

CÁLCULO III

1º semestre de 2014

Aulas 6-7

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2

Integral tripla em coordenadas cilíndricas

COORDENADAS CILÍNDRICAS

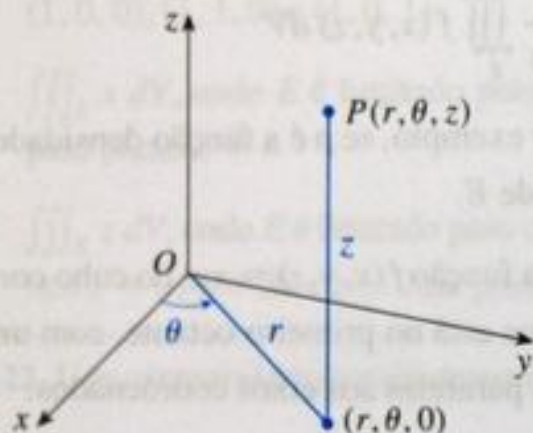


FIGURA 2

As coordenadas cilíndricas de um ponto

No **sistema de coordenadas cilíndricas**, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P . (Veja a Figura 2.)

Para converter de coordenadas cilíndricas para retangulares, usamos as equações

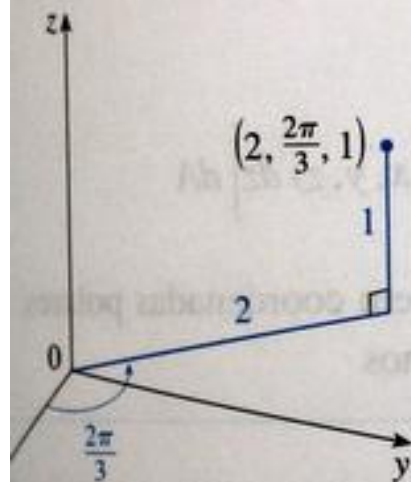
1

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

2

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$



EXEMPLO 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

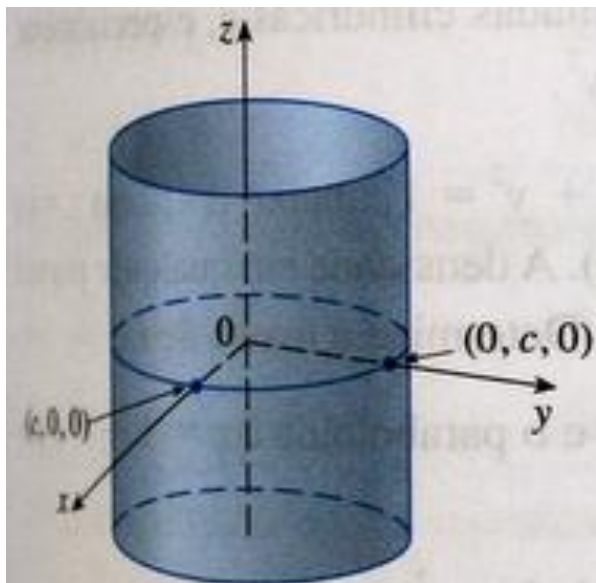
SOLUÇÃO

(a) O ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está marcado na Figura 3. Das Equações 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

$$y = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$



Logo, o ponto é $(-1, \sqrt{3}, 1)$ em coordenadas retangulares.

(b) Das Equações 2 temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{3} = -1 \quad \text{so} \quad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

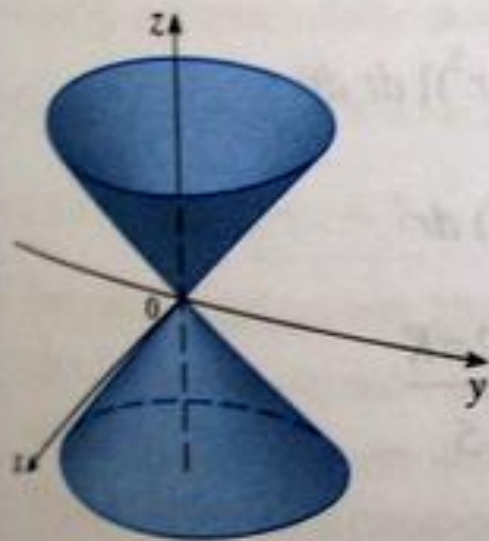
$$z = -7$$

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Outro é $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Como no caso das coordenadas polares, existem infinitas escolhas. $\square$

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo z . Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. (Veja a Figura 4.) Esta é a razão para o nome coordenadas “cilíndricas”.

FIGURA 4

$r = c$, um cilindro



EXEMPLO 2 Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

SOLUÇÃO A equação diz que o valor z , ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que r , a distância do ponto ao eixo z . Como θ não aparece, ele pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $z = k$ ($k > 0$) é um círculo de raio k . Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada convertendo a equação para coordenadas retangulares. Da primeira equação em 2, temos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconhecemos a equação $z^2 = x^2 + y^2$ (pela comparação com a Tabela 1 na Seção 12.6) como o cone circular cujo eixo é o eixo z . (Veja a Figura 5.) □

CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 6). Em particular, suponha que f seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é dado em coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

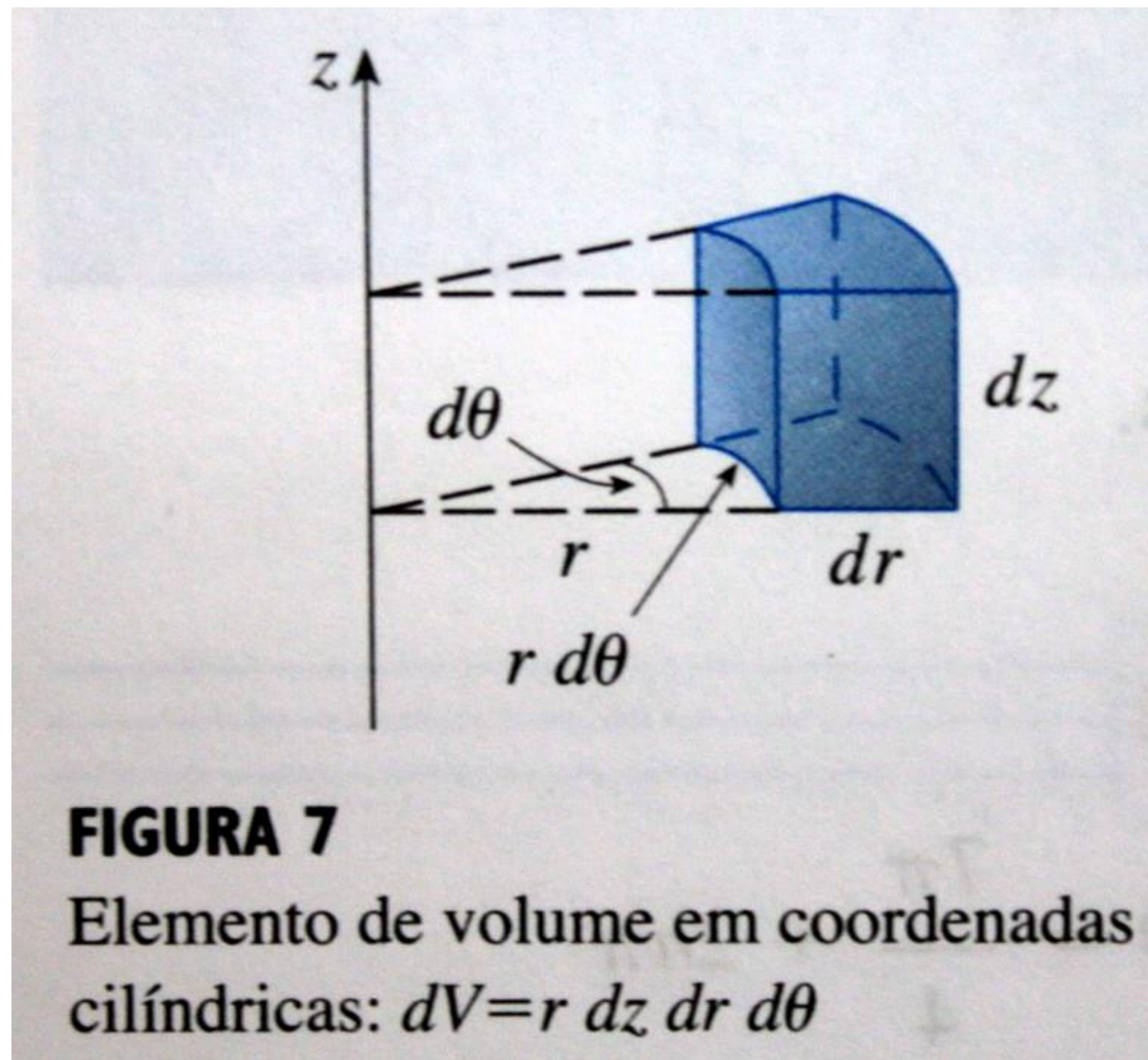
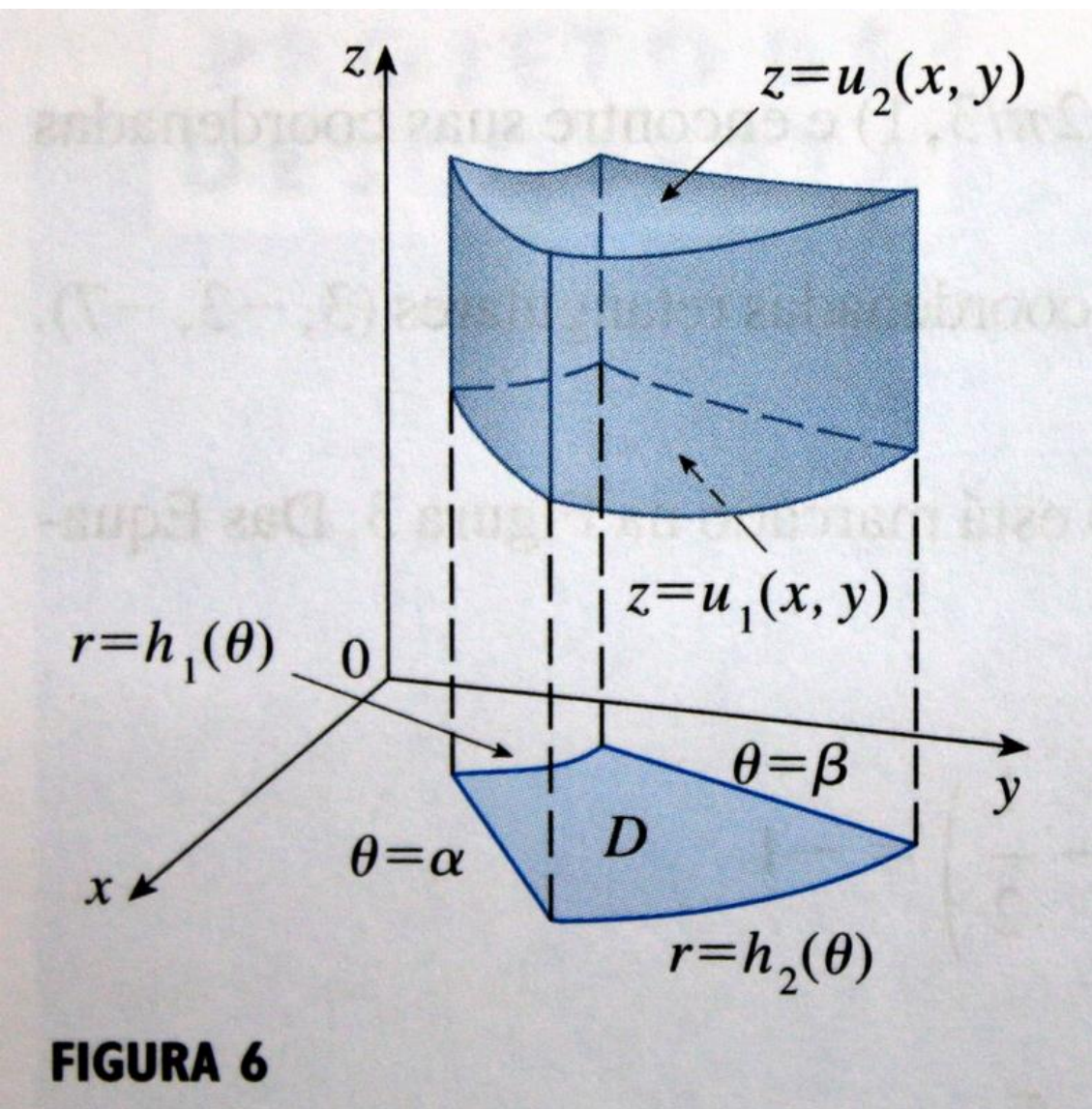
Sabemos da Equação 15.6.6 que

$$\boxed{3} \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 3 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\boxed{4} \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

A Fórmula 4 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z , r e θ , e trocando dV por $r dz dr d\theta$ (A Figura 7 mostra como se lembrar disso.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E for uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas e, especialmente, quando a função $f(x, y, z)$ envolver a expressão $x^2 + y^2$.



EXEMPLO 3 Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ (veja a Figura 8). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E .

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z , a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.6.13, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr) \, r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)] \, dr \, d\theta \\ &= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) \, dr \\ &= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5} \end{aligned}$$

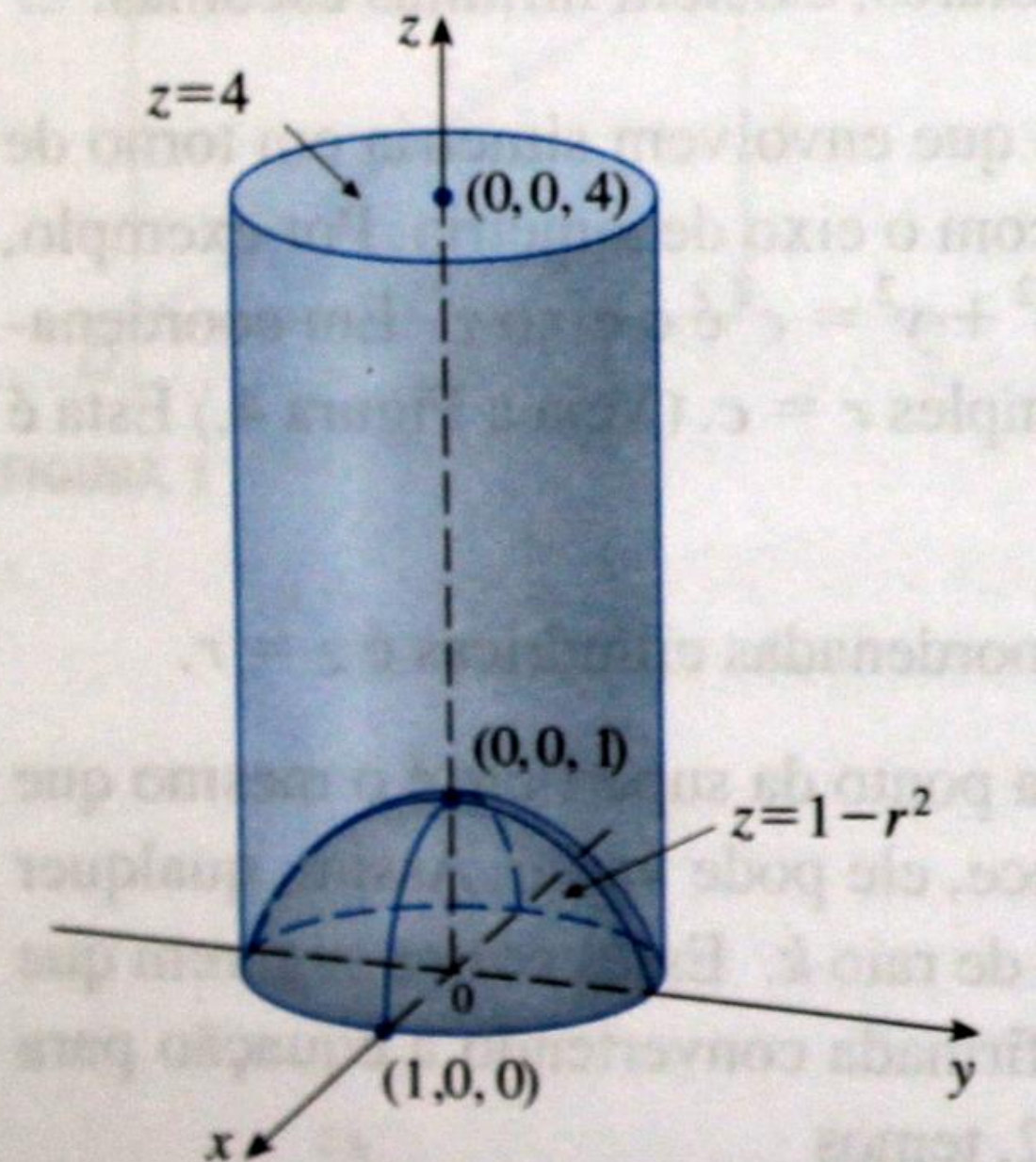


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$ (veja a Figura 9). Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}$$

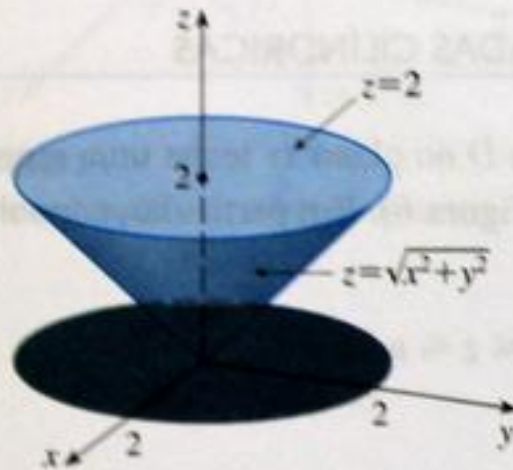


FIGURA 9

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx &= \iiint_E (x^2 + y^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 (2 - r) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 = \frac{16}{5} \pi \end{aligned}$$

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(2, \pi/4, 1)$

(b) $(4, -\pi/3, 5)$

2. (a) $(1, \pi, e)$

(b) $(1, 3\pi/2, 2)$

3-4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(1, -1, 4)$

(b) $(-1, -\sqrt{3}, 2)$

4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$

(b) $(4, -3, 2)$

5-6 Descreva em palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$

6. $r = 5$

7-8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$

8. $2r^2 + z^2 = 1$

9-10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $z = x^2 + y^2$

(b) $x^2 + y^2 = 2y$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$

(b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11-12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leq r \leq 2, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq z \leq 1$

12. $0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad r \leq z \leq 2$

- 18.** Calcule $\iiint_E (x^3 + xy^2) dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.
- 19.** Calcule $\iiint_E y dV$, onde E é o sólido que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = x + 2$.
- 20.** Calcule $\iiint_E x dV$, onde E está delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.
- 21.** Calcule $\iiint_E x^2 dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.
- 22.** Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

- 26.** Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z .
-

27-28 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

27.
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy$$

28.
$$\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$$

Integral tripla em coordenadas esféricas

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5. Dos triângulos OPQ e OPP' , temos

$$z = \rho \cos \phi \quad r = \rho \sin \phi$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

1

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

Além disso, a fórmula da distância mostra que

2

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Usamos essa equação para converter de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

EXEMPLO 1 O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas. Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares.

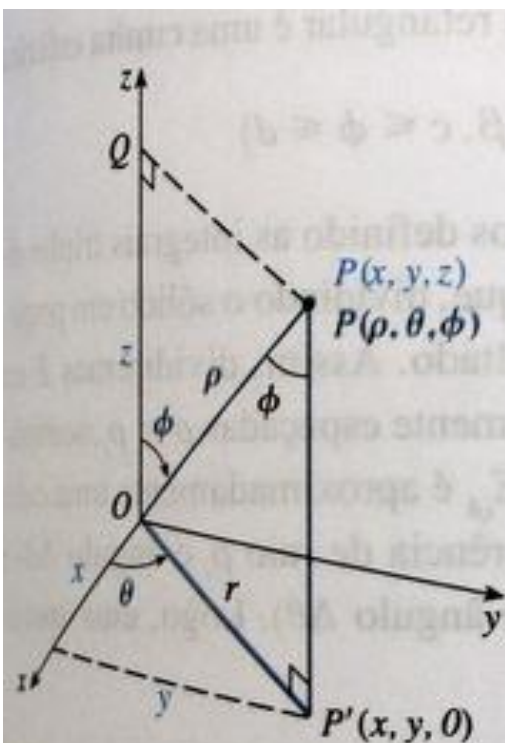


FIGURA 5

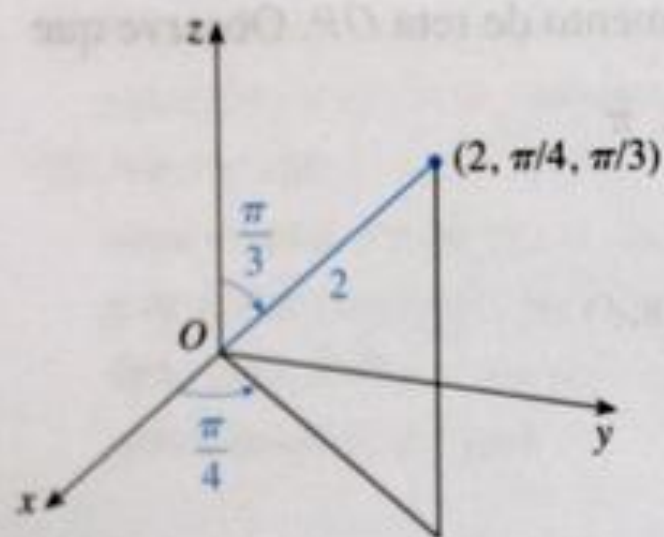


FIGURA 6

SOLUÇÃO Marcamos o ponto na Figura 6. Das Equações 1, temos

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

Logo, o ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ em coordenadas retangulares.

EXEMPLO 2 O ponto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado em coordenadas retangulares. Encontre coordenadas esféricas para este ponto.

SOLUÇÃO Da Equação 2, temos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

e, assim, as Equações 1 fornecem

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \sin \phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$, pois $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Portanto, as coordenadas esféricas do ponto dado são $(4, \pi/2, 2\pi/3)$. □

CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Nesse sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

onde $a \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$ e $d - c \leq \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$. A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i \Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \sin \phi_k \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \sin \phi_k$ e ângulo $\Delta\theta$). Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} = (\Delta\rho)(\rho_i \Delta\phi)(\rho_i \sin \phi_k \Delta\theta) = \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

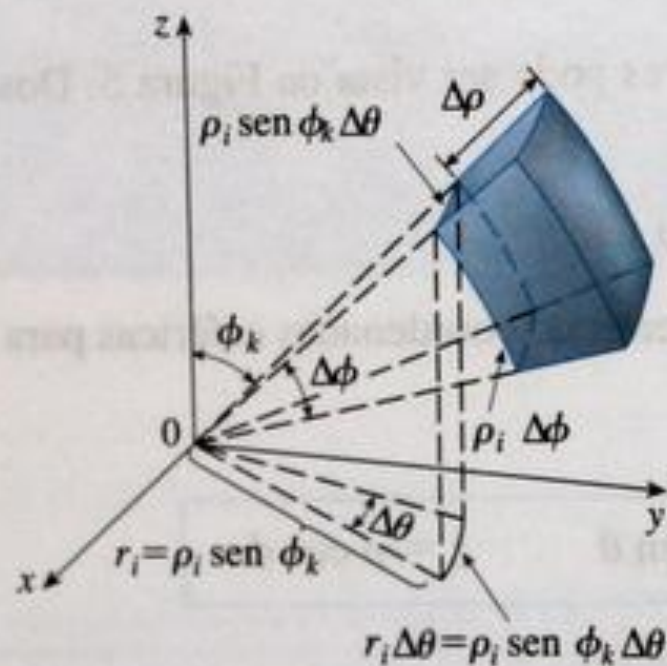


FIGURA 7

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\tilde{\rho}_i \sin \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \sin \tilde{\phi}_k \sin \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos \tilde{\phi}_k) \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

Mas essa soma é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi$$

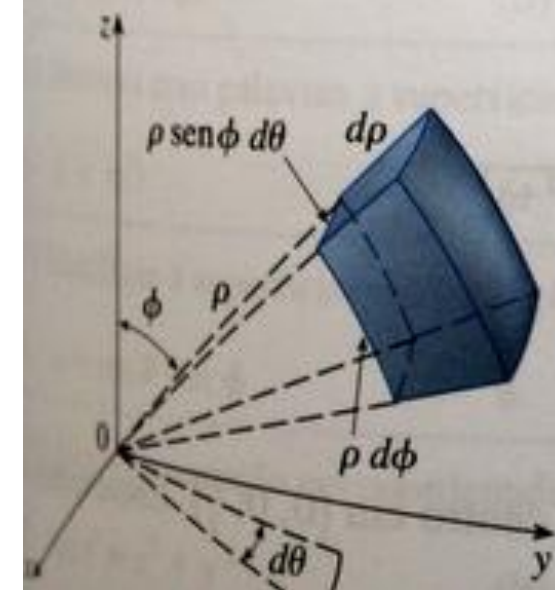
Consequentemente, chegamos à seguinte **fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas**:

$$\boxed{3} \quad \iiint_E f(x, y, z) dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$



A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangu-

A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

utilizamos os limites de integração apropriados e substituindo dV por $\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. Isso é ilustrado na Figura 8.

Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que (3), exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta, \phi)$ e $g_2(\theta, \phi)$.

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam a fronteira da região de integração.

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

SOLUÇÃO Como a fronteira de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

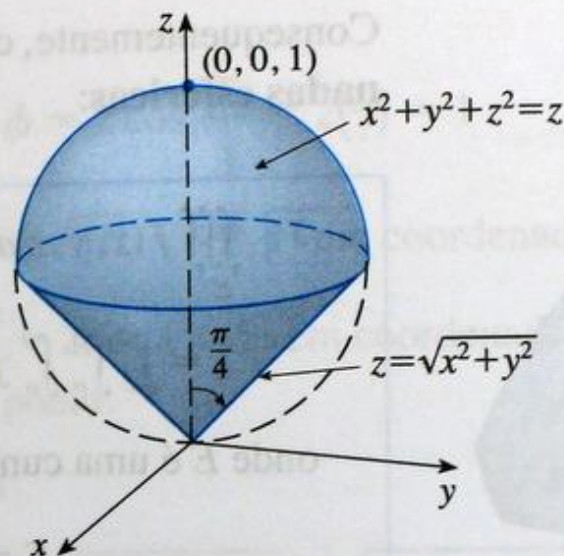
Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Então, de (3) temos

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho \\ &= \left[-\cos \phi\right]_0^\pi (2\pi) \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e - 1) \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (veja a Figura 9).



SOLUÇÃO Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $(0, 0, \frac{1}{2})$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \quad \text{ou} \quad \rho = \cos \phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \rho \sin \phi$$

Isto dá $\sin \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto, a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

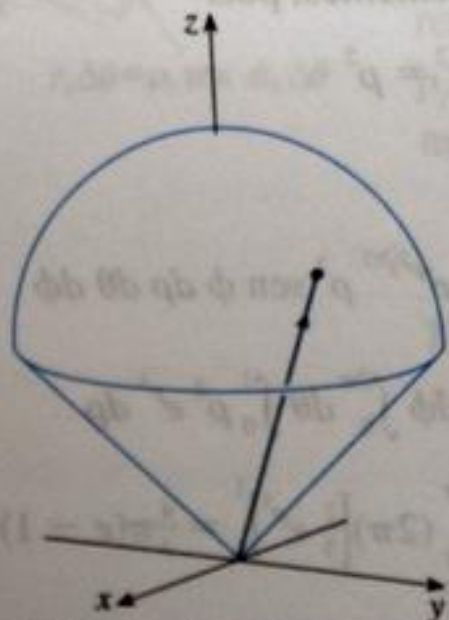
$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

A Figura 11 mostra como E é varrido se integramos primeiro em relação a ρ , depois em relação a ϕ , e então em relação a θ . O volume de E é

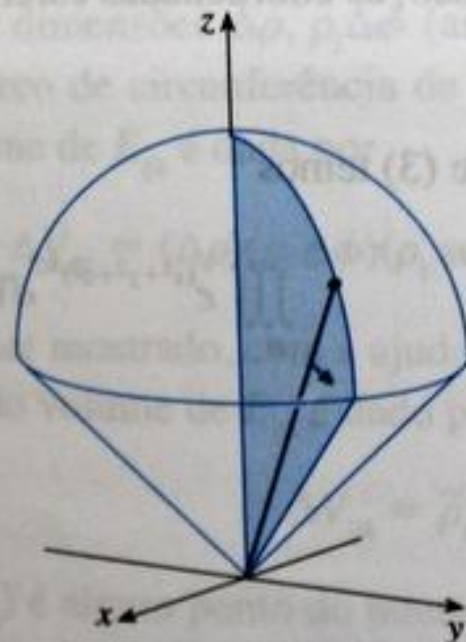
$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi$$

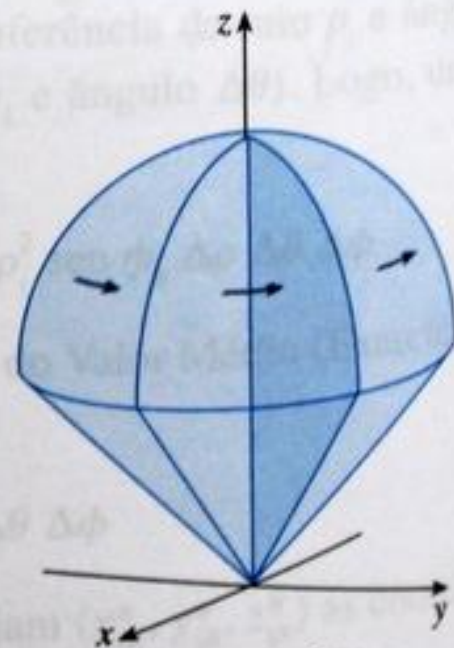
$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4 \phi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$



ρ varia de 0 a $\cos \phi$, enquanto ϕ e θ são constantes



ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante



θ varia de 0 a 2π

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(1, 0, 0)$

(b) $(2, \pi/3, \pi/4)$

2. (a) $(5, \pi, \pi/2)$

(b) $(4, 3\pi/4, \pi/3)$

3-4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

(b) $(0, -1, -1)$

4. (a) $(1, 1, \sqrt{2})$

(b) $(-\sqrt{3}, -3, -2)$

5-6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$

6. $\rho = 3$

7-8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \sin \theta \sin \phi$

8. $\rho^2(\sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi) = 9$

11-14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $\rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

12. $2 \leq \rho \leq 3, \quad \pi/2 \leq \phi \leq \pi$

13. $\rho \leq 1, \quad 3\pi/4 \leq \phi \leq \pi$

14. $\rho \leq 2, \quad \rho \leq \operatorname{cosec} \phi$

15. Um sólido está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

21-34 Utilize coordenadas esféricas.

- 21.** Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.
- 22.** Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$.
- 23.** Calcule $\iiint_E z dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.
- 24.** Calcule $\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$, onde E é delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante.
- 25.** Calcule $\iiint_E x^2 dV$, onde E é limitado pelo plano xz e pelos hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.
- 26.** Calcule $\iiint_E xyz dV$, onde E está entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

15.9

MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Em cálculo unidimensional, frequentemente usamos uma mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de x e u , podemos escrever a Regra da Substituição (5.5.6, dada no Capítulo 5, no Volume I) como

$$1 \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) \, du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$. Outro modo de escrever a Fórmula 1 é o seguinte:

$$2 \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} \, du$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para coordenadas polares. As novas variáveis r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis (15.4.2) pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy .

De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela transformação T do plano uv no plano xy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

3

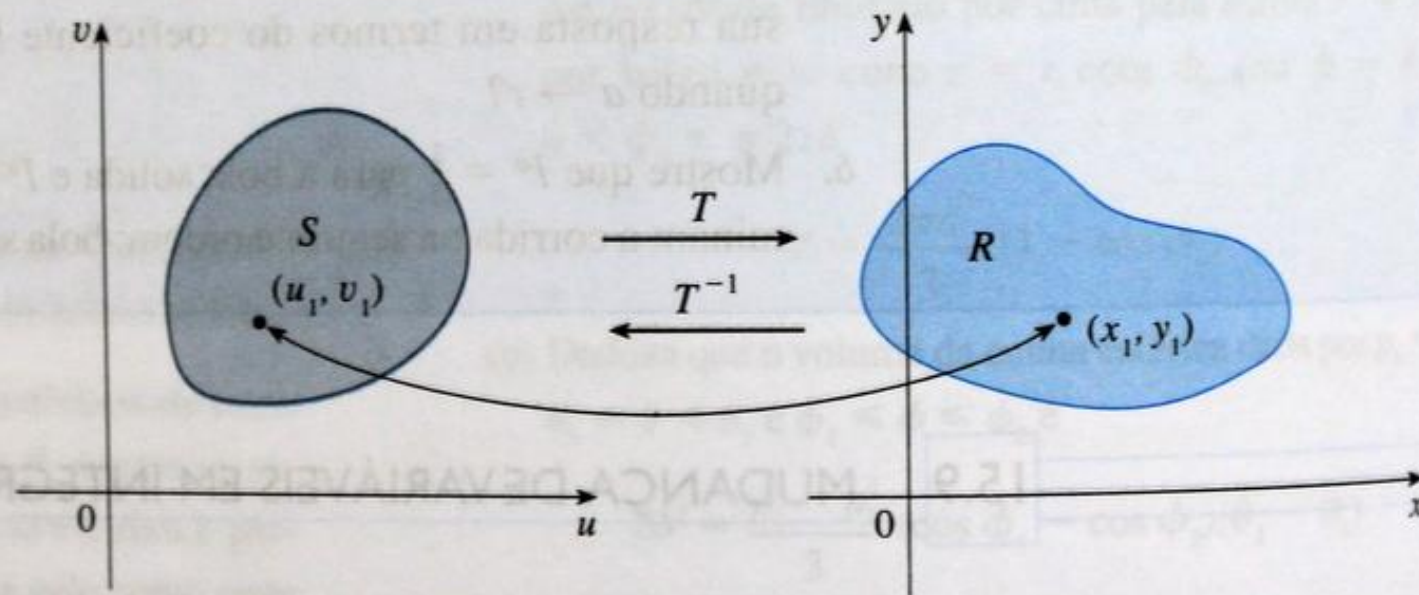
$$x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Em geral, consideramos T uma **transformação C^1** , o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Se $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, então o ponto (x_1, y_1) é denominado **imagem** do ponto (u_1, v_1) . Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é **injetora**. A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação T em uma região S do plano uv . T transforma S em uma região R no plano xy denominada **imagem de S** , constituída das imagens de todos os pontos de S .



Se T é injetora, então existe uma **transformação inversa T^{-1}** do plano xy para o plano uv e pode ser possível inverter as Equações 3 para escrever u e v em termos de x e y :

$$u = G(x, y)$$

$$v = H(x, y)$$

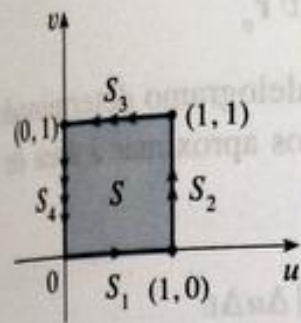
EXEMPLO 1 Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

SOLUÇÃO A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S . O primeiro lado, S_1 , é dado por $v = 0$ ($0 \leq u \leq 1$) (veja a Figura 2). Das equações dadas, temos $x = u^2$, $y = 0$, e portanto $0 \leq x \leq 1$. Então, S_1 é levado no segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 0)$ no plano xy . O segundo lado, S_2 , é $u = 1$ ($0 \leq v \leq 1$) e, substituindo $u = 1$ nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$



Eliminando v , obtemos

4

$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad 0 \leq x \leq 1$$

que é parte de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dado por $v = 1$ ($0 \leq u \leq 1$), cuja imagem é o arco parabólico

5

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad -1 \leq x \leq 0$$

Finalmente, S_4 é dado por $u = 0$ ($0 \leq v \leq 1$), cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja, $-1 \leq x \leq 0$ (Observe que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário.) A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas pelas Equações 4 e 5. □

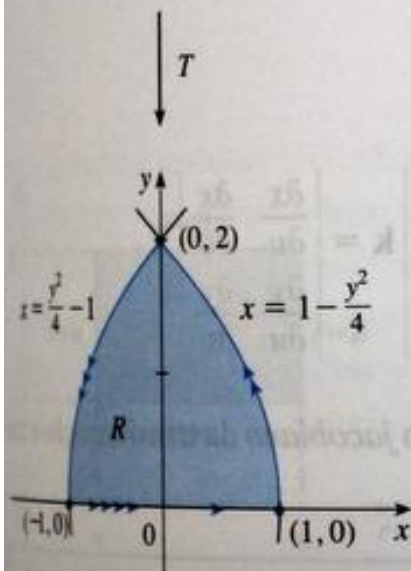
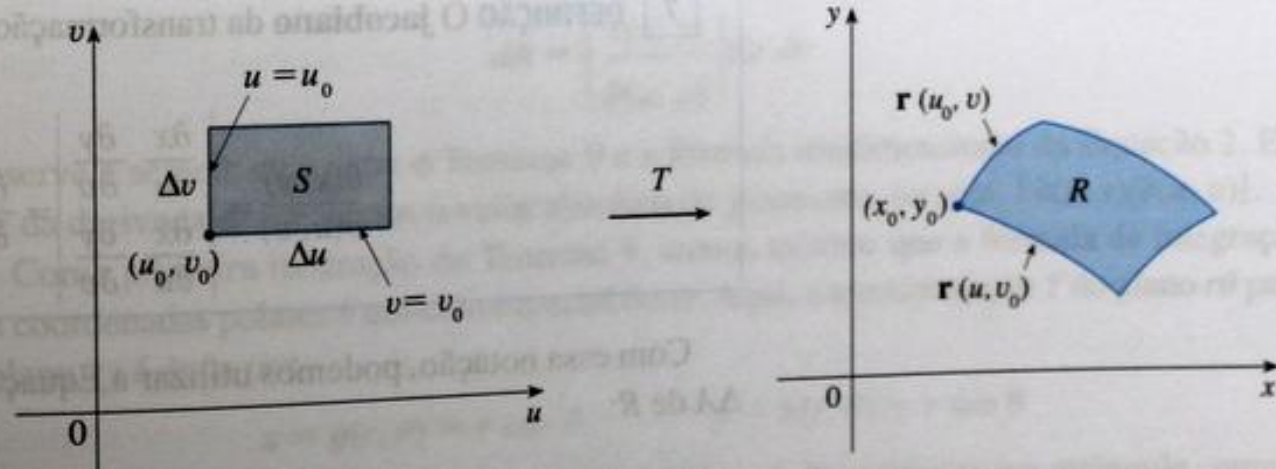


FIGURA 2

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Começemos com um retângulo pequeno S no plano uv cujo canto inferior esquerdo é o ponto (u_0, v_0) e cujas dimensões são Δu e Δv (veja a Figura 3).

FIGURA 3



A imagem de S é a região R do plano xy , sendo que um dos pontos da fronteira é $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. O vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\mathbf{i} + h(u, v)\mathbf{j}$$

é o vetor posição da imagem do ponto (u, v) . A equação do lado inferior de S é $v = v_0$, cuja curva imagem é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}$$

Da mesma forma, o vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem do lado esquerdo de S ($u = u_0$) é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados na Figura 4. Mas

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

e então,

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u$$

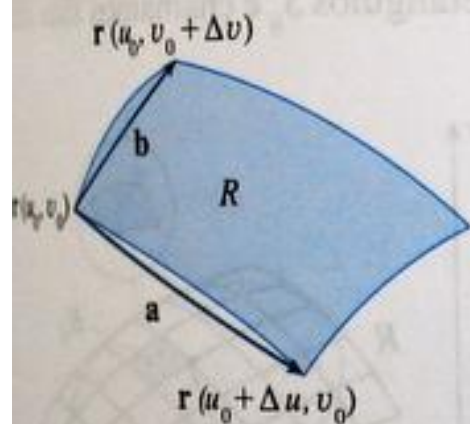


FIGURA 4



FIGURA 5

Da mesma forma $\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$

Isso significa que podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u$ e $\Delta v \mathbf{r}_v$ (veja a Figura 5). Portanto, podemos aproximar a área de R pela área desse paralelogramo, que da Seção 12.4, é

$$\boxed{6} \quad |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial:

7 **DEFINIÇÃO** O **jacobiano** da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

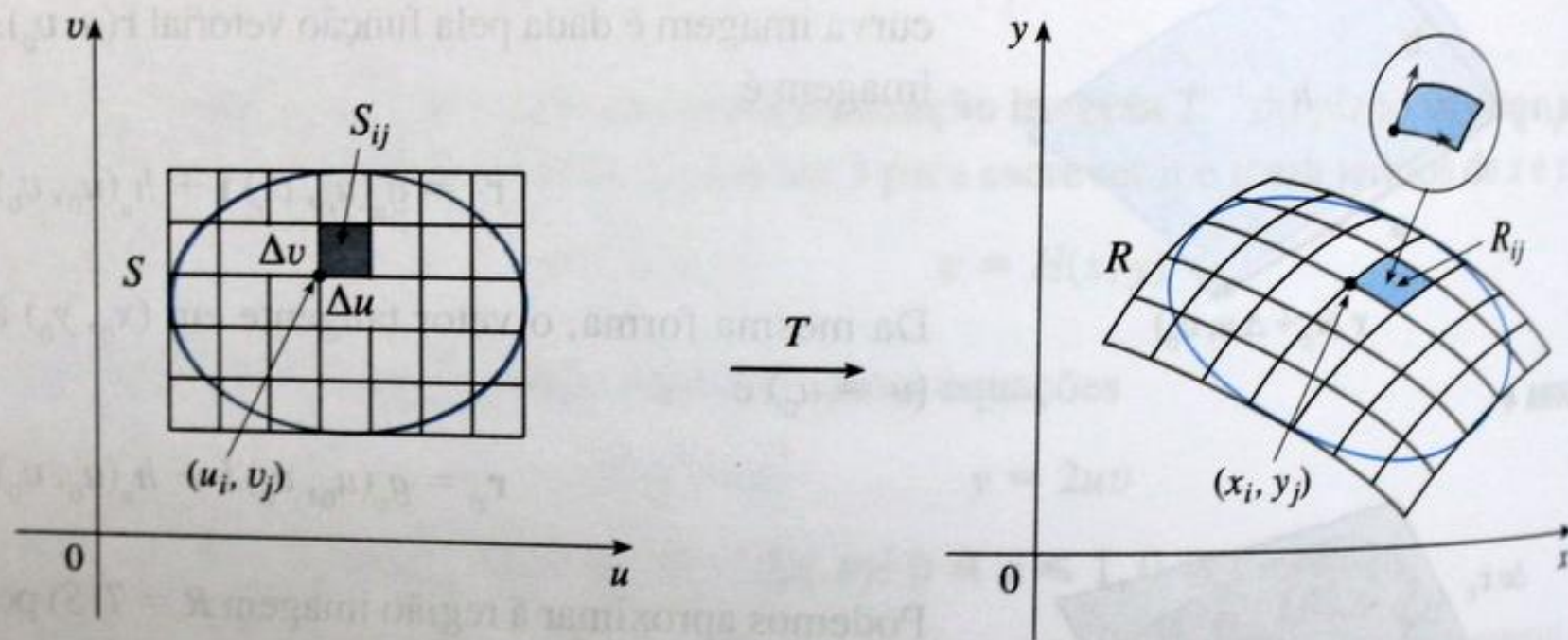
Com essa notação, podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área ΔA de R :

8

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_0, v_0) .

Em seguida, dividimos a região S do plano uv em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij} (veja a Figura 6).



Aplicando a aproximação (8) a cada R_{ij} , aproximamos a integral dupla de f sobre R como segue:

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

9 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM UMA INTEGRAL DUPLA Suponha que T seja uma transformação C^1 cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy . Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S . Então

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Observe a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du , temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial deste. Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \quad y = h(r, \theta) = r \sin \theta$$

e a geometria da transformação é mostrada na Figura 7. T transforma um retângulo comum do plano $r\theta$ em um retângulo polar do plano xy . O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

Assim, o Teorema 9 nos leva a

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr \, d\theta \\ &= \int_a^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

que é o mesmo que a Fórmula 15.4.2.

EXEMPLO 2 Utilize a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y \, dA$, onde R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.

SOLUÇÃO A região R está mostrada na Figura 2, na página 963. No Exemplo 1, descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R . Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Portanto, pelo Teorema 9,

$$\begin{aligned}\iint_R y \, dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv) 4(u^2 + v^2) \, du \, dv \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3 v + uv^3) \, du \, dv = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{4} u^4 v + \frac{1}{2} u^2 v^3 \right]_{u=0}^{u=1} dv \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) \, dv = \left[v^2 + v^4 \right]_0^1 = 2\end{aligned}$$

OBS. O Exemplo 2 não foi um problema muito difícil de resolver porque já conhecíamos uma mudança de variáveis apropriada. Se não a conhecêssemos de antemão, então o primeiro passo seria descobrir uma mudança de variáveis apropriada. Se $f(x, y)$ é difícil de integrar, então a forma de $f(x, y)$ pode sugerir uma transformação. Se a região de integração R é complicada, então a transformação deve ser escolhida para que a região S correspondente no plano uv tenha uma descrição mais conveniente.

EXEMPLO 3 Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ e $(0, -1)$.

SOLUÇÃO Como não é fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, vamos fazer a mudança de variáveis sugerida pela forma da função:

$$\boxed{10} \quad u = x + y \quad v = x - y$$

Essas equações definem a transformação T^{-1} do plano xy para o plano uv . O Teorema 9 diz respeito à transformação T do plano uv para o plano xy . Esta é obtida isolando-se x e y nas Equações 10:

$$\boxed{11} \quad x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Para determinar a região S do plano uv correspondente a R , observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \quad x - y = 2 \quad x = 0 \quad x - y = 1$$

e, das Equações 10 ou 11, as retas imagem do plano uv são

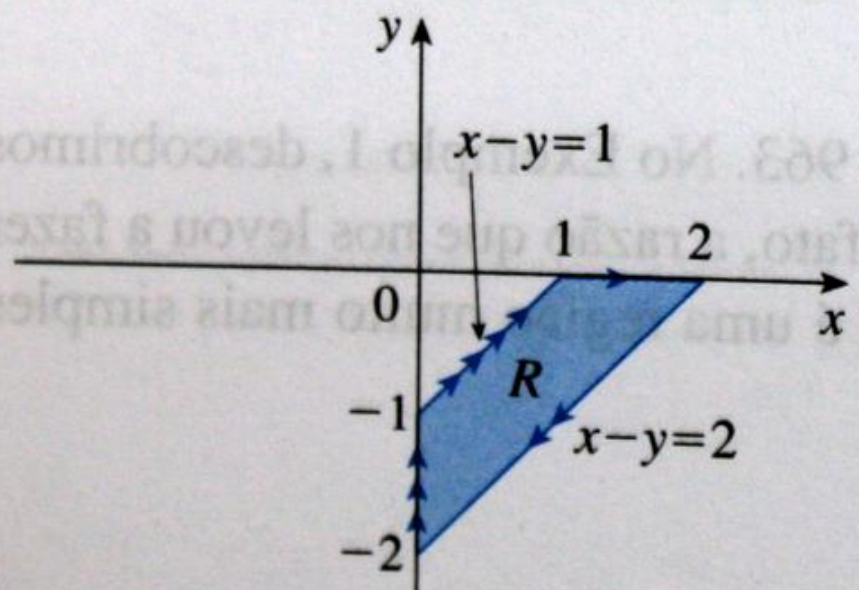
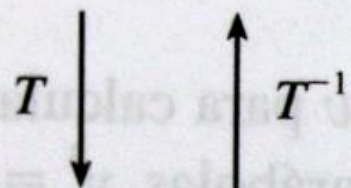
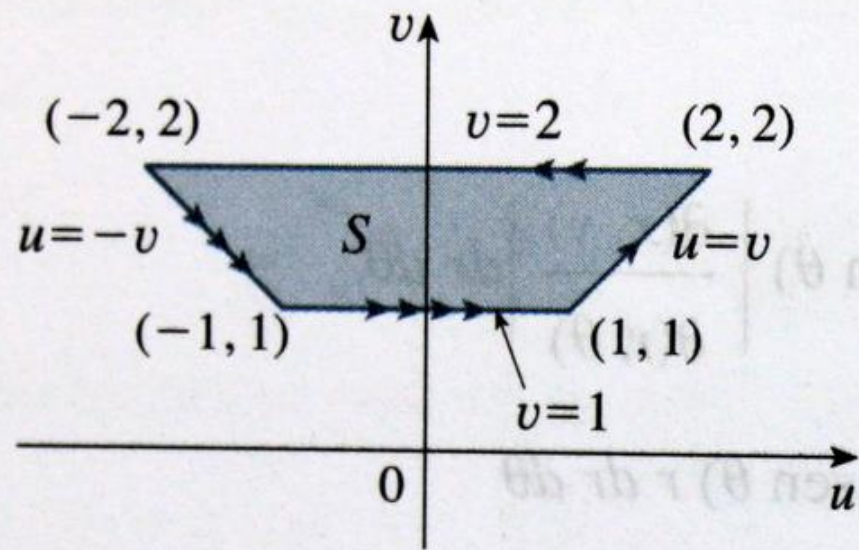
$$u = v \quad v = 2 \quad u = -v \quad v = 1$$

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ e $(-1, 1)$ mostrada na Figura 8. Como

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$$

o Teorema 9 leva a

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$



$$= \int_1^2 \int_{-v}^v e^{u/v} \left(\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1}) v dv = \frac{3}{4} (e - e^{-1})$$

INTEGRAIS TRIPLAS

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja T a transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w) \quad y = h(u, v, w) \quad z = k(u, v, w)$$

O **jacobiano** de T é o seguinte determinante 3×3 :

12

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sob hipóteses semelhantes àsquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

$$\boxed{13} \quad \iiint_R f(x, y, z) \, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw$$

EXEMPLO 4 Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi (-\rho^2 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta)$$

$$- \rho \sin \phi (\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta)$$

$$= -\rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \sin \phi \sin^2 \phi = -\rho^2 \sin \phi$$

Como $0 \leq \phi \leq \pi$, temos $\sin \phi \geq 0$. Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \sin \phi| = \rho^2 \sin \phi$$

1-6 Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = 5u - v, \quad y = u + 3v$

2. $x = uv, \quad y = u/v$

3. $x = \frac{u}{u+v}, \quad y = \frac{v}{u-v}$

4. $x = \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad y = \alpha \cos \beta$

5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw$

6. $x = v + w^2, \quad y = w + u^2, \quad z = u + v^2$

7-10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\};$

$$x = 2u + 3v, y = u - v$$

8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1;$

$$x = v, y = u(1 + v^2)$$

9. S é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1);$

$$x = u^2, y = v$$

10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leq 1; x = au, y = bv$

11-16 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

11. $\iint_R (x - 3y) dA$, onde R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$; $x = 2u + v$, $y = u + 2v$

12. $\iint_R (4x + 8y) dA$, onde R é o paralelogramo com vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ e $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u + v)$, $y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

13. $\iint_R x^2 dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$

14. $\iint_R (x^2 - xy + y^2) dA$, onde R é a região delimitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$

15. $\iint_R xy dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$

16. $\iint_R y^2 dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy$, $v = xy^2$.

Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R .

17. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido delimitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6\,378$ km e $c = 6\,356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.

18. Se o sólido do Exercício 17(a) tiver densidade constante k , encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z .

19-23 Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

19. $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$, onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas
 $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$ e $3x-y=8$

20. $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} dA$, onde R é o retângulo delimitado pelas retas
 $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$ e $x+y=3$

21. $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices
 $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$

22. $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

23. $\iint_R e^{x+y} dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$

Exercícios de revisão

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\int_{-1}^2 \int_0^6 x^2 \sin(x - y) \, dx \, dy = \int_0^6 \int_{-1}^2 x^2 \sin(x - y) \, dy \, dx$

2. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x + y^2} \, dy \, dx = \int_0^x \int_0^1 \sqrt{x + y^2} \, dx \, dy$

3. $\int_1^2 \int_3^4 x^2 e^y \, dy \, dx = \int_1^2 x^2 \, dx \int_3^4 e^y \, dy$

4. $\int_{-1}^1 \int_0^1 e^{x^2+y^2} \sin y \, dx \, dy = 0$

5. Se D é um disco dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, então

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA = \frac{16}{3}\pi$$

6. $\int_1^4 \int_0^1 (x^2 + \sqrt{y}) \sin(x^2 y^2) \, dx \, dy \leq 9$

7. A integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz \, dr \, d\theta$$

representa o volume delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$.

8. A integral $\iiint_E kr^3 \, dz \, dr \, d\theta$ representa o momento de inércia em relação ao eixo z de um sólido E com densidade constante k .

15-28 Calcule o valor da integral múltipla.

15. $\iint_R ye^{xy} dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$

16. $\iint_D xy dA$, onde $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y + 2\}$

17. $\iint_D \frac{y}{1+x^2} dA$, onde D é limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$

18. $\iint_D \frac{y}{1+x^2} dA$, onde D é a região triangular de vértices
 $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$

19. $\iint_D y dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 8 - y^2$

20. $\iint_D y dA$, onde D é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole $xy = 1$ e da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 2$

21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}x$ e pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$
22. $\iint_D x dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$
23. $\iiint_E xy dV$, onde
 $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}$
24. $\iiint_T xy dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices em $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$
25. $\iiint_E y^2 z^2 dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$
26. $\iiint_E z dV$, onde E é limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante
27. $\iiint_E yz dV$, onde E está acima do plano $z = 0$, abaixo do plano $z = y$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
28. $\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, onde H é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano xy

29-34 Determine o volume do sólido dado.

29. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$

30. Abaixo da superfície $z = x^2 y$ e acima do triângulo do plano xy com vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(4, 0)$

31. O tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$

32. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$

46. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$

47. Utilize a transformação $u = x - y$, $v = x + y$ para calcular $\iint_R (x - y)/(x + y) \, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$.

48. Utilize a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para determinar o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

49. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e uma transformação adequada para calcular $\iint_R xy \, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(1, -1)$.