

CÁLCULO III

1º semestre de 2014

Aula 4

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2

DENSIDADE E MASSA

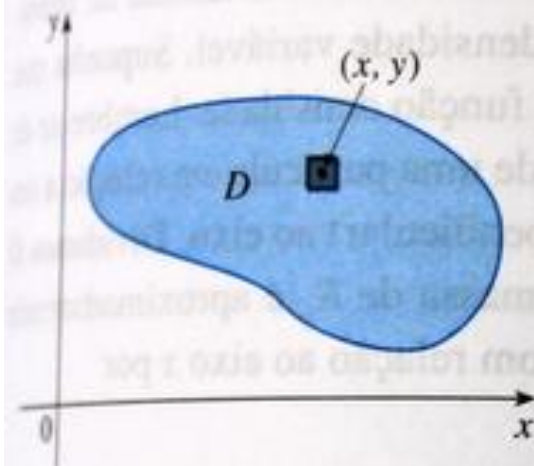


FIGURA 1

Na Seção 8.3, no Volume I, calculamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante, usando as integrais unidimensionais. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável. Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano xy e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua em D . Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área de um pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

Para determinar a massa total m da lâmina, dividimos o retângulo R contendo D em sub-retângulos R_{ij} , todos do mesmo tamanho (como na Figura 2), e consideramos $\rho(x, y)$ como 0 fora de D . Se escolhermos um ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} , então a massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, onde ΔA é a área de R_{ij} . Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação do valor da massa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

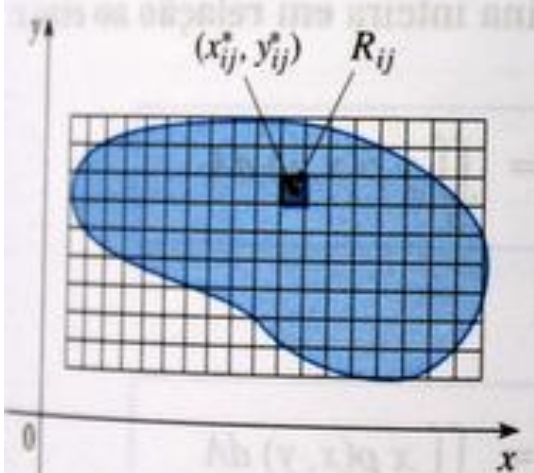


FIGURA 2

Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina como o valor-limite dessa aproximação:

1

$$m = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto (x, y) em D , então a **carga total** Q é dada por

2

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto (x, y) em D , então a **carga total** Q é dada por

2

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

EXEMPLO 1 Uma carga está distribuída na região triangular D da Figura 3 de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.

SOLUÇÃO Da Equação 2 e da Figura 3, temos

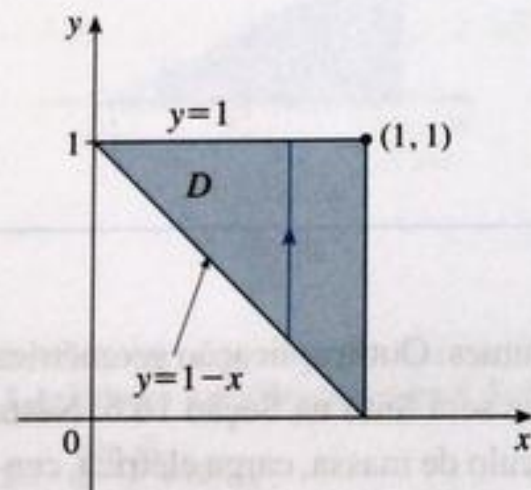


FIGURA 3

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1-x)^2] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Logo, a carga total é $\frac{5}{24} C$. □

MOMENTOS E CENTRO DE MASSA

Na Seção 8.3, do Volume I, determinamos o centro de massa de uma lâmina de densidade constante; aqui, consideraremos uma lâmina de densidade variável. Suponha que a lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Lembre-se de que no Capítulo 8, no Volume I, definimos o momento de uma partícula em relação a um eixo como o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo. Dividimos D em retângulos pequenos, como na Figura 2. Então a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$ e podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A] y_{ij}^*$$

Se somarmos essas quantidades e tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o **momento** da lâmina inteira **em relação ao eixo x** :

3

$$M_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o **momento em relação ao eixo y** é:

4

$$M_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) dA$$

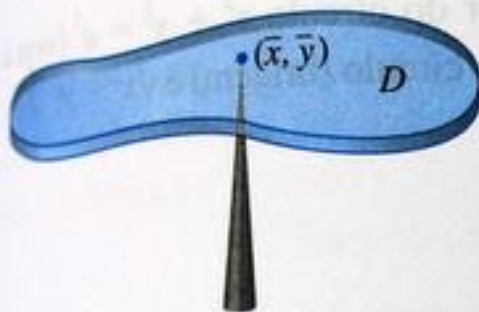


FIGURA 4

Como anteriormente, definimos o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ de modo que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

5 As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

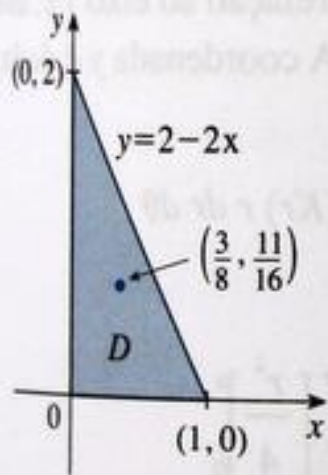


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

SOLUÇÃO O triângulo está mostrado na Figura 5. (Observe que a equação da fronteira superior é $y = 2 - 2x$.) A massa da lâmina é

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Então, as fórmulas em (5) fornecem

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) dy dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2) dy dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[7x - 9 \frac{x^2}{2} - x^3 + 5 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

O centro de massa é o ponto $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$.

MOMENTO DE INÉRCIA

O **momento de inércia** (também chamado **segundo momento**) de uma partícula de massa m em relação a um eixo é definido como mr^2 , onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ e que ocupa uma região D pelo mesmo processo que fizemos para os momentos normais. Dividimos D em pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em relação ao eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o **momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x** :

6

$$I_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o **momento de inércia em relação ao eixo y** é:

7

$$I_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

É de interesse, ainda, considerar o **momento de inércia em relação à origem**, também chamado **momento polar de inércia**:

8

$$I_0 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

O raio de giração de uma lâmina em relação a um eixo é o número R tal que

9

$$mR^2 = I$$

onde m é a massa da lâmina e I é o momento de inércia em relação ao eixo dado. A Equação 9 nos diz que, se a massa da lâmina estiver concentrada a uma distância R do eixo, então o momento de inércia dessa “massa pontual” seria o mesmo que o momento de inércia da lâmina.

Em particular, o raio de giração $\bar{y}$ em relação ao eixo x e o raio de giração $\bar{x}$ em relação ao eixo y têm as equações

10

$$m\bar{y}^2 = I_x \quad m\bar{x}^2 = I_y$$

Então $(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados resultantes. (Observe a analogia com o centro de massa.)

EXEMPLO 5 Determine o raio de giração em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Como observado, a massa do disco é $m = \rho\pi a^2$, e da Equação 10 temos

$$\bar{y}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de giração em relação ao eixo x é $\bar{y} = \frac{1}{2}a$, que é metade do raio do disco. $\square$

PROBABILIDADE

Na Seção 8.5, consideramos a *função densidade de probabilidade* f de uma variável aleatória contínua X . Isso significa que $f(x) \geq 0$ para todo x , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ e a probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

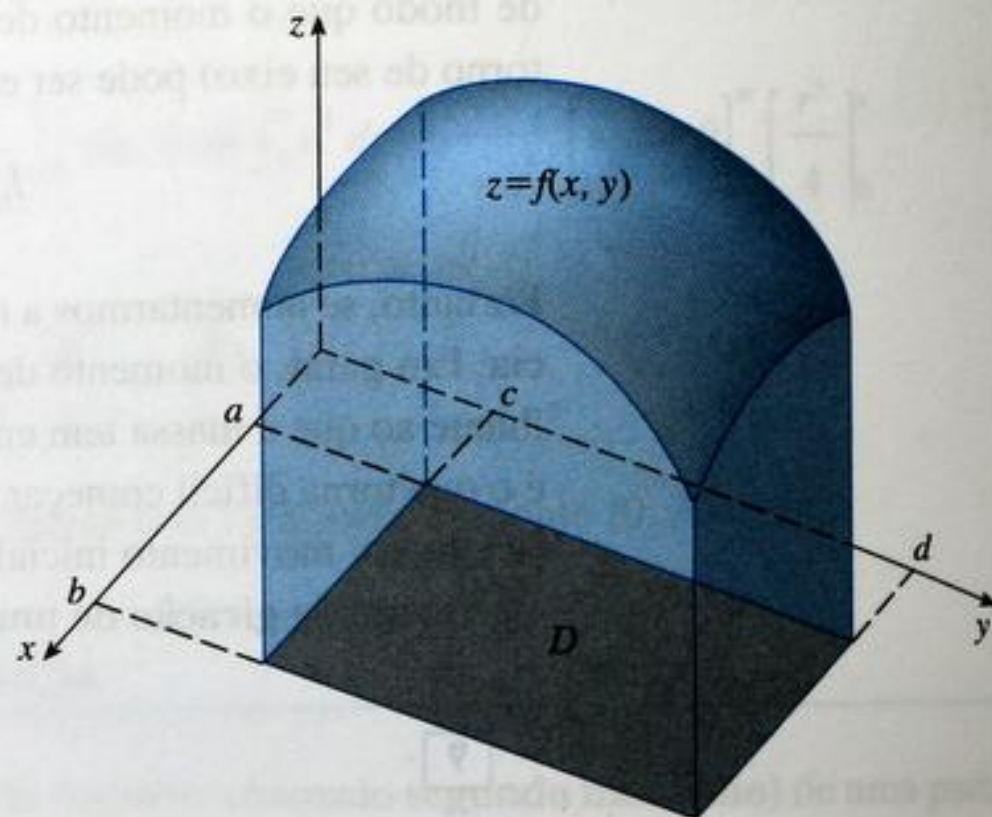
Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma mulher adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

Em particular, se a região for um retângulo, a probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

FIGURA 7
A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$ e abaixo do gráfico da função densidade conjunta



Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1$$

Como no Exercício 36 da Seção 15.4, a integral dupla sobre $\mathbb{R}^2$ é uma integral imprópria, definida como o limite da integral dupla sobre os círculos ou retângulos que se expandem, e podemos escrever

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

EXEMPLO 6 Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C . Em seguida, calcule $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) dy dx = C \int_0^{10} \left[xy + y^2 \right]_{y=0}^{y=10} dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) dx = 1500C\end{aligned}$$

Portanto, $1500C = 1$, e então $C = \frac{1}{1500}$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$\begin{aligned}P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1500} (x + 2y) dy dx \\ &= \frac{1}{1500} \int_0^7 \left[xy + y^2 \right]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1500} \int_0^7 (8x + 96) dx \\ &= \frac{868}{1500} \approx 0,5787\end{aligned}$$



Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_1(x)$ e Y seja uma variável aleatória com função densidade $f_2(y)$. Então, X e Y são ditas **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

Na Seção 8.5, no Volume I, modelamos o tempo de espera utilizando a função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

onde μ é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

EXEMPLO 7 O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

SOLUÇÃO Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individuais como

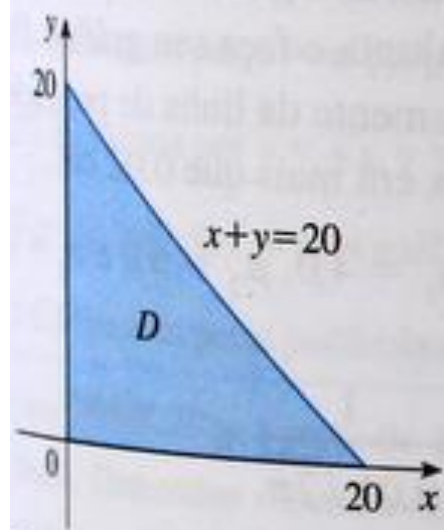
$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-x/10} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-y/5} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Foi pedida também a probabilidade de $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$



onde D é a região triangular mostrada na Figura 8. Então,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y) dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} dy dx \\ &= \frac{1}{50} \int_0^{20} \left[e^{-x/10} (-5) e^{-y/5} \right]_{y=0}^{y=20-x} dx \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10} (1 - e^{(x-20)/5}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4} e^{x/10}) dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0,7476 \end{aligned}$$

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos que 20 minutos antes de tomar seus assentos.

Lembre-se da Seção 8.5, no Volume I, que, se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f , então sua *média* é

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f , definimos a **média X** e a **média Y** , também chamadas **valores esperados** de X e Y , como

$$\boxed{\text{II}} \quad \mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) dA \quad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) dA$$

Observe como são parecidas as expressões de μ_1 e μ_2 em (11) com os momentos M_1 e M_2 de uma lâmina com função densidade ρ nas Equações 3 e 4. De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída. Calculamos probabilidade da mesma maneira que calculamos massa: integrando a função densidade. E, como a “massa de probabilidade” total é 1, as expressões de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ em (5) mostram que podemos pensar que os valores esperados de X e Y , μ_1 e μ_2 , são as coordenadas do “centro de massa” da distribuição de probabilidade.

No próximo exemplo trabalharemos com distribuições normais. Como na Seção 8.5, no Volume I, uma única variável aleatória tem *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

onde μ é sua média e σ é seu desvio-padrão.

EXEMPLO 8 Uma fábrica produz rolamentos (de forma cilíndrica) que são vendidos com tendo 4,0 cm de diâmetro e 6,0 cm de comprimento. Na verdade, o diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm, enquanto o comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm. Supondo que X e Y sejam independentes, escreva a função densidade conjunta e faça seu gráfico. Determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção ter comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que 0,02 cm.

SOLUÇÃO Temos que X e Y têm distribuições normais com $\mu_1 = 4,0$, $\mu_2 = 6,0$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$. As funções densidade individuais para X e Y são

$$f_1(x) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/0,0002} \quad f_2(y) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-(y-6)^2/0,0002}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{0,0002\pi} e^{-(x-4)^2/0,0002} e^{-(y-6)^2/0,0002}$$

$$= \frac{5\,000}{\pi} e^{-5\,000[(x-4)^2 + (y-6)^2]}$$

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.

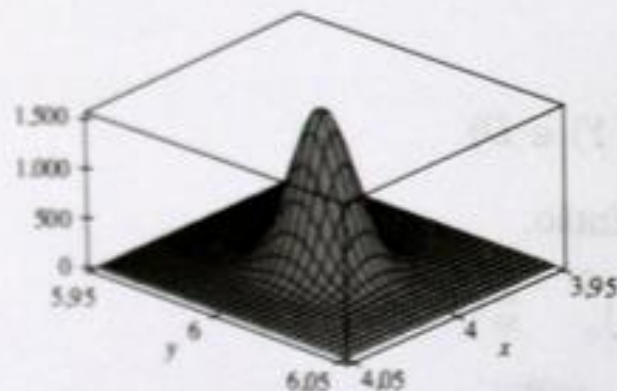


FIGURA 9
Gráfico da função densidade normal conjunta em duas variáveis do Exemplo 8

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de ambos, X e Y , diferirem de seus valores médios por menos de 0,02 cm. Usando uma calculadora ou computador para estimar a integral, temos

$$\begin{aligned} P(3,98 < X < 4,02, 5,98 < Y < 6,02) &= \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} f(x, y) dy dx \\ &= \frac{5\,000}{\pi} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-5\,000[(x-4)^2 + (y-6)^2]} dy dx \\ &\approx 0,91 \end{aligned}$$

Então, a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0,91 = 0,09$$



1. Uma carga elétrica é distribuída sobre o retângulo $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.
2. Uma carga elétrica é distribuída sobre um disco $x^2 + y^2 \leq 4$ de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.
- 3-10 Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ .
 3. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$; $\rho(x, y) = xy^2$
 4. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$; $\rho(x, y) = cxy$
 5. D é uma região triangular com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$
 6. D é a região triangular delimitada pelas retas $x = 0$, $y = x$ e $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$
 7. D é delimitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$; $\rho(x, y) = y$
 8. D é delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$; $\rho(x, y) = x$
 9. $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin(\pi x/L), 0 \leq x \leq L\}$; $\rho(x, y) = y$
 10. D é delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$; $\rho(x, y) = \sqrt{x}$
14. Encontre o centro de massa da lâmina do Exercício 13 se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.
15. Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a , se a densidade em qualquer ponto for proporcional do quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.
16. Uma lâmina ocupa a região dentro do círculo $x^2 + y^2 = 2y$ mas fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Encontre o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.
17. Determine os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 7.
18. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 12.
19. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 15.
20. Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0,1x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y ?

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t , podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v . Suponhamos que

1

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

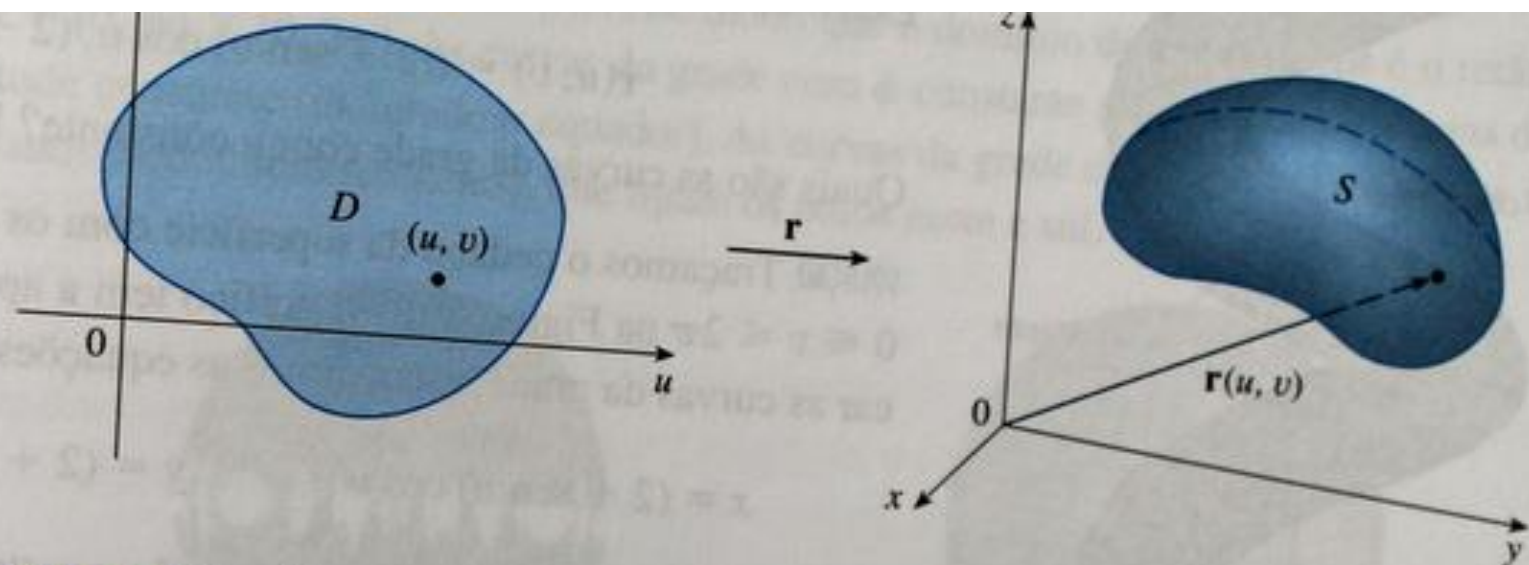
seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv . Então x , y e z , componentes de $\mathbf{r}$, serão funções das duas variáveis u e v com domínio D . O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que

2

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

e (u, v) varie em D , é denominado **superfície parametrizada** S , e as Equações 2 são chamadas **equações paramétricas** de S . Cada escolha de u e v dá um ponto de S ; ao fazermos todas as escolhas, obtemos todo o S . Em outras palavras, a superfície S é traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ quando (u, v) se move na região D (veja a Figura 1).

FIGURA 1
Uma superfície parametrizada



EXEMPLO 1 Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + 2 \sin u \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2 \cos u \quad y = v \quad z = 2 \sin u$$

Para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v , a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

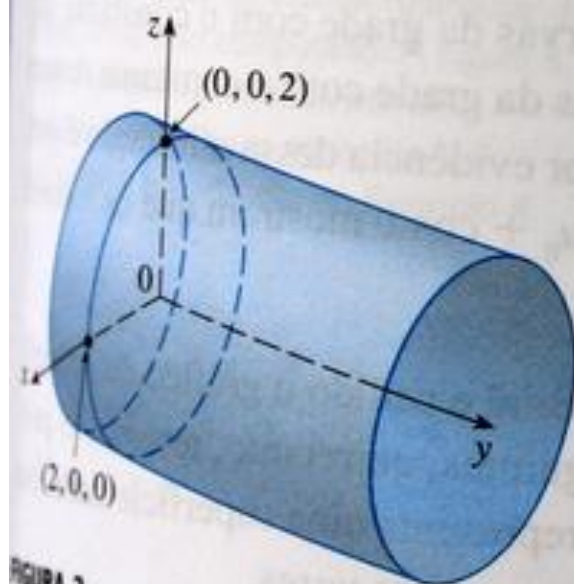


FIGURA 2

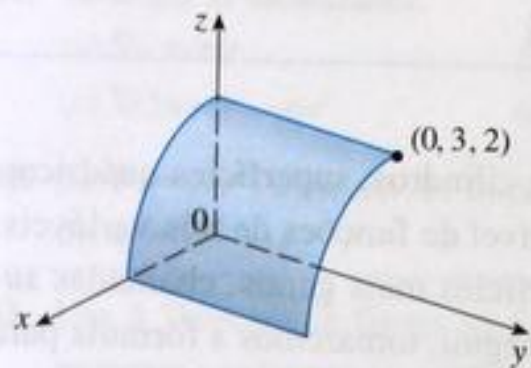


FIGURA 3

No Exemplo 1 não existiam restrições quanto aos parâmetros u e v e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v , escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \leq u \leq \pi/2 \quad 0 \leq v \leq 3$$

então $x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 3$ e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

Se uma superfície parametrizada S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S , uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv . Se mantivermos u constante, impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v , que define uma curva C_1 sobre S (veja a Figura 4).

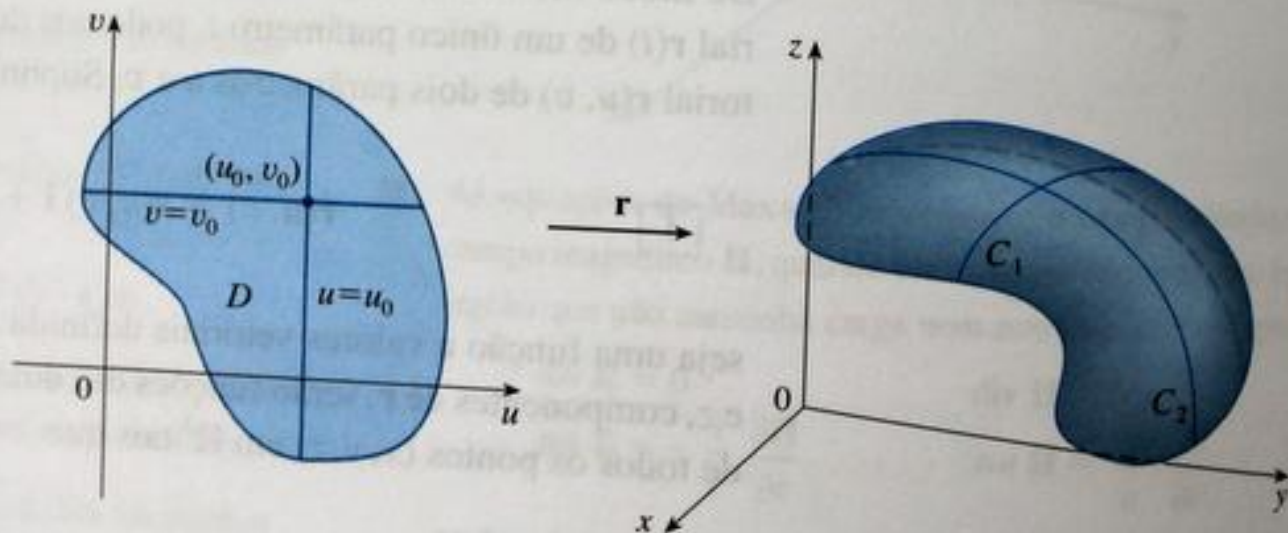


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante, tomando $v = v_0$, obteremos a curva C_2 , dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$, que está em S . A essas curvas chamamos

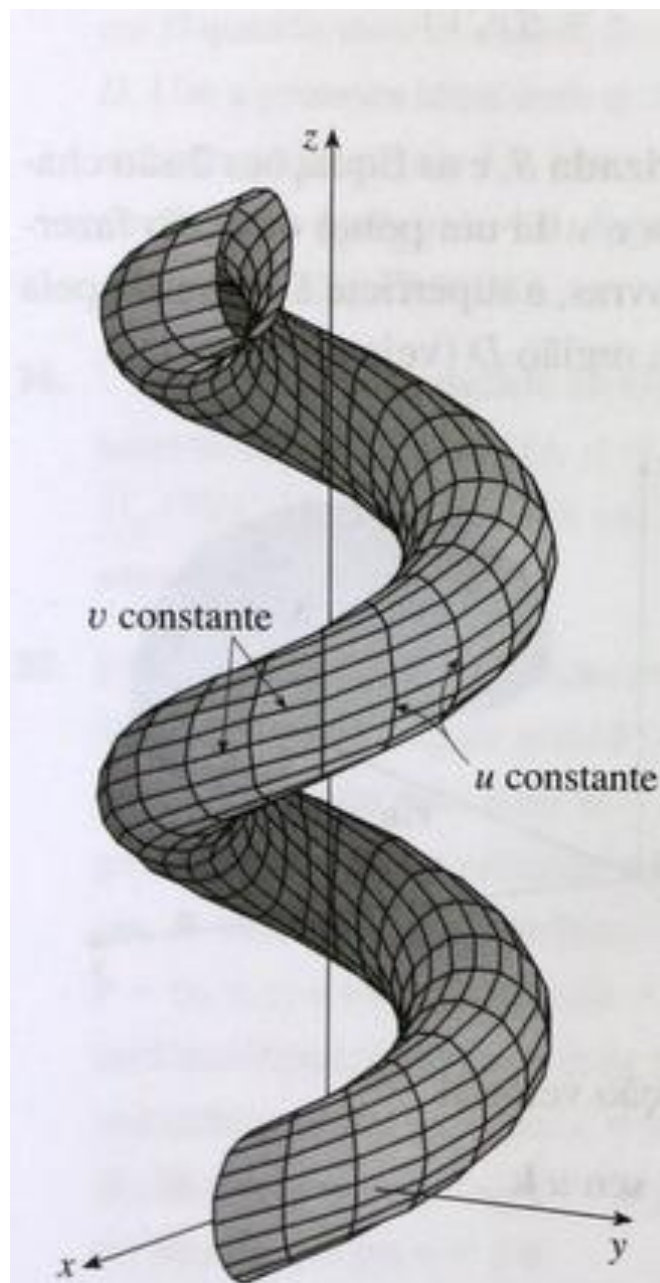


FIGURA 5

Da mesma forma, se mantivermos v constante, tomando $v = v_0$, obteremos a curva dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$, que está em S . A essas curvas chamaremos **curvas da grade** (no Exemplo 1, as curvas da grade obtidas tomando u constante são retas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências). De fato, quando um computador traça o gráfico de uma superfície parametrizada, ele geralmente retrata a superfície traçando essas curvas da grade, como veremos no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Use um sistema de computação algébrica para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? E com v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o pedaço da superfície com os parâmetros delimitados por $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 2\pi$ na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificar as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \sin v) \cos u \quad y = (2 + \sin v) \sin u \quad z = u + \cos v$$

Se v é constante, então $\sin v$ e $\cos v$ são constantes e as equações paramétricas lembram as da hélice do Exemplo 4 da Seção 13.1. Assim, as curvas da grade com v constante são as curvas espirais da Figura 5. Deduzimos que as curvas da grade com u constante devem ser aquelas que parecem circunferências na figura. Maior evidência dessa afirmação é que se mantivermos u fixo, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valo-

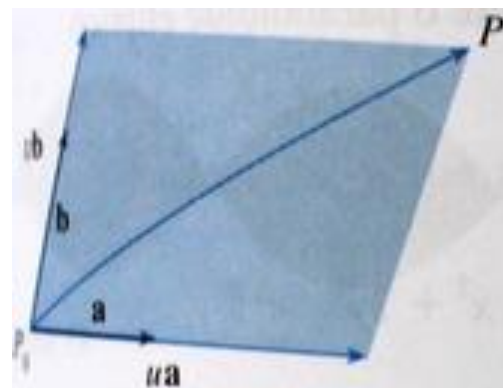


FIGURA 6

EXEMPLO 3 Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO Se P é um ponto qualquer do plano, podemos ir de P_0 até P andando uma distância orientada na direção do vetor $\mathbf{a}$ e outra distância orientada na direção do $\mathbf{b}$. Portanto, existem escalares u e v tais que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ (a Figura 6 ilustra como isso funciona, por meio da Regra do Paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 38 da Seção 12.2). Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P , então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, podemos escrever as equações paramétricas do plano pelo ponto (x_0, y_0, z_0) como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \quad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$



EXEMPLO 4 Determine uma representação paramétrica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos ϕ e θ das coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 15.8). Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 15.8.1), obtemos

$$x = a \sen \phi \cos \theta \quad y = a \sen \phi \sen \theta \quad z = a \cos \phi$$

como equações paramétricas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sen \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sen \phi \sen \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

Temos $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os polos norte e sul. $\square$

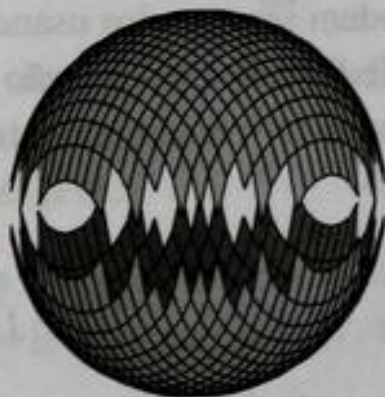


FIGURA 7

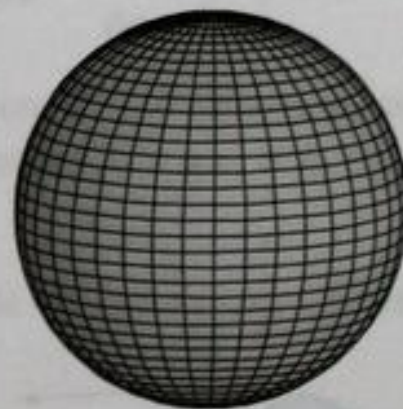


FIGURA 8

Um dos usos de superfícies parametrizadas é na computação gráfica. A Figura 7 mostra o resultado de tentar traçar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ isolando z e traçando os hemisférios de cima e de baixo separadamente. Parte da esfera parece estar faltando, por causa do sistema retangular de grades usado pelo computador. A Figura 8, muito melhor, foi produzida por um computador que usa as equações paramétricas encontradas na Equação 15.8.1.

EXEMPLO 5 Determine uma representação paramétrica do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \quad 0 \leq z \leq 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação $r = 2$ em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros θ e z das coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2 \cos \theta \quad y = 2 \sin \theta \quad z = z$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1$. □

EXEMPLO 6 Determine uma função vetorial que represente o parabolóide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \quad y = y \quad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 + 2y^2) \mathbf{k}$$

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y , ou seja, com equação da forma $z = f(x, y)$, pode sempre ser olhada como uma superfície parametrizada, tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$$

Representações paramétricas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 Determine uma representação paramétrica para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \quad y = y \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha das coordenadas polares r e θ como parâmetros. Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Assim uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + 2r \mathbf{k}$$

onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. □

SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma paramétrica e, portanto, seus gráficos podem ser traçados usando-se um computador. Por exemplo, vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , onde $f(x) \geq 0$, sendo θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 9. Se (x, y, z) é um ponto de S , então

3

$$x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta$$

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S . O domínio do parâmetro é dado por $a \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

EXEMPLO 8 Determine as equações paramétricas da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo x . Use essas equações para traçar o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \quad y = \sin x \cos \theta \quad z = \sin x \sin \theta$$

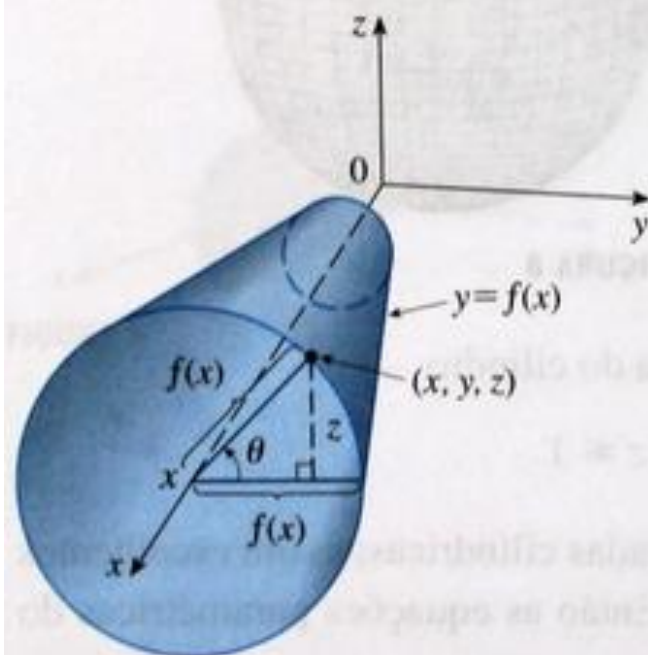
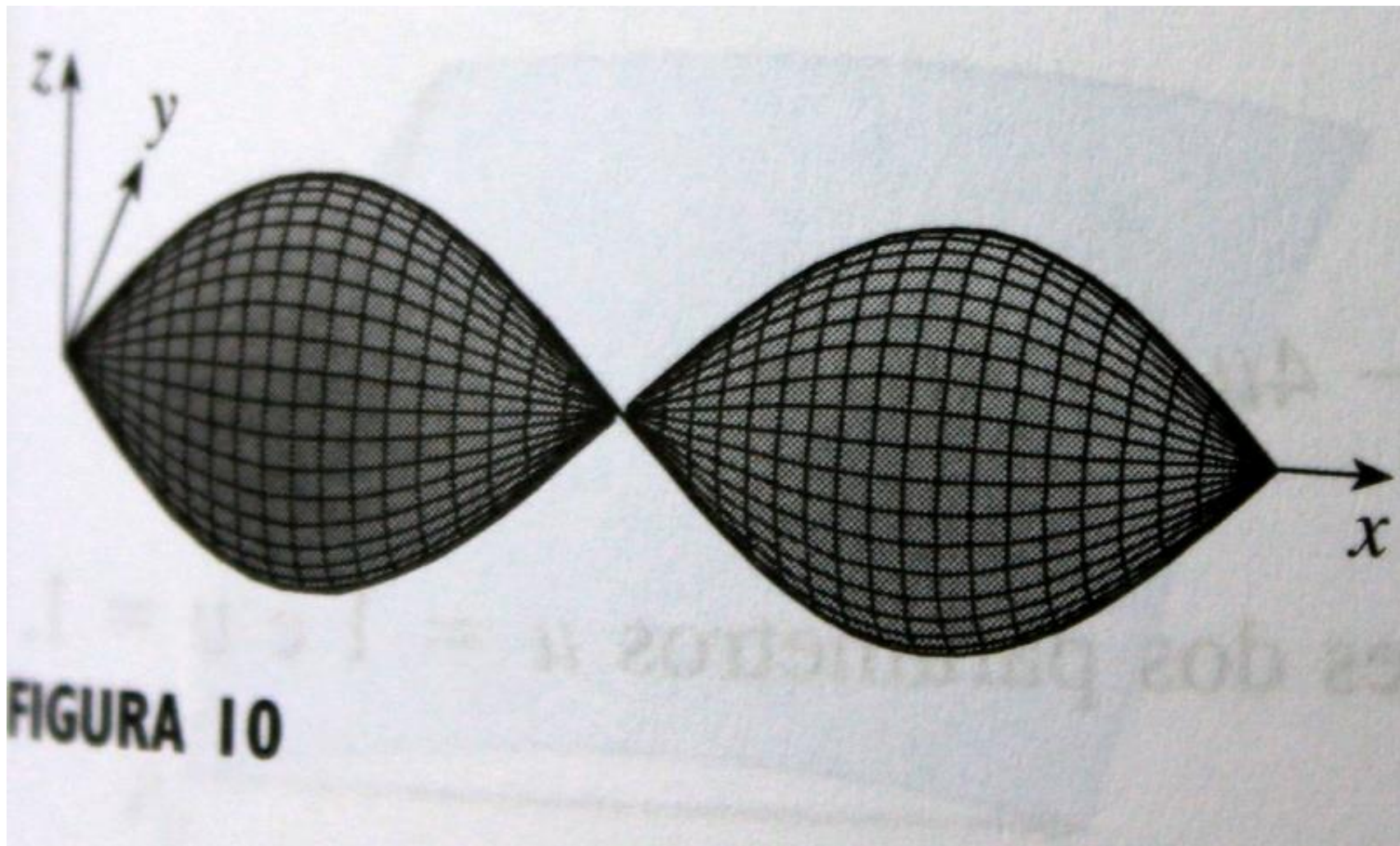


FIGURA 9

Domínio: $0 \leq x \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$



PLANOS TANGENTES

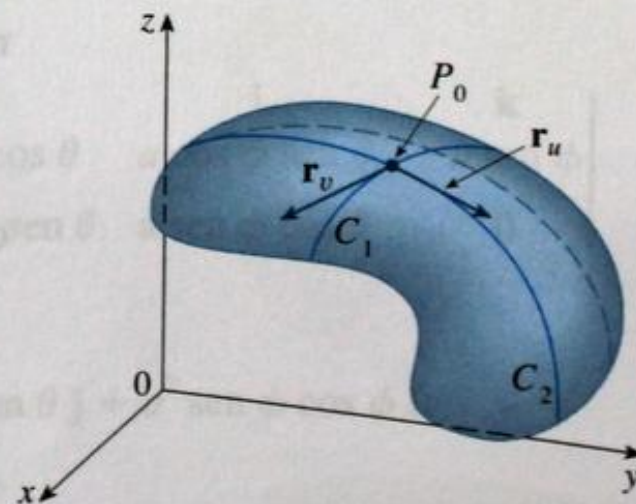
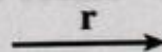
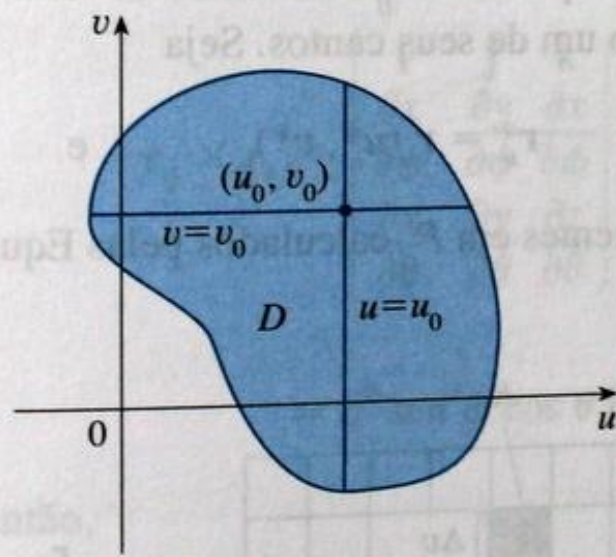
Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada S determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante, tomando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial de um único parâmetro v e define uma curva da grade C_1 sobre S (veja a Figura 11). O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de $\mathbf{r}$ em relação a v :

4

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{k}$$



Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S , e cujo vetor tangente em P_0 é

$$\boxed{5} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{k}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **lisa** (sem “bicos”). Para uma superfície lisa, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é o vetor normal ao plano tangente.

EXEMPLO 9 Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} = 2u \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} = 2v \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

A Figura 12 mostra a superfície que se autorintercepta no Exemplo 9 e seu plano tangente em $(1, 1, 3)$.

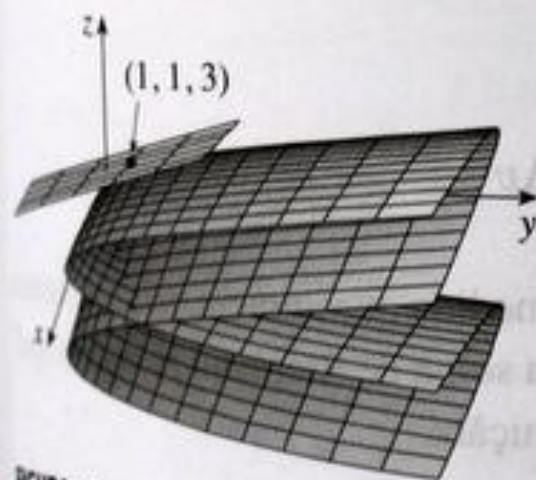


FIGURA 12

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v \mathbf{i} - 4u \mathbf{j} + 4uv \mathbf{k}$$

Observe que o ponto $(1, 1, 3)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$. Assim o vetor normal ali é

$$-2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$$

Portanto, uma equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

ou

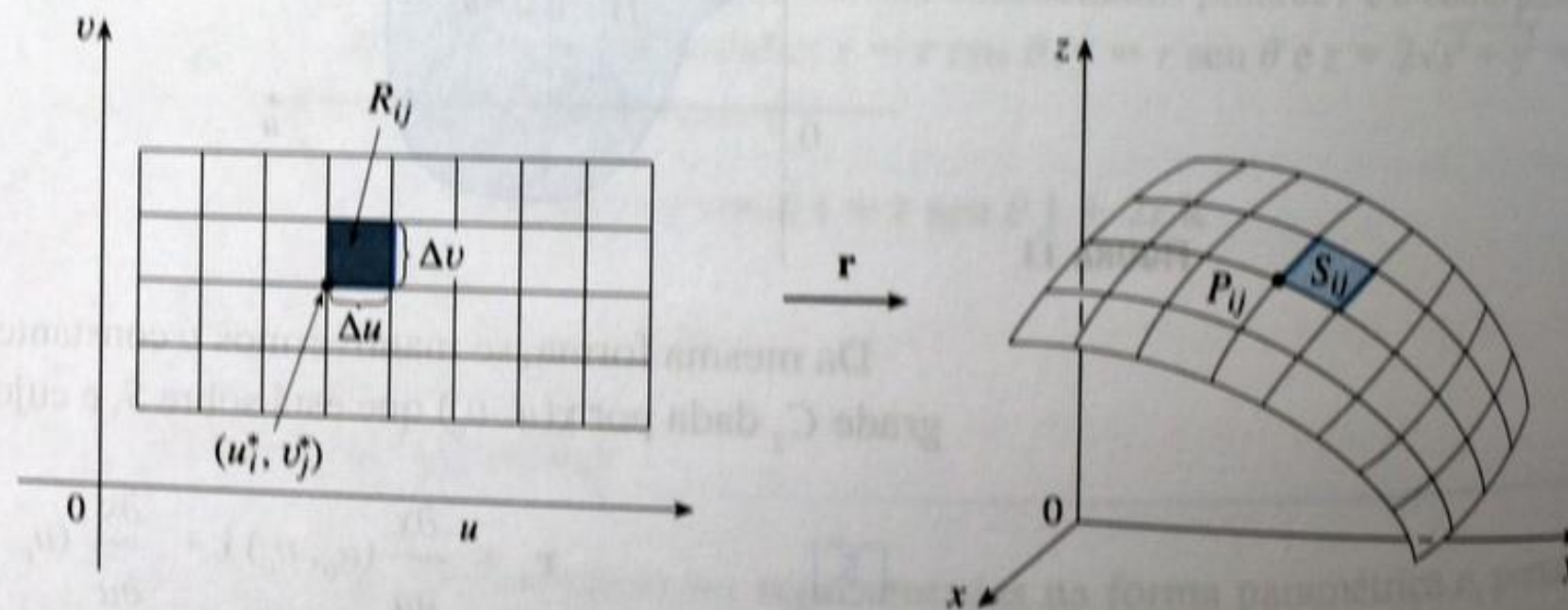
$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

ÁREA DE SUPERFÍCIE

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada geral dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij} . Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto inferior esquerdo do retângulo R_{ij} (veja a Figura 13). O pedaço S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamado de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Seja

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.



A Figura 14(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 14(b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij} . A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

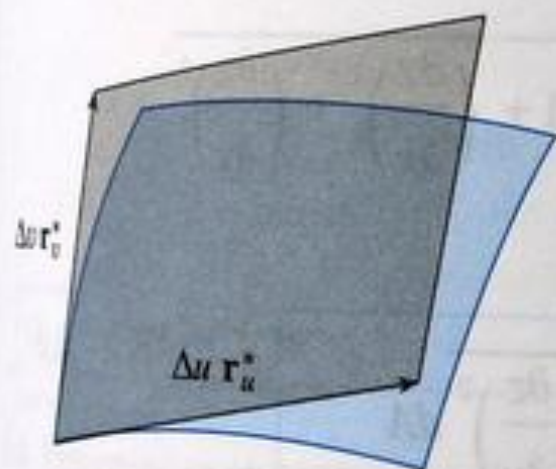
e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

A intuição nos diz que essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$. Isso justifica a seguinte definição:



(a)



(b)

FIGURA 14
Aproximando um retalho por
um paralelogramo.

6

DEFINIÇÃO Se uma superfície parametrizada lisa S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

onde $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$ $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$

EXEMPLO 10 Determine a área da esfera de raio a .

SOLUÇÃO No Exemplo 4 encontramos a representação paramétrica

$$x = a \sin \phi \cos \theta \quad y = a \sin \phi \sin \theta \quad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Vamos calcular primeiro o produto vetorial dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \cos \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Então,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = a^2 \sin \phi \end{aligned}$$

uma vez que $\sin \phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi d\phi d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi = a^2 (2\pi) 2 = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

□

ÁREA DE SUPERFÍCIE DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D onde f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$\begin{array}{l} \text{logo} \end{array} \quad \begin{array}{l} x = x \quad y = y \quad z = f(x, y) \\ \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{array}$$

e

7

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Então, temos

8

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

9

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

9

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

EXEMPLO 11 Determine a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o parabolóide na circunferência $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada está acima do disco D com centro na origem e raio 3 (veja a Figura 15). Usando a Fórmula 9, temos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA \end{aligned}$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right) \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

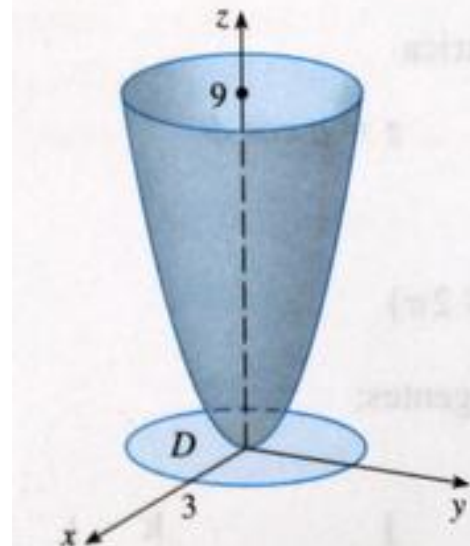


FIGURA 15

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície (6) é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , onde $f(x) \geq 0$ e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta \quad a \leq x \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para calcular a área da superfície S , precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x) \cos \theta \mathbf{j} + f'(x) \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x) \sin \theta \mathbf{j} + f(x) \cos \theta \mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x) \cos \theta & f'(x) \sin \theta \\ 0 & -f(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= f(x) f'(x) \mathbf{i} - f(x) \cos \theta \mathbf{j} - f(x) \sin \theta \mathbf{k} \end{aligned}$$

e, então,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 \cos^2\theta + [f(x)]^2 \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \end{aligned}$$

porque $f(x) \geq 0$. Portanto, a área de S é

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \, d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \end{aligned}$$

Isso é precisamente a fórmula que usamos para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

1-2 Determine se os pontos P e Q estão na superfície dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v \rangle$

$P(7, 10, 4), Q(5, 22, 5)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2 \rangle$

$P(3, -1, 5), Q(-1, 3, 4)$

3-6 Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v) \mathbf{i} + (3 - v) \mathbf{j} + (1 + 4u + 5v) \mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sin u \mathbf{i} + 3 \cos u \mathbf{j} + v \mathbf{k}, 0 \leq v \leq 2$

5. $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, \cos \theta, \sin \theta \rangle$

6. $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, x \cos \theta, x \sin \theta \rangle$

 **7-12** Use um computador para traçar o gráfico da superfície parametrizada. Imprima o resultado e indique sobre esta impressão quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2 + 1, v^3 + 1, u + v \rangle, \quad -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2, v^2 \rangle, \quad -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, u^5 \rangle, \quad -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$

10. $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \ln \operatorname{tg}(v/2) \rangle,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0,1 \leq v \leq 6,2$

11. $x = \sin v, \quad y = \cos u \sin 4v, \quad z = \sin 2u \sin 4v,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$

12. $x = u \sin u \cos v, \quad y = u \cos u \cos v, \quad z = u \sin v$

13-18 Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por I-VI e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}, \quad -\pi \leq u \leq \pi$

15. $\mathbf{r}(u, v) = \sin v \mathbf{i} + \cos u \sin 2v \mathbf{j} + \sin u \sin 2v \mathbf{k}$

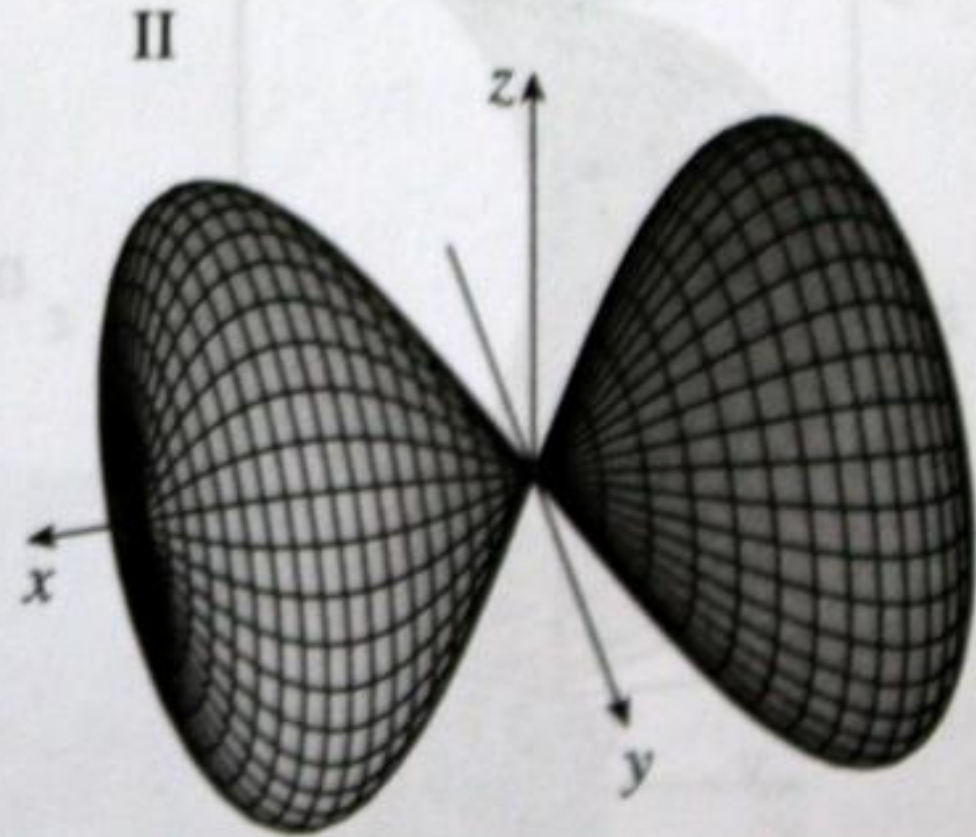
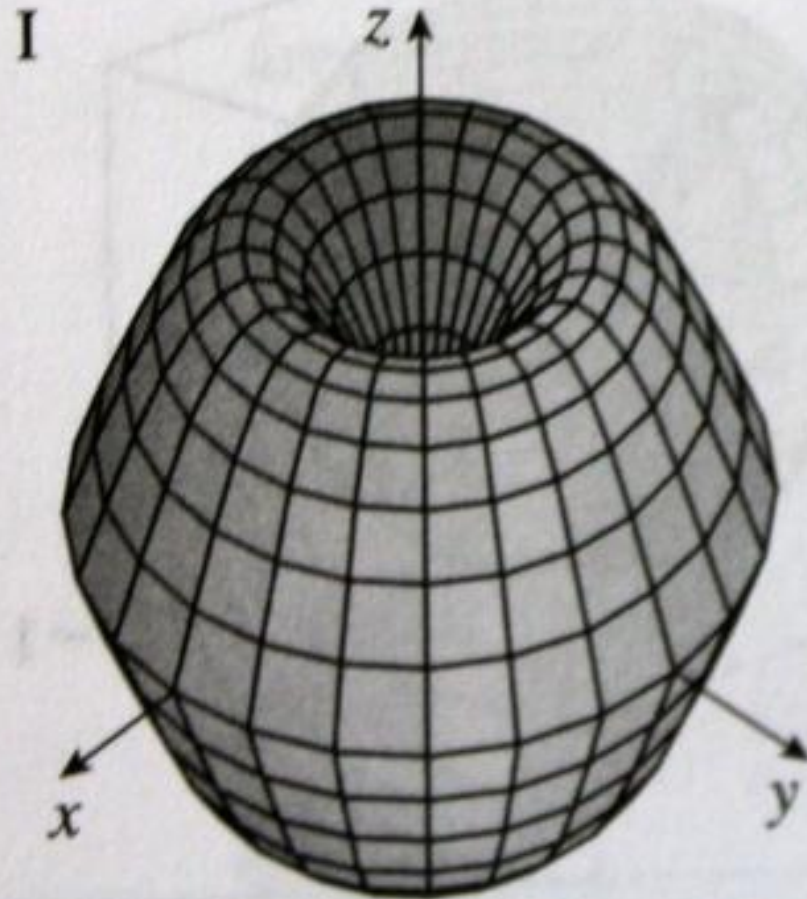
16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u,$

$$y = (1 - u)(3 + \cos v) \sin 4\pi u,$$

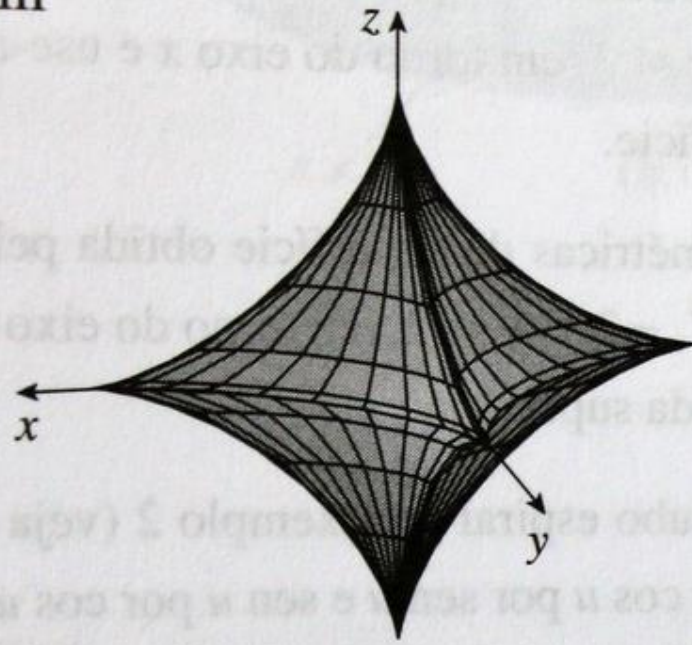
$$z = 3u + (1 - u) \sin v$$

17. $x = \cos^3 u \cos^3 v, y = \sin^3 u \cos^3 v, z = \sin^3 v$

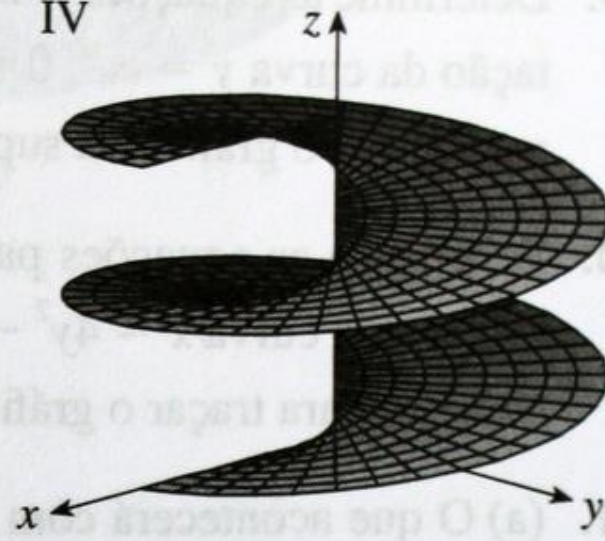
18. $x = (1 - |u|) \cos v, y = (1 - |u|) \sin v, z = u$



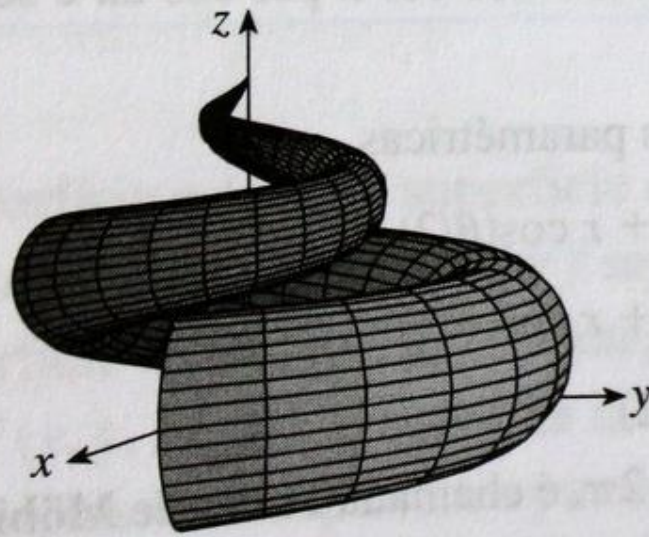
III



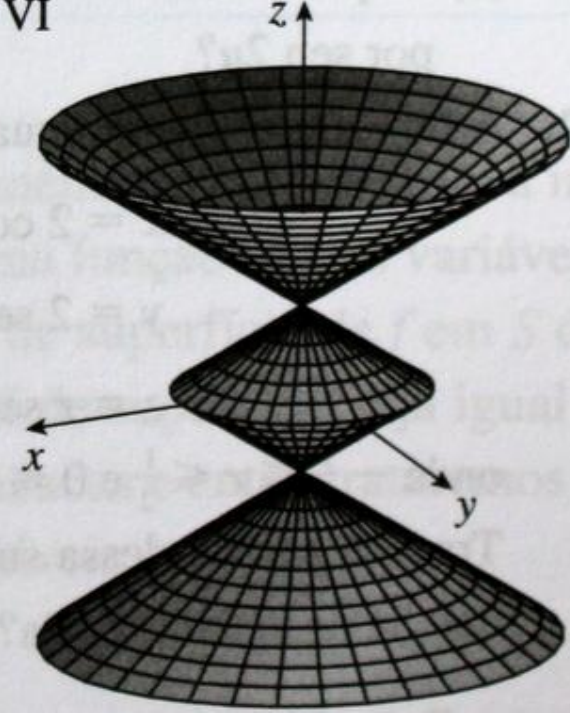
IV



V



VI



37-47 Determine a área da superfície.

- 37.** A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante
- 38.** A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$
- 39.** A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$
- 40.** A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + v, u - 2v, 3 - 5u + v \rangle$ que é dada por $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$
- 41.** A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
- 42.** A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$
- 43.** A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
- 44.** A parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$
- 45.** A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que está entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$
- 46.** O helicóide (ou rampa espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$
- 47.** A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$

