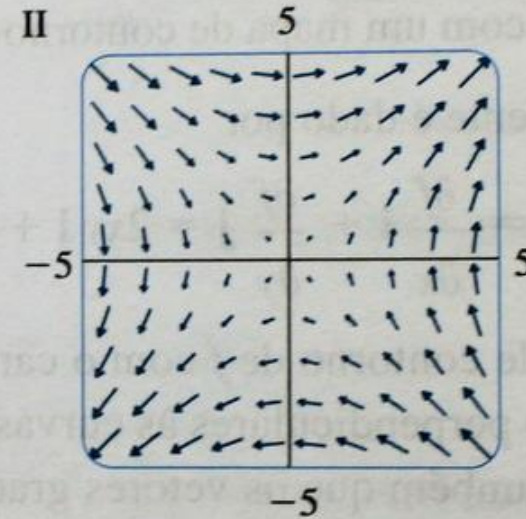
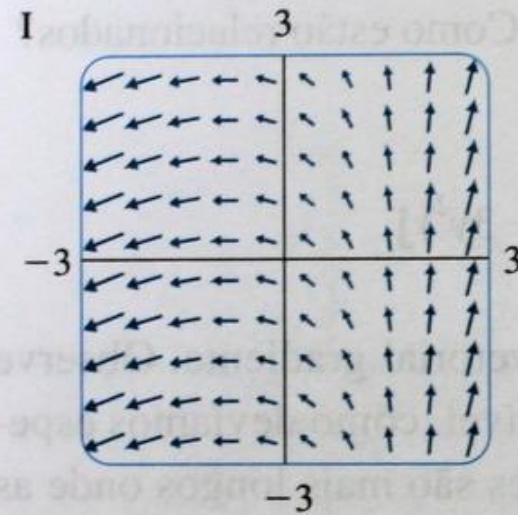
11-14 Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \sin y \rangle$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$



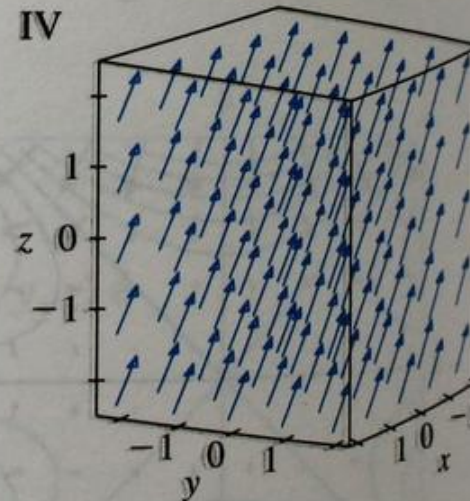
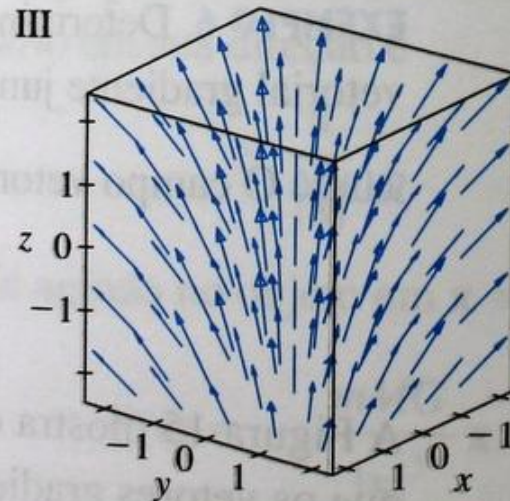
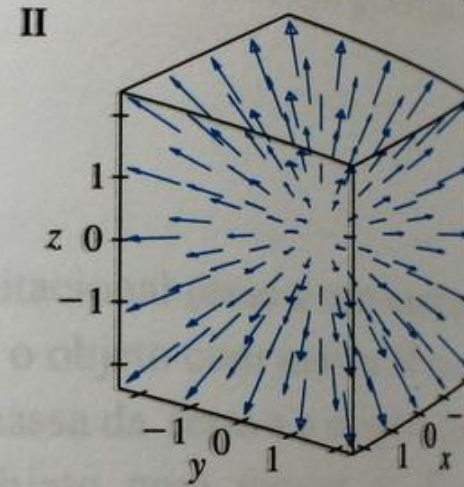
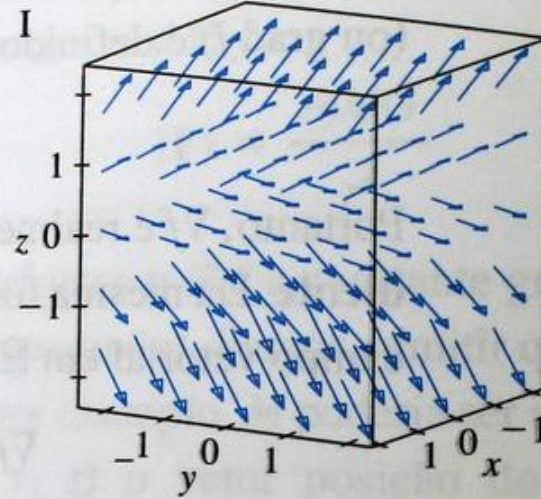
15-18 Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$



21-24 Determine o campo vetorial gradiente de f .

21. $f(x, y) = \ln(x + 2y)$

22. $f(x, y) = x^\alpha e^{-\beta x}$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

24. $f(x, y, z) = x \cos(y/z)$

25-26 Determine o campo vetorial gradiente ∇f de f e o esboce.

25. $f(x, y) = x^2 - y$

26. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

27-28 Trace o campo vetorial gradiente de f e o mapa de contorno de f . Explique como eles estão relacionados.

27. $f(x, y) = \sin x + \sin y$

28. $f(x, y) = \sin(x + y)$

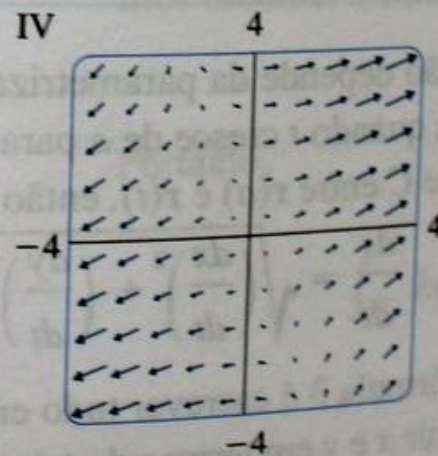
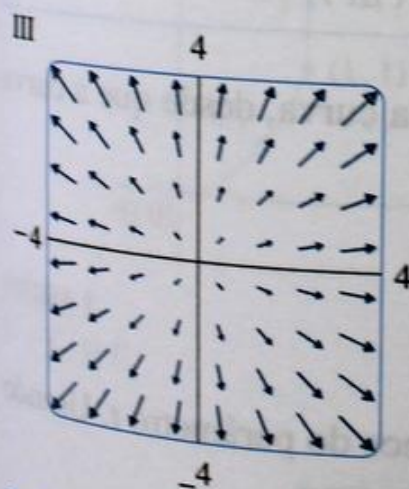
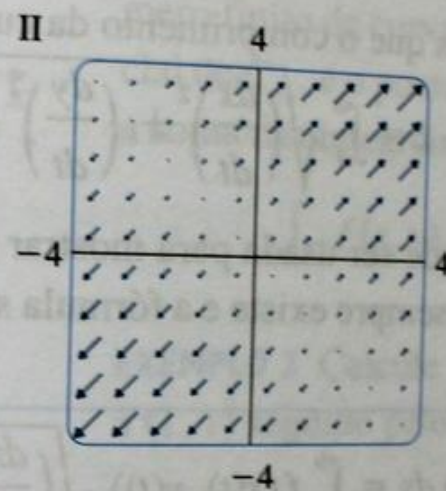
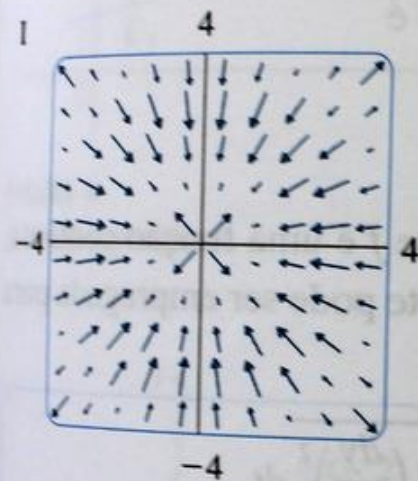
29-32 Faça uma correspondência entre as funções f e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes (rotulados de I-IV). Justifique suas escolhas.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2$

30. $f(x, y) = x(x + y)$

31. $f(x, y) = (x + y)^2$

32. $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$



INTEGRAIS DE LINHA

Nesta seção, definiremos uma integral que é semelhante à integral unidimensional, exceto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva C . Tais integrais são chamadas *integrais de linha*. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

I

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$a \leq t \leq b$$

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, e supomos que C seja uma curva lisa. [Isso significa que $\mathbf{r}'$ é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Veja a Seção 13.3.] Se dividirmos o intervalo $[a, b]$ do parâmetro em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem C em n subarcos de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ (veja a Figura 1). Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ no i -ésimo subarco. (Isso corresponde a um ponto t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$.) Se f é uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C , calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*) , multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

o que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida, tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição, por analogia com a integral unidimensional:

2 DEFINIÇÃO Se f é definida sobre uma curva lisa C dada pelas Equações 1, então a integral de linha de f sobre C é

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.2 verificamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

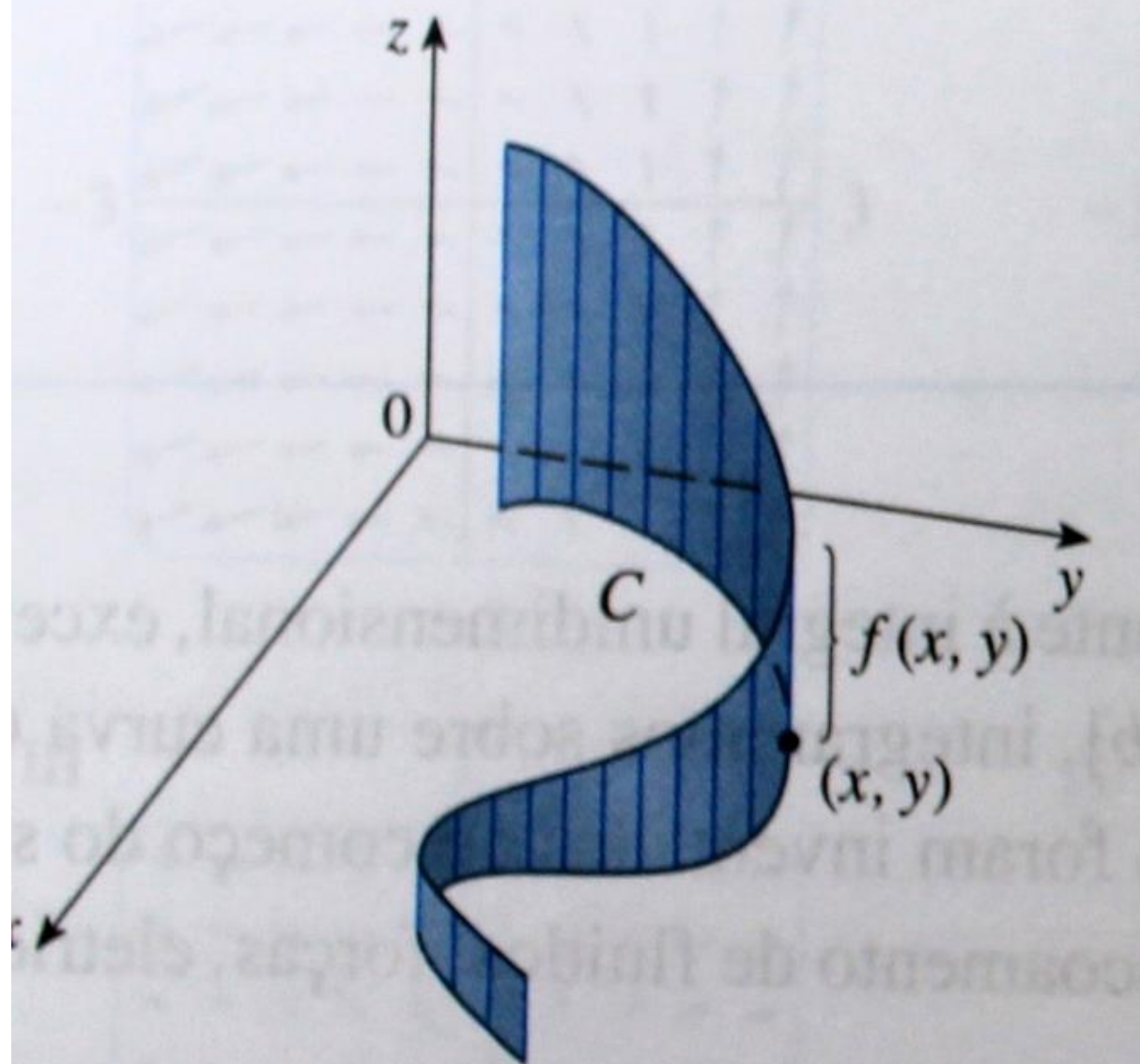
3

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida uma única vez quando t cresce de a para b .

Se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



No caso especial em que C é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ a $(b, 0)$, tomando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C da seguinte forma: $x = x$, $y = 0$, $a \leq x \leq b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, 0) dx$$

e, nesse caso, a integral de linha se reduz a uma integral unidimensional.

Assim como para as integrais unidimensionais, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) ds$ representa a área da “cerca” ou “cortina” da Figura 2, cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C (2 + x^2 y) ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Para usar a Fórmula 3, precisamos de equações paramétricas que representem a curva C . Como já vimos, o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \quad y = \sin t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (veja a Figura 3). Logo, da Fórmula 3, temos

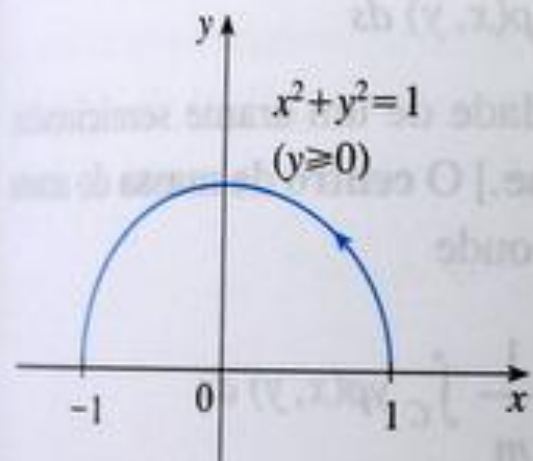


FIGURA 3

$$\int_C (2 + x^2 y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi$$

$$= 2\pi + \frac{2}{3}$$

□

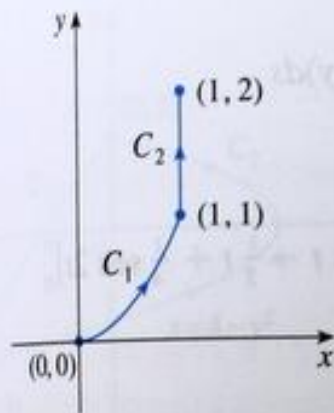


FIGURA 5
 $C = C_1 \cup C_2$

EXEMPLO 2 Calcule $\int_C 2x \, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5. C_1 é o gráfico de uma função de x ; então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Portanto,

$$\int_{C_1} 2x \, ds = \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \quad y = y \quad 1 \leq y \leq 2$$

e

$$\int_{C_2} 2x \, ds = \int_1^2 2(1) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} \, dy = \int_1^2 2 \, dy = 2$$

Então,

$$\int_C 2x \, ds = \int_{C_1} 2x \, ds + \int_{C_2} 2x \, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

Qualquer interpretação física da integral de linha $\int_C f(x, y) \, ds$ depende da interpretação física da função f . Suponha que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear num ponto (x, y) de um arame fino com o formato de uma curva C . A massa da parte do arame do ponto P_{i-1}

até P_i na Figura 1 é aproximadamente $\rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$. Assim, a massa total do arame terá valor aproximado de $\sum \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$. Tomando cada vez mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da **massa** m do arame como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y) ds$$

[Por exemplo: se $f(x, y) = 2 + x^2 y$ representa a densidade de um arame semicircular, então a integral do Exemplo 1 representa a massa do arame.] O **centro de massa** do arame com função densidade ρ está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

4

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds$$

EXEMPLO 3 Um arame com o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto for proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$, e determinamos que $ds = dt$. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante e, então, a massa do arame é

$$m = \int_C k(1 - y) ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t) dt = k[t + \cos t]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Das Equações 4, temos

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds = \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_C y k(1 - y) ds$$

$$= \frac{1}{\pi - 2} \int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{\pi - 2} \left[-\cos t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi$$

$$= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}$$

Por simetria vemos que $\bar{x} = 0$ e o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \right) \approx (0, 0,38)$$



FIGURA 6

(Veja a Figura 6.)

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas **integrais de linha de f ao longo de C com relação a x e y** :

5

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

6

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

Frequentemente, as integrais de linha com relação a x e y aparecem juntas. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

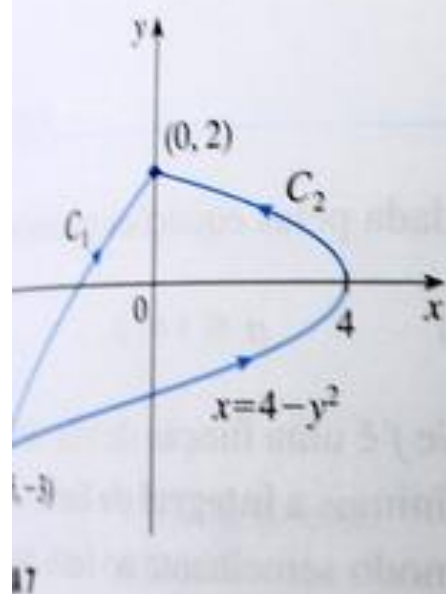
$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Quando estamos nos preparando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar na representação paramétrica da curva cuja descrição geométrica foi dada. Em especial, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, portanto, é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em $\mathbf{r}_0$ e termina em $\mathbf{r}_1$ é dada por

8

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.)



EXEMPLO 4 Calcule $\int_C y^2 dx + x dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ (veja a Figura 7).

SOLUÇÃO

(a) A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Use a Equação 8 com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Assim, $dx = 5 dt$, $dy = 5 dt$ e a Fórmula 7 fornece

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2 (5 dt) + (5t - 5)(5 dt) \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\ &= 5 \left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

(b) Como a parábola é dada em função de y , usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leq y \leq 2$$

Então $dx = -2y dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\int_{C_2} y^2 dx + x dy = \int_{-3}^2 y^2 (-2y) dy + (4 - y^2) dy$$

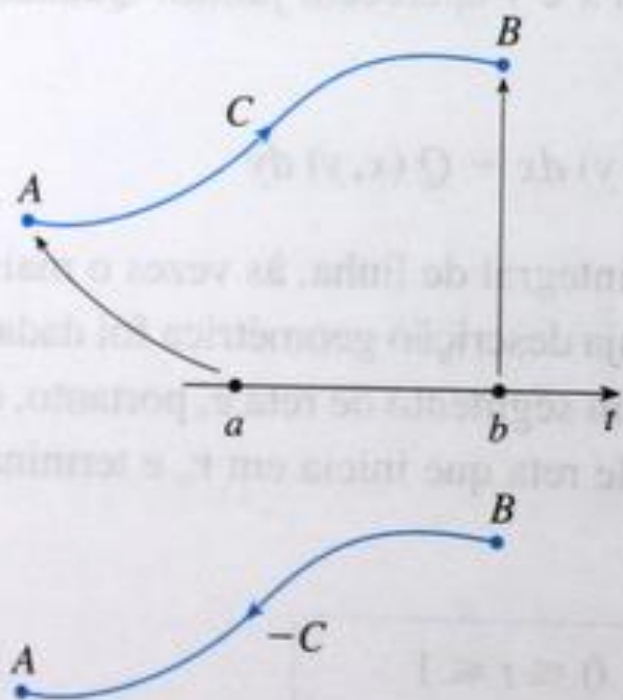


FIGURA 8

Em geral, dada a parametrização $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, determina-se uma **orientação** da curva C , com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a $t = b$).

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C , mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx \quad \int_{-C} f(x, y) dy = - \int_C f(x, y) dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha não se altera ao revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

Isso ocorre porque Δs_i é sempre positivo, enquanto Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando invertemos a orientação de C .

INTEGRAIS DE LINHA NO ESPAÇO

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial lisa dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \leq t \leq b$$

ou pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C , então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito nas curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (ver a Seção 13.3.3).

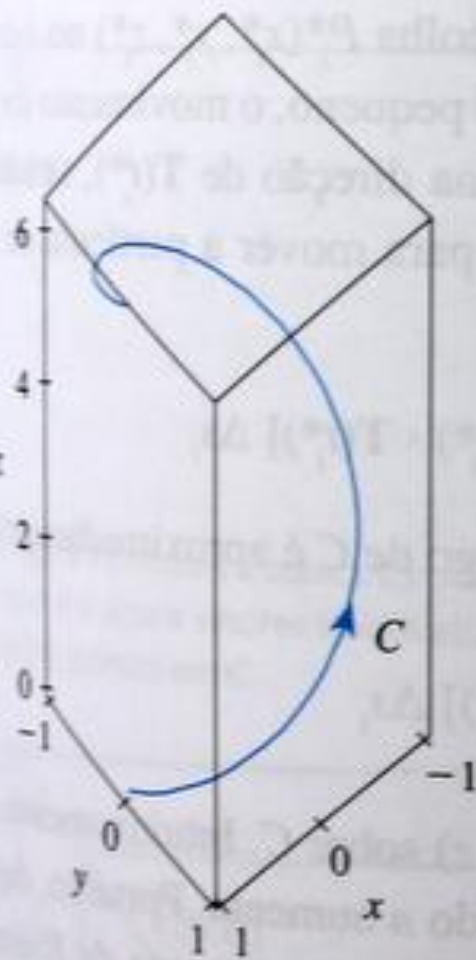
Também podemos definir integrais de linha ao longo de C em relação a x , y e z .
Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt\end{aligned}$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano, podemos calcular integrais da forma

10
$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t .



EXEMPLO 5 Calcule $\int_C y \sin z \, ds$, onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (veja a Figura 9).

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\begin{aligned} \int_C y \sin z \, ds &= \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$, onde C consiste no segmento de reta C_1 que une $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a curva C . Usando a Equação 8, escrevemos C como



FIGURA 9

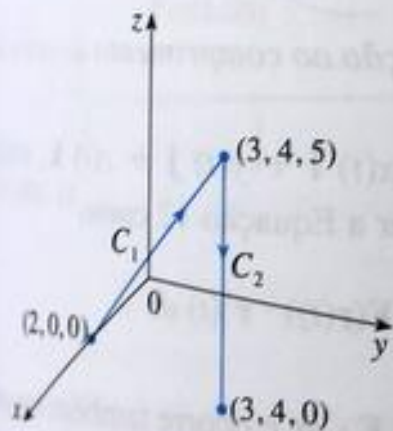


FIGURA 10

une $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a curva C . Usando a Equação 8, escrevemos C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \quad y = 4t \quad z = 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^1 (4t) \, dt + (5t)4 \, dt + (2 + t)5 \, dt \\ &= \int_0^1 (10 + 29t) \, dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 24,5 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, C_2 pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então, $dx = 0 = dy$, de modo que

$$\int_{C_2} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_0^1 3(-5) \, dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = 24,5 - 15 = 9,5$$

□

INTEGRAIS DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS

Lembre-se, da Seção 6.4, no Volume I, que o trabalho feito por uma força $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é dado por $W = \int_a^b f(x) dx$. Depois, na Seção 12.3, vimos que o trabalho feito por uma força constante $\mathbf{F}$ para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ seja um campo de força contínuo em $\mathbb{R}^3$, tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1 (um campo de força em $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y). Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva lisa C .

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em subintervalos de mesmo tamanho (veja a Figura 1 para o caso bidimensional ou a Figura 11 para o caso tridimensional). Escolha $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i -ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro t_i^* . Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente unitário a P_i^* . Então, o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

II

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

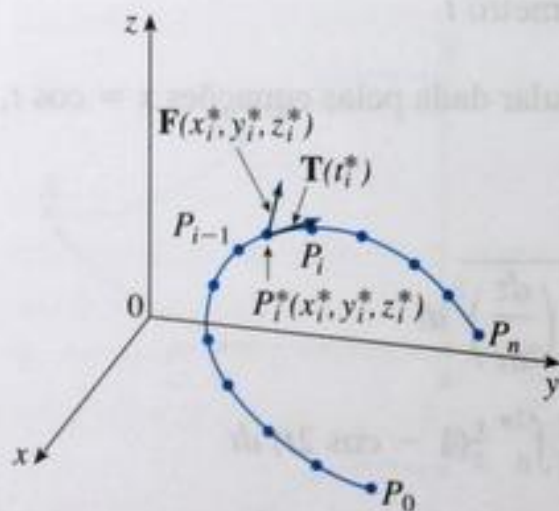


FIGURA 11

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) sobre C . Intuitivamente, podemos ver que essas aproximações devem melhorar quando n aumenta. Portanto, definimos o **trabalho** W feito por um campo de força $\mathbf{F}$ como o limite da soma de Riemann dada por (11), ou seja,

$$\boxed{12} \quad W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

A Equação 12 nos diz que o *trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força*.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$, então $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ e, pela Equação 9, podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

Essa última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física. Portanto, definimos a integral de linha de *qualquer* campo vetorial contínuo como a seguir:

13 DEFINIÇÃO Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então, a **integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

• A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

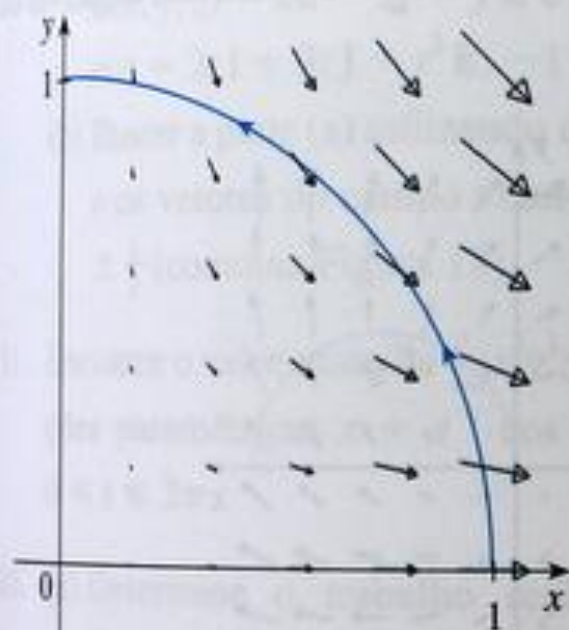


FIGURA 12

EXEMPLO 7 Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} - xy \mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

SOLUÇÃO Como $x = \cos t$ e $y = \sin t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t \mathbf{i} - \cos t \sin t \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Portanto o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) dt \\ &= 2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

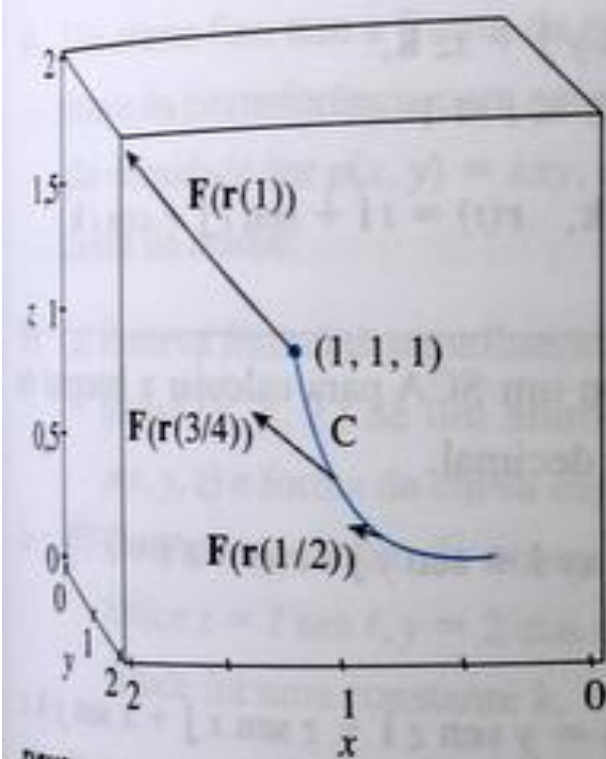
□

OBS. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocarem de sinal quando a orientação do caminho for invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pois o versor tangente $\mathbf{T}$ é substituído por seu oposto quando C é trocado por $-C$.

A Figura 13 mostra a cúbica torcida C do Exemplo 8 e alguns vetores típicos atuando sobre três pontos em C .



EXEMPLO 8 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right]_0^1 = \frac{27}{28} \quad \square \end{aligned}$$

Finalmente, observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ seja dado sob a forma de componentes pela equação $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular sua integral de linha ao longo de C :

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\&= \int_a^b (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot (x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}) dt \\&= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt\end{aligned}$$

Mas essa última integral é exatamente a integral de linha de (10). Portanto, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{onde } \mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

Por exemplo, a integral $\int_C y dx + z dy + x dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

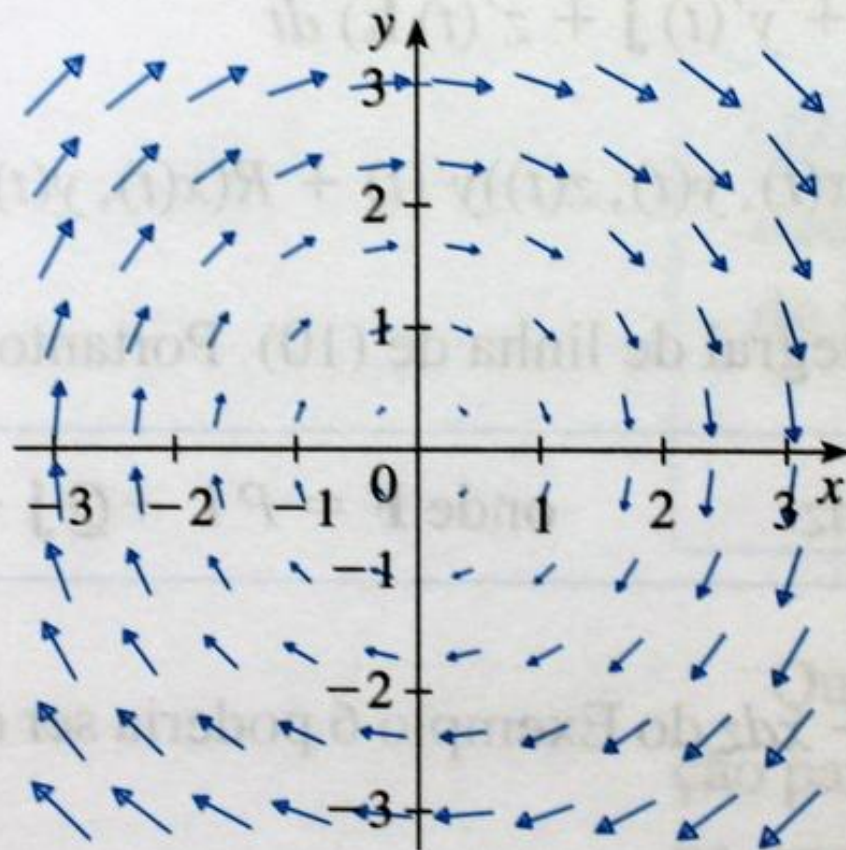
1-16 Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y^3 ds$, $C: x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 2$
2. $\int_C xy ds$, $C: x = t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$
3. $\int_C xy^4 ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.
4. $\int_C x \sin y ds$, C é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.
5. $\int_C (x^2 y^3 - \sqrt{x}) dy$,
 C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.
6. $\int_C \sin x dx$,
 C é o arco da curva $x = y^4$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.
7. $\int_C xy dx + (x - y) dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.

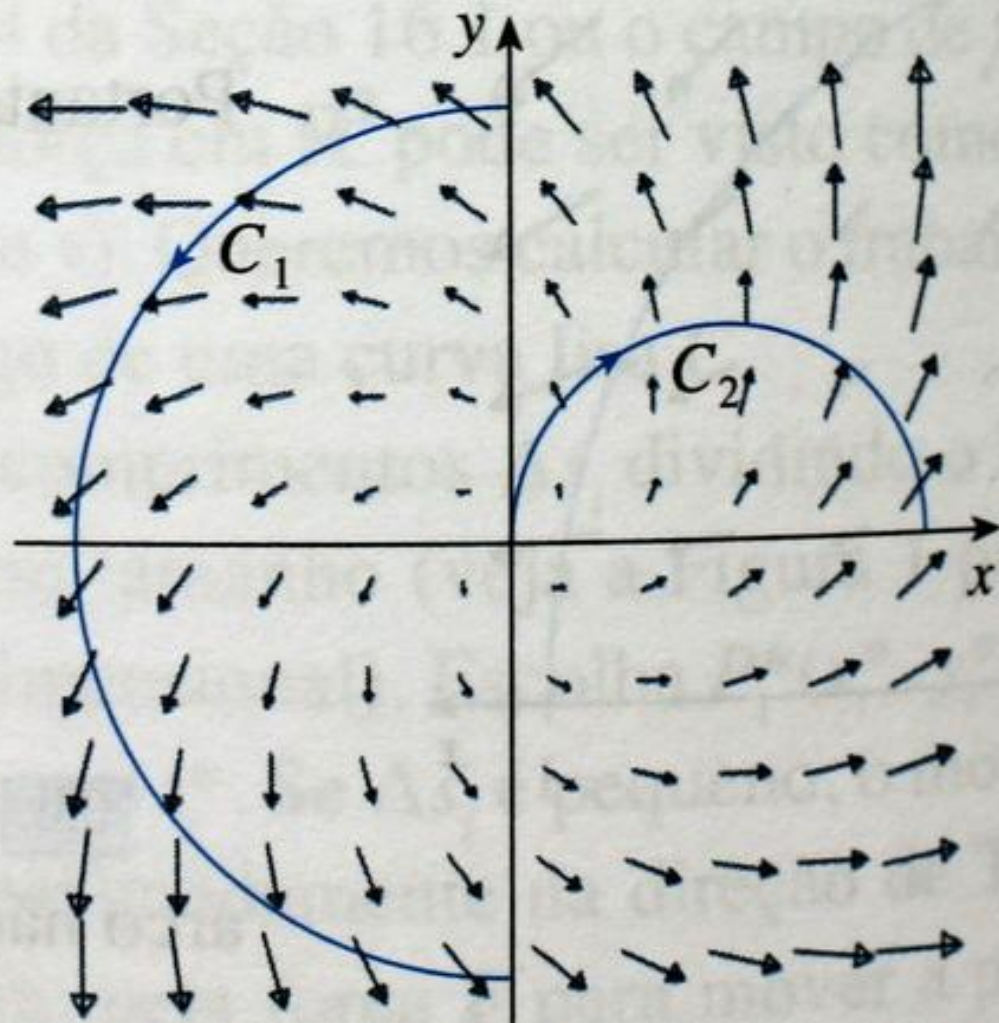
8. $\int_C x \sqrt{y} dx + 2y \sqrt{x} dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(1, 0)$ e no segmento de reta de $(1, 0)$ a $(4, 3)$.
9. $\int_C xy^3 ds$, $C: x = 4 \sin t$, $y = 4 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
10. $\int_C xyz^2 ds$, C é o segmento de reta de $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$.
11. $\int_C xe^{yz} ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.
12. $\int_C (2x + 9z) ds$, $C: x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$
13. $\int_C x^2 y \sqrt{z} dz$, $C: x = t^3$, $y = t$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$
14. $\int_C z dx + x dy + y dz$, $C: x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$
15. $\int_C (x + yz) dx + 2x dy + xyz dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$.
16. $\int_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$ e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$.

17. Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial mostrado na figura.

- (a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positiva, negativa ou zero.
- (b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positiva, negativa ou zero.



18. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas, C_1 e C_2 . As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19-22 Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = 11t^4\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$,
 $0 \leq t \leq \pi$

CA 27-28 Use um gráfico do campo vetorial $\mathbf{F}$ e a curva C para dizer se a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida, calcule a integral.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y) \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido anti-horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$.

28. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j},$

C é a parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$.