

CÁLCULO III

1º semestre de 2014

Aulas 5-6

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2

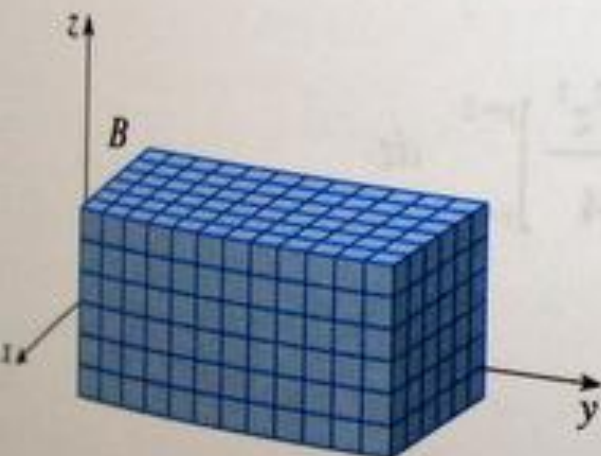
15.6 INTEGRAIS TRIPLAS

Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

I

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx , dividindo $[c, d]$ em m subintervalos



de comprimentos Δy , e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz . Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa B em lmn subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

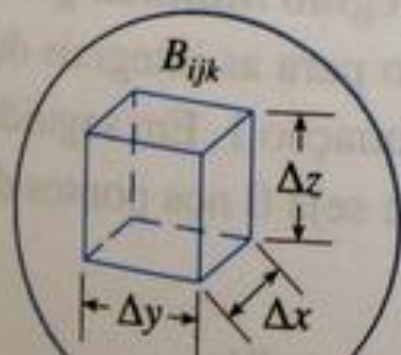
como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Assim formamos a **soma tripla de Riemann**

2

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

onde o ponto amostral $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk} . Por analogia com a definição da integral dupla (15.1.5), definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em (2).



3 **DEFINIÇÃO** A integral tripla de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

se o limite existir.

Novamente, a integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhemos o ponto amostral como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto (x_i, y_j, z_k) , obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada, como segue.

4 **TEOREMA DE FUBINI PARA AS INTEGRAIS TRIPLAS** Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e, finalmente, em relação a z . Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo, se primeiro integrarmos em relação a y , então em relação a z e depois a x , teremos

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x , depois em relação a y e então em relação a z , obteremos

$$\iiint_B xyz^2 dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

□

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada geral E** no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas (15.3.2). Envolveremos E por uma caixa B do tipo dado pela Equação 1. Em seguida, definiremos uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E . Por definição,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV$$

Essa integral existe se f for contínua e se a fronteira de E for “razoavelmente lisa”. A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla (Propriedades 6-9 da Seção 15.3).

Vamos nos restringir às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região sólida E é dita do **tipo 1** se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y , ou seja,

$$\boxed{5} \quad E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy , como mostrado na Figura 2. Observe que a fronteira superior do sólido E é a superfície de equação $z = u_2(x, y)$, enquanto a fronteira inferior é a superfície $z = u_1(x, y)$.

Pelos mesmos argumentos que nos levaram a fórmula 15.5.5, podemos mostrar que, se E é uma região do tipo 1 dada pela Equação 5, então

6

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que x e y são mantidos fixos e, assim, $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são vistas como constantes, enquanto $f(x, y, z)$ é integrada em relação a z .

Em particular, se a projeção D de E sobre o plano xy é uma região plana do tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 fica

7

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo Π (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 fica

8

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

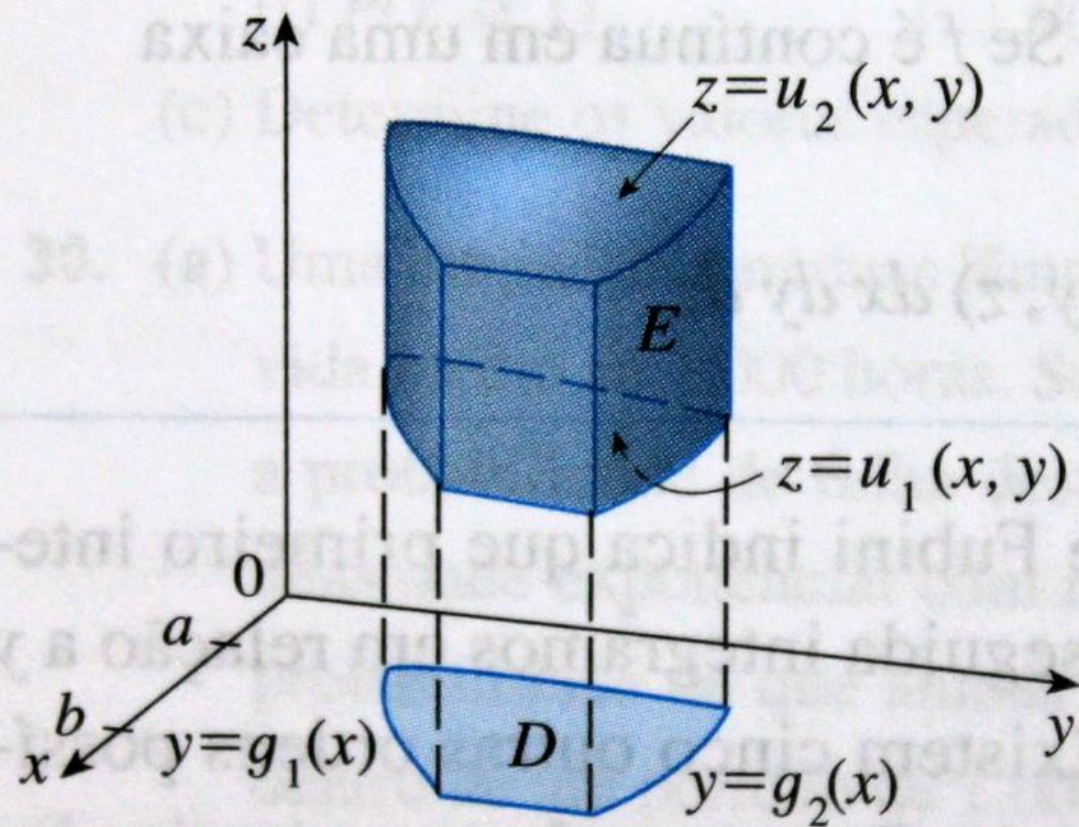


FIGURA 3

Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção D é uma região plana de tipo I

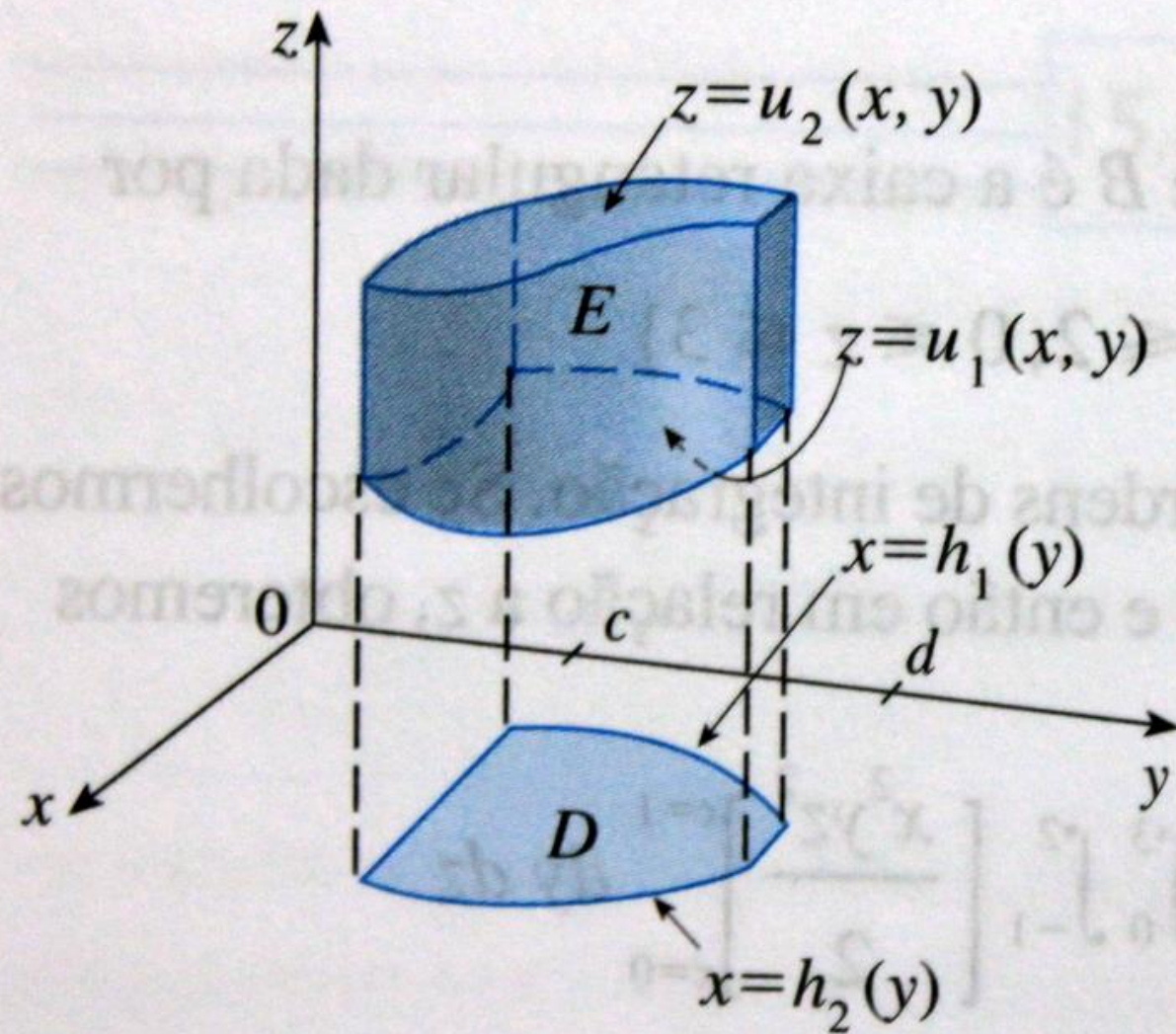


FIGURA 4

Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

EXEMPLO 2 Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x + y + z = 1$.

SOLUÇÃO Para escrevermos a integral tripla, é recomendável desenhar *dois* diagramas: um da região sólida E (veja a Figura 5) e outro de sua projeção D no plano xy (veja a Figura 6). A fronteira inferior do tetraedro é o plano $z = 0$ e a superior é o plano $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$) e então usamos $u_1(x, y) = 0$ e $u_2(x, y) = 1 - x - y$ na Fórmula 7. Observe que os planos $x + y + z = 1$ e $z = 0$ se interceptam na reta $x + y = 1$ (ou $y = 1 - x$) no plano xy . Logo, a projeção de E é a região triangular da Figura 6, e temos

9

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

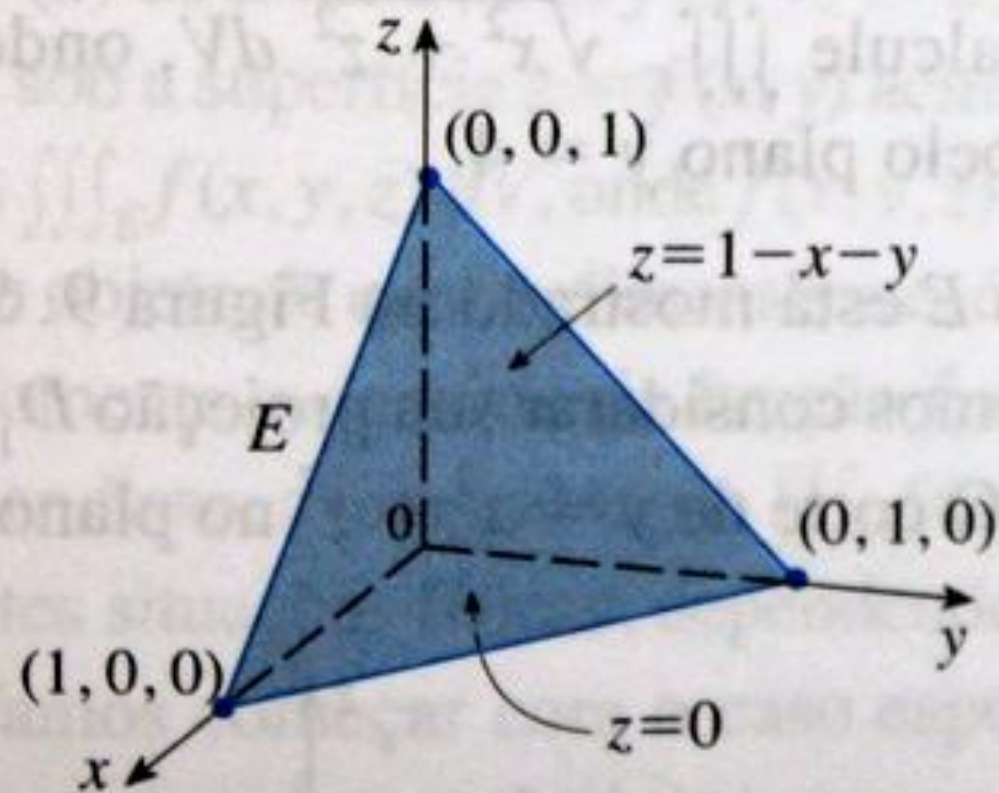


FIGURA 5

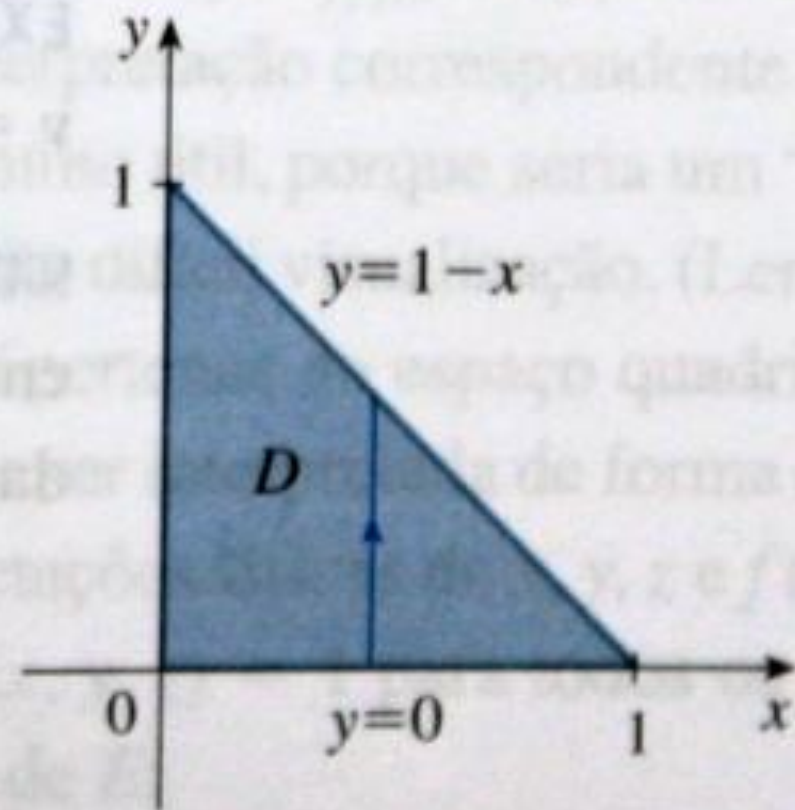


FIGURA 6

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

$$\begin{aligned}\iiint_E z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \, dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\&= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

□

Uma região sólida E é do **tipo 2** se for da forma

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 7). A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$ e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$. Assim, temos

10

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

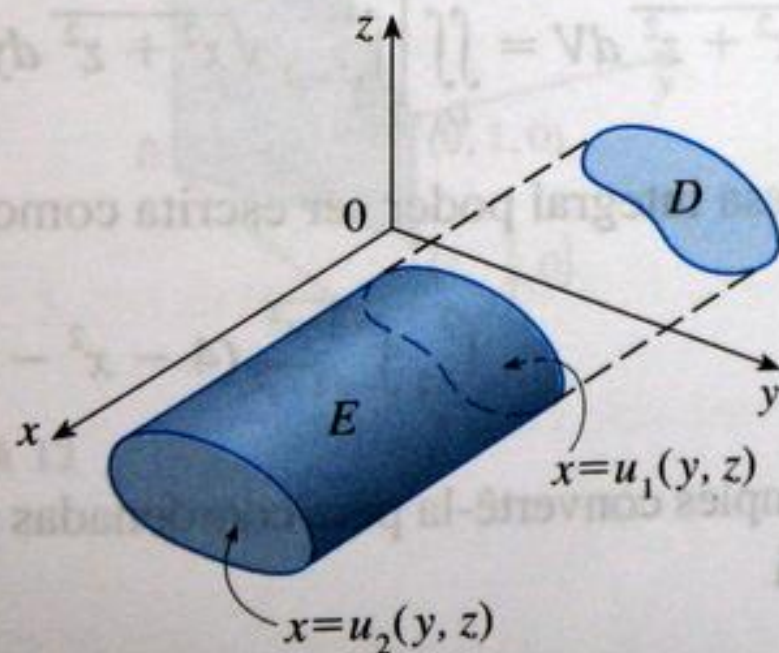


FIGURA 7 Uma região do tipo 2

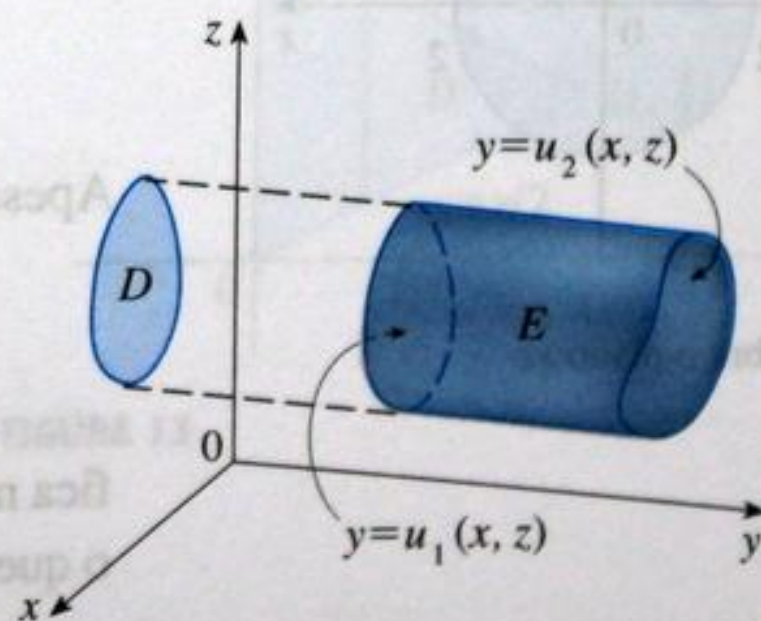


FIGURA 8 Uma região do tipo 3

Finalmente, uma região do **tipo 3** é da forma

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

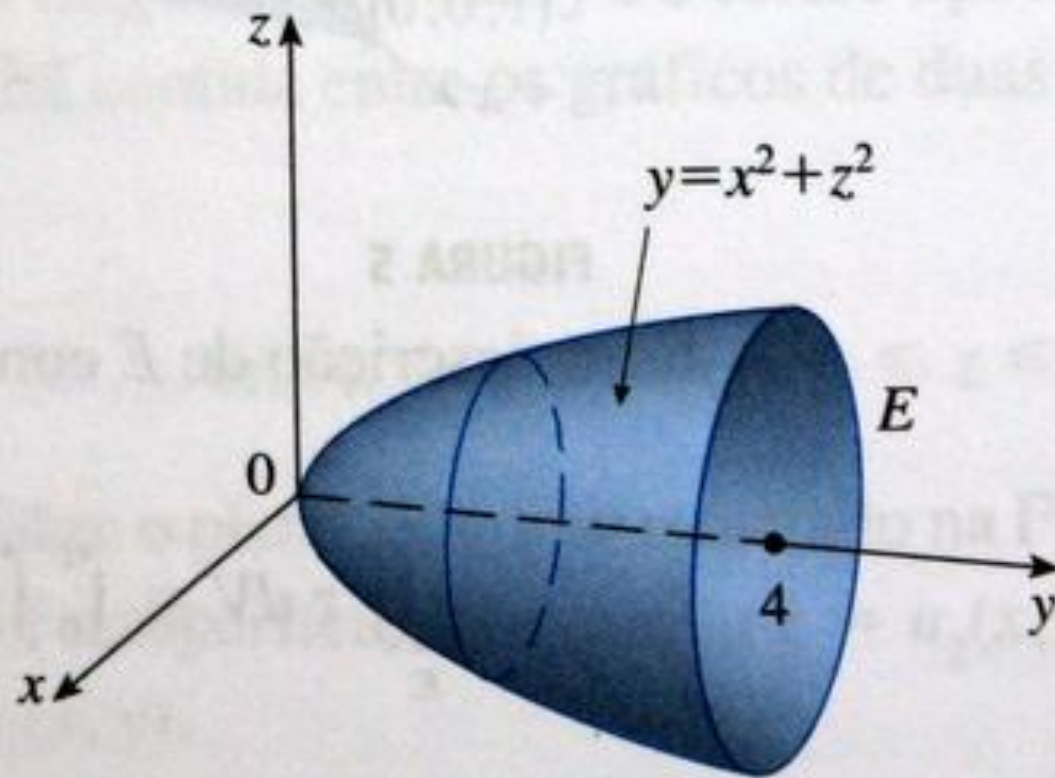
onde D é a projeção de E sobre o plano xz , $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 8). Para esse tipo de região, temos

$$\boxed{11} \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Em cada uma das Equações 10 e 11 podem existir duas possíveis expressões para a integral, dependendo de D ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV$, onde E é a região limitada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

SOLUÇÃO O sólido E está mostrado na Figura 9. Se o olharmos como uma região do tipo 1, então precisaremos considerar sua projeção D_1 sobre o plano xy , que é a região parabólica da Figura 10. (O corte de $y = x^2 + z^2$ no plano $z = 0$ é a parábola $y = x^2$.)



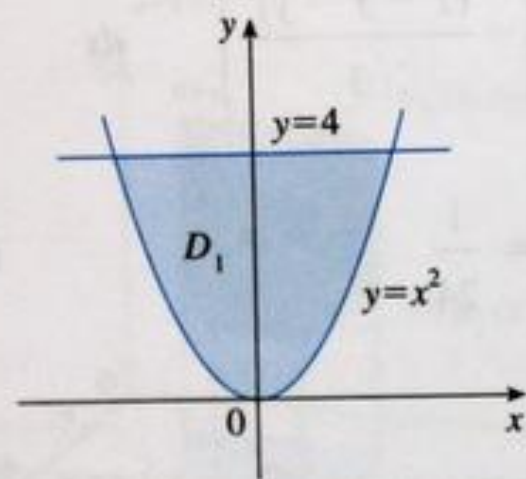


FIGURA 10
Projeção sobre o plano xy

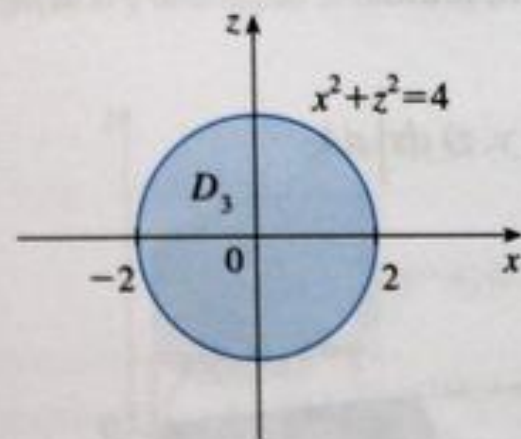


FIGURA 11
Projeção sobre o plano xz

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$ e então a superfície fronteira de baixo de E é $z = -\sqrt{y - x^2}$ e a superfície de cima é $z = \sqrt{y - x^2}$. Portanto, a descrição de E como região do tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}$$

e obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Apesar de essa expressão estar correta, é extremamente difícil calculá-la. Vamos, em vez disso, considerar E como região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco $x^2 + z^2 \leq 4$ mostrado na Figura 11.

Então, a superfície lateral esquerda de E é o parabolóide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$. Assim, tomando $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x, z) = 4$ na Equação 11, temos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} \, dy \right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA$$

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz : $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, o que nos dá

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4) \, dr \\&= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$

Todas as aplicações de integrais duplas da Seção 15.5 podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z) , então sua **massa** é

$$\boxed{13} \quad m = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV$$

e seus **momentos** em relação aos três planos coordenados são

$$\boxed{14} \quad M_{yz} = \iiint_E x \rho(x, y, z) \, dV \quad M_{xz} = \iiint_E y \rho(x, y, z) \, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z \rho(x, y, z) \, dV$$

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\boxed{15} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centroide** de E . Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$\boxed{16} \quad I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \quad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

Como na Seção 15.5, a **carga elétrica** total sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X , Y e Z , sua **função densidade conjunta** é uma função das três variáveis tal que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

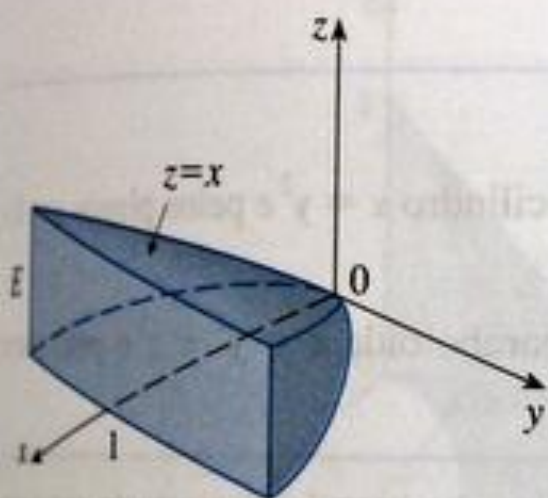
$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

Em particular,

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx$$

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz dy dx = 1$$



EXEMPLO 5 Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO O sólido E e sua projeção sobre o plano xy estão mostrados na Figura 14. As superfícies inferior e superior de E são os planos $z = 0$ e $z = x$, de modo que descrevemos E como uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

Então, se a densidade é $\rho(x, y, z) = \rho$, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) \, dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) \, dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

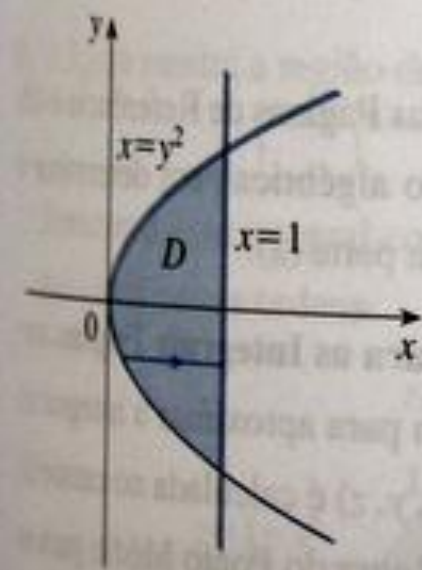


FIGURA 14

Por causa da simetria de E e ρ em relação ao plano xz , podemos dizer imediatamente que $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Os outros momentos são

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x\rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7}$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z\rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{7}$$

3-8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz \, dy \, dx \, dz$

4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz \, dz \, dy \, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y \, dx \, dz \, dy$

6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} \, dx \, dy \, dz$

7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) \, dz \, dx \, dy$

8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y \, dy \, dz \, dx$

9-18 Calcule a integral tripla.

9. $\iiint_E 2x \, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$$

10. $\iiint_E yz \cos(x^5) \, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq z \leq 2x\}$$

11. $\iiint_E 6xy \, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

12. $\iiint_E y \, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$

13. $\iiint_E x^2 e^y \, dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$

- 14.** $\iiint_E xy \, dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $y = x^2$ e $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$
- 15.** $\iiint_T x^2 \, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$
- 16.** $\iiint_T xyz \, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$
- 17.** $\iiint_E x \, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$
- 18.** $\iiint_E z \, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante