

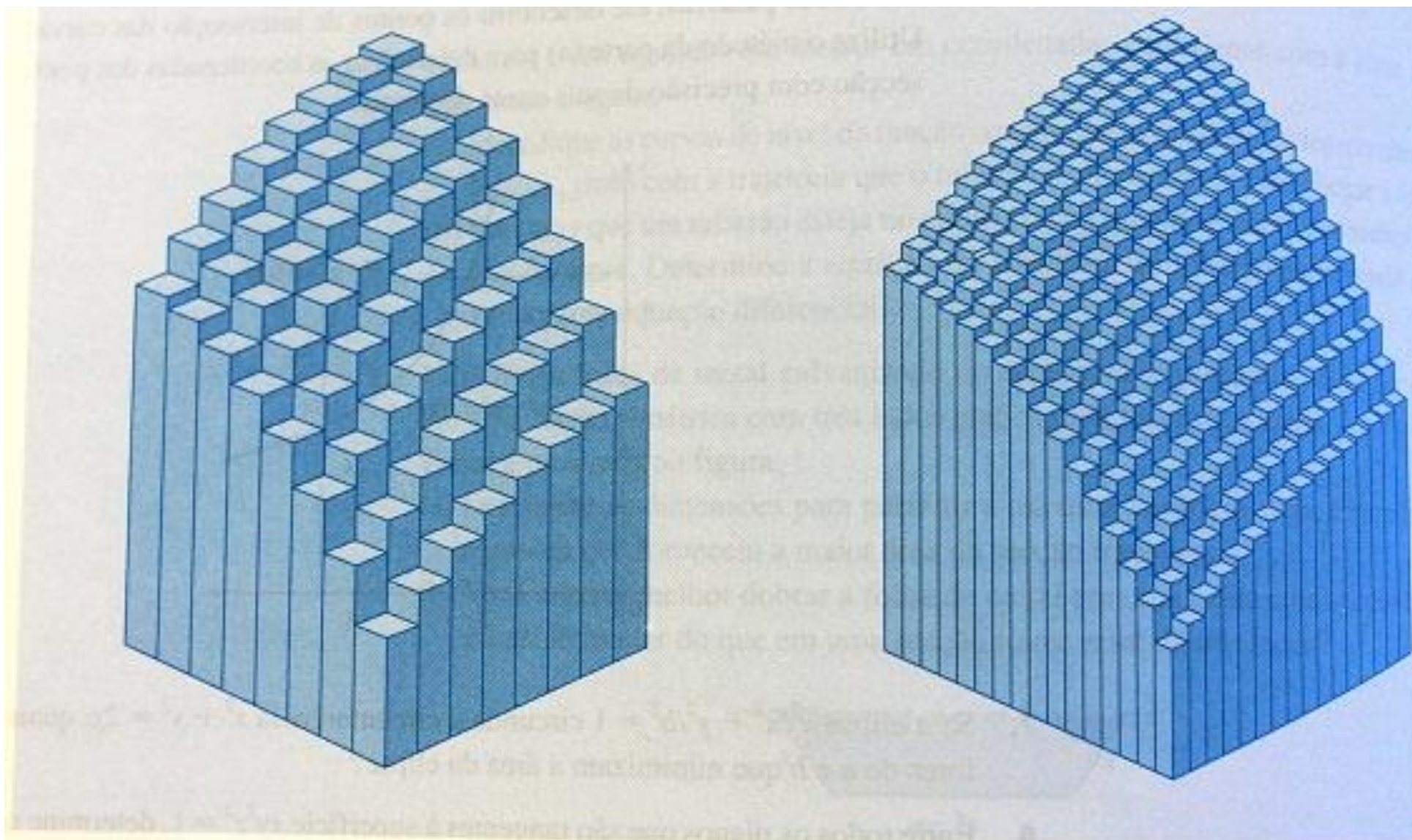
CÁLCULO III

1º semestre de 2014

Aulas 1-3

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Ref.: STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v.2



Uma integral dupla de uma função positiva é um volume, que é o limite das somas dos volumes de colunas retangulares.

REVISÃO DA INTEGRAL DEFINIDA

Antes de tudo, vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é definida em $a \leq x \leq b$, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos pontos arbitrários x_i^* em cada um desses subintervalos. Em seguida, formamos a soma de Riemann

1

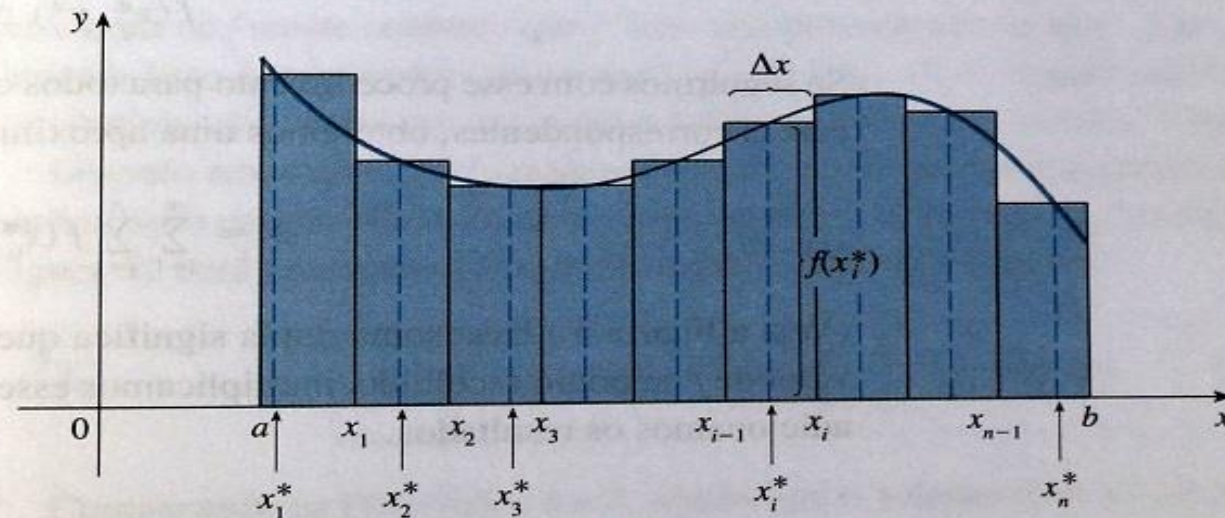
$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

e tomamos o limite dessa soma quando $n \rightarrow \infty$ para obter a integral definida de a até b da função f :

2

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

No caso especial em que $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores da Figura 1 e $\int_a^b f(x) dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b .



5 DEFINIÇÃO A integral dupla de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

se esse limite existir.

O significado preciso do limite da Definição 5 é que para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos os inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} .

Uma função é dita **integrável** se o limite na Definição 5 existir. É mostrado em cursos de cálculo avançado que todas as funções contínuas são integráveis. Na realidade, a inte-

O ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij} , porém, se o escolhermos como o canto superior direito de R_{ij} [ou seja, (x_i, y_j) , veja a Figura 3], então a expressão da soma dupla ficará mais simples:

6

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Comparando as Definições 4 e 5, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

A soma na Definição 5

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla. [Observe a semelhança dessa soma com a de Riemann em (1) para funções de

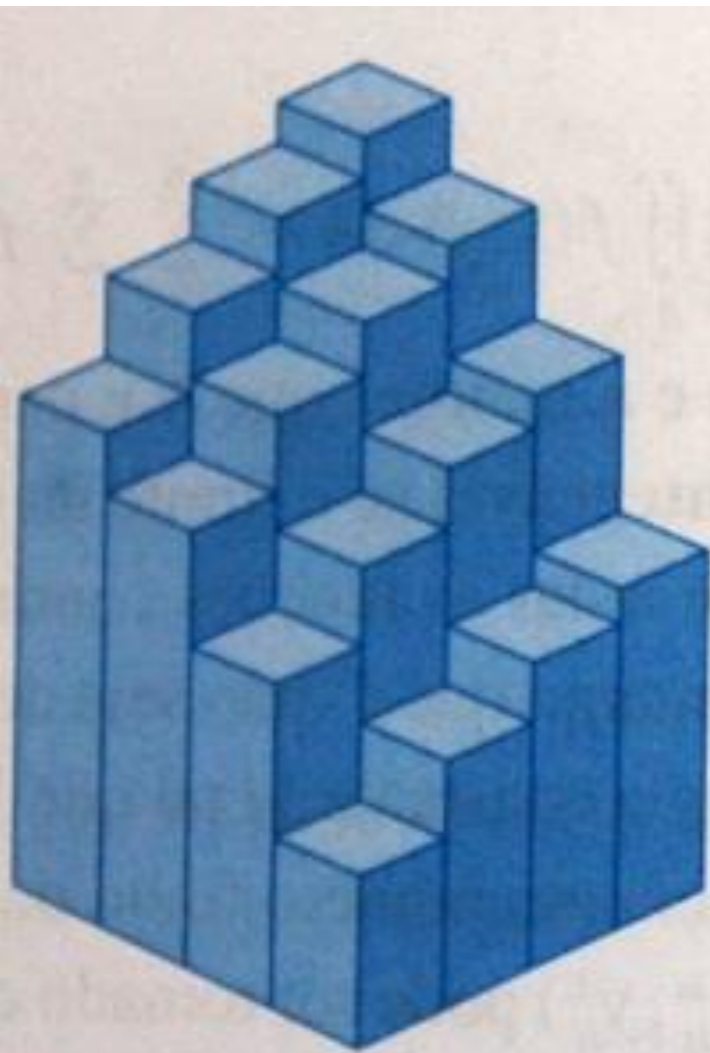
EXEMPLO 1 Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto amostral como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij} . Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.

SOLUÇÃO Os quadrados estão ilustrados na Figura 6. O parabolóide elíptico é o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ e a área de cada quadrado vale 1. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

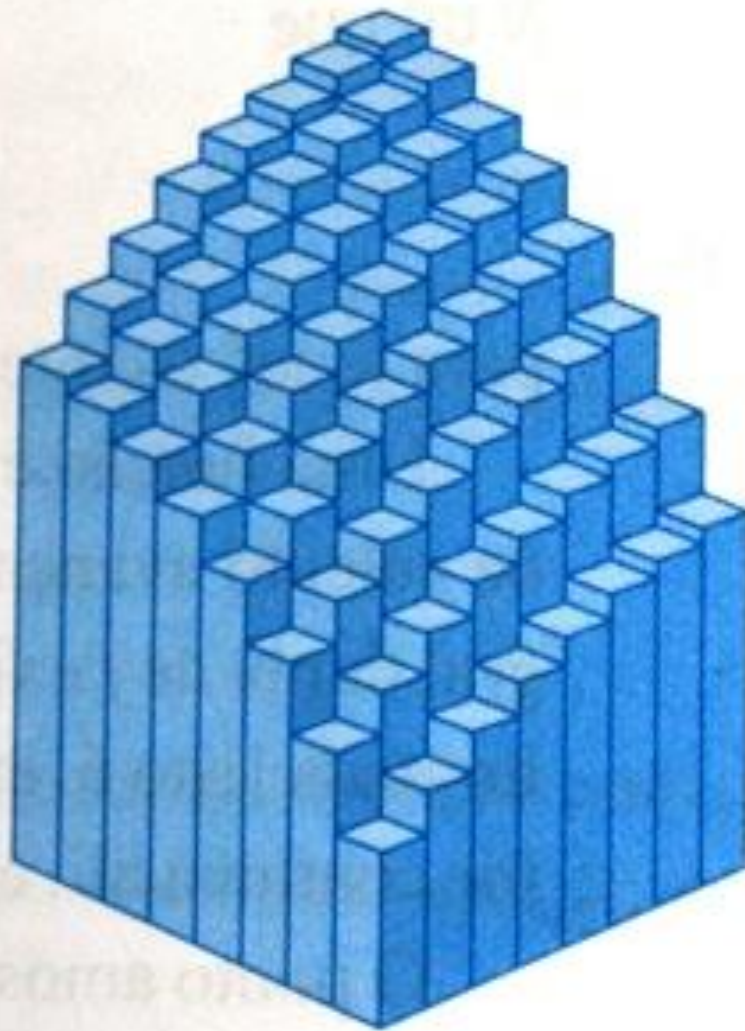
$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Esse é o volume das caixas aproximadoras mostradas na Figura 7. □

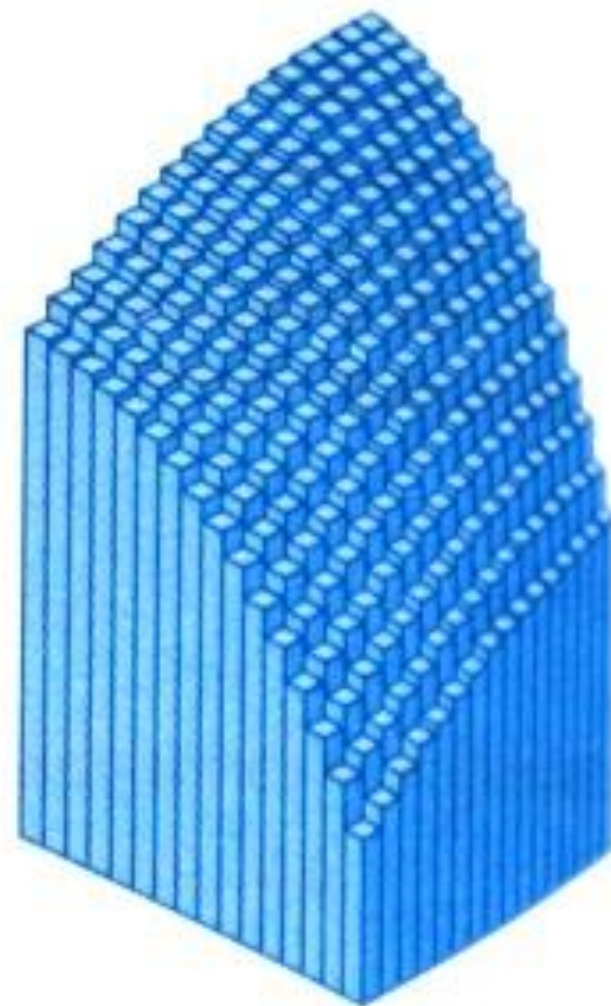
Obtemos melhores aproximações do volume no Exemplo 1, quando aumentamos o número de quadrados. A Figura 8 mostra como as colunas começam a parecer mais com o sólido verdadeiro e as aproximações correspondentes vão se tornando mais precisas quando usamos 16, 64 e 256 quadrados. Na próxima seção mostraremos que o volume exato é 48.



(a) $m=n=4$, $V \approx 41,5$



(b) $m=n=8$, $V \approx 44,875$



(c) $m=n=16$, $V \approx 46,46875$

EXEMPLO 2 Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} \, dA$$

SOLUÇÃO Seria muito difícil calcular a integral diretamente da Definição 5, mas, como $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$, podemos calcular a integral interpretando-a como um volume. Se $z = \sqrt{1 - x^2}$, então $x^2 + z^2 = 1$ e $z \geq 0$, logo a integral dupla dada representa o volume do sólido S que está abaixo do cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ e acima do retângulo R (veja a Figura 9). O volume de S é a área de um semicírculo com raio uma vez o comprimento do cilindro. Portanto,

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} \, dA = \frac{1}{2} \pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$

REGRA DO PONTO MÉDIO PARA INTEGRAIS DUPLAS

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$$

onde $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EXEMPLO 3 Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2) dA$, onde $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro dos quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10. Então, temos $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ e $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. A área de cada sub-retângulo é $\Delta A = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2) dA &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\&= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \Delta A \\&= f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A \\&= \left(-\frac{67}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{139}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{51}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{123}{16}\right) \frac{1}{2} \\&= -\frac{95}{8} = -11,875\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\iint_R (x - 3y^2) dA \approx -11,875$$



PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS DUPLAS

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser demonstradas como na Seção 5.2, no Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são conhecidas como *linearidade* da integral.

$$\boxed{7} \quad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

$$\boxed{8} \quad \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA \quad \text{onde } c \text{ é uma constante.}$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

$$\boxed{9} \quad \iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

Suponha que f seja uma função de duas variáveis contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y* . (Observe a semelhança com a derivada parcial.) Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, obteremos

$$\boxed{1} \quad \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Então,

$$\boxed{2} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b .

EXEMPLO 1 Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

(b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2$$

Portanto, a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{2} \right|_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^3 = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

4 **TEOREMA DE FUBINI** Se f for contínua no retângulo

$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R , f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas lisas e que a integral iterada exista.

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Veja a Figura 5.) Esse sólido foi considerado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla, usando o Teorema de Fubini. Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3} x^3 - 2y^2 x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3} y - \frac{4}{3} y^3 \right]_0^2 = 48 \end{aligned}$$



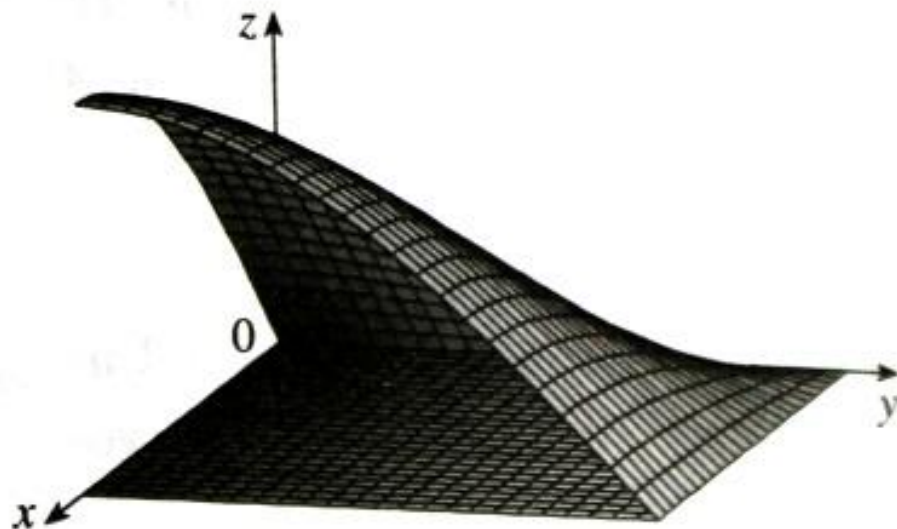
5

$$\iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \quad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então, pela Equação 5,

$$\iint_R \sin x \cos y dA = \int_0^{\pi/2} \sin x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy$$

$$= \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} \left[\sin y \right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$



3-14 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy$

4. $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos y dy dx$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y dx dy$

7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8 dx dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$

10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y} dx dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 (u - v)^5 du dv$

12. $\int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

13. $\int_0^2 \int_0^\pi r \operatorname{sen}^2 \theta d\theta dr$

14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t} ds dt$

15-22 Calcule a integral dupla.

15. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4) dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$

16. $\iint_R \cos(x + 2y) dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$

17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$

18. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2} dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

19. $\iint_R x \sin(x + y) dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1 + xy} dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R xye^{x^2y} dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 2]$

22. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DUPLA

Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região D seguem imediatamente da Definição 2 e das Propriedades 7, 8 e 9 da Seção 15.1.

$$\boxed{6} \quad \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$$

$$\boxed{7} \quad \iint_D cf(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em D , então

$$\boxed{8} \quad \iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$$

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real, dada pela equação $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

$$\boxed{9} \quad \iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

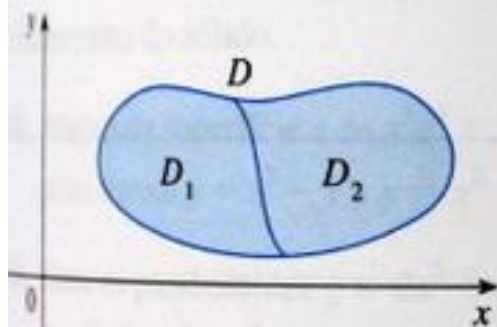
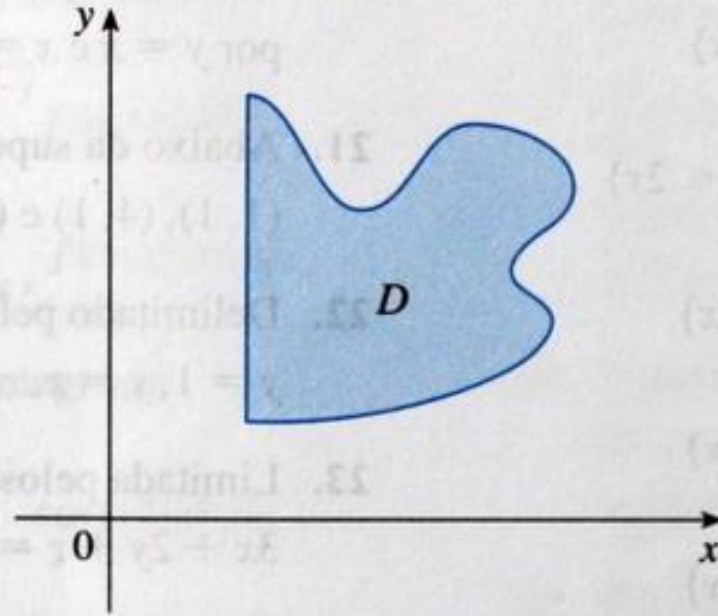
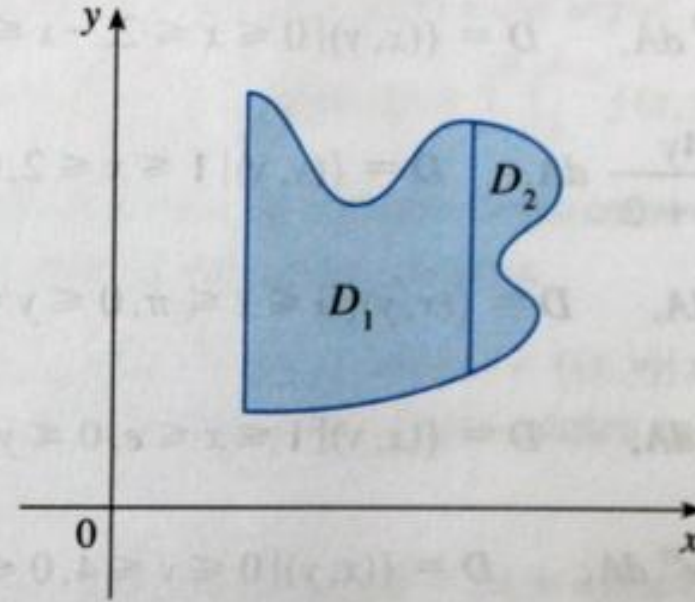


FIGURA 17

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões D que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse processo (veja os Exercícios 51 e 52).



(a) D não é do tipo I nem do tipo II



(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D , obteremos a área de D :

10

$$\iint_D 1 \, dA = A(D)$$

II Se $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) em D , então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(D)$$

EXEMPLO 6 Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos y \leq 1$, temos $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$, e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq 4\pi e$$

7-18 Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D x^3 y^2 dA, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$

8. $\iint_D \frac{4y}{x^3 + 2} dA, \quad D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$

9. $\iint_D x dA, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

10. $\iint_D x^3 dA, \quad D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$

11. $\iint_D y^2 e^{xy} dA, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$

12. $\iint_D x \sqrt{y^2 - x^2} dA, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$

13. $\iint_D x \cos y \, dA,$ D é limitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$

14. $\iint_D (x + y) \, dA,$ D é limitada por $y = \sqrt{x}, y = x^2$

15. $\iint_D y^3 \, dA,$
 D é a região triangular com vértices $(0, 2), (1, 1)$ e $(3, 2)$

16. $\iint_D xy^2 \, dA,$ D é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

17. $\iint_D (2x - y) \, dA,$
 D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

19-28 Determine o volume do sólido dado.

- 19.** Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$
- 20.** Abaixo do parabolóide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$
- 21.** Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$
- 22.** Delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$
- 23.** Limitada pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$
- 24.** Limitado pelos planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ e $z = 0$

39-44 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

39. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$

40. $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y) dy dx$

41. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy$

42. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x, y) dx dy$

43. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$

44. $\int_0^1 \int_{\arctg x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx$

45-50 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

45. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$

46. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy$

47. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$

48. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx$

49. $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$

50. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$

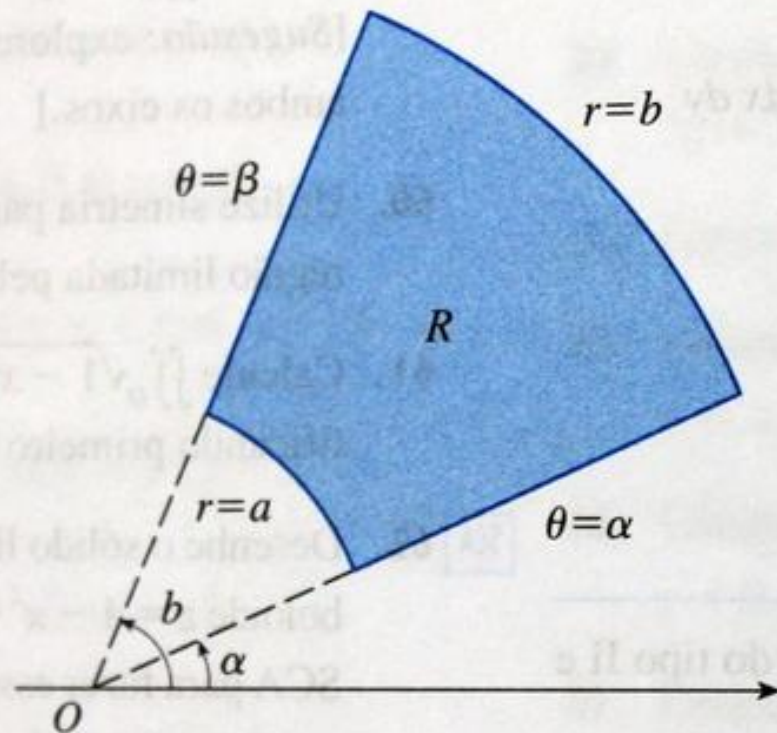


FIGURA 3 Retângulo polar

O “centro” dos sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \frac{1}{2} (r_{i-1} + r_i)$$

$$\theta_j^* = \frac{1}{2} (\theta_{j-1} + \theta_j)$$

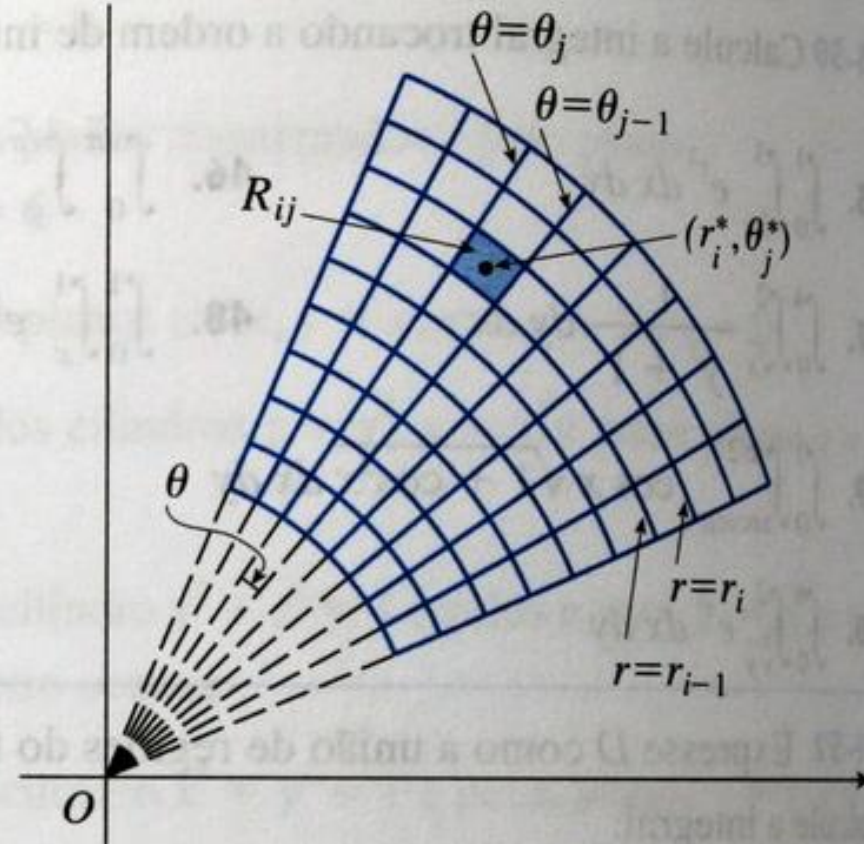


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) | y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto, da Fórmula 2, segue

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta \right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[7 \cos \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= 7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \Big|_0^\pi = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Se tomarmos $z = 0$ na equação do parabolóide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do parabolóide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

o que não é fácil de calcular, pois envolve determinar $\int (1 - x^2)^{3/2} dx$.

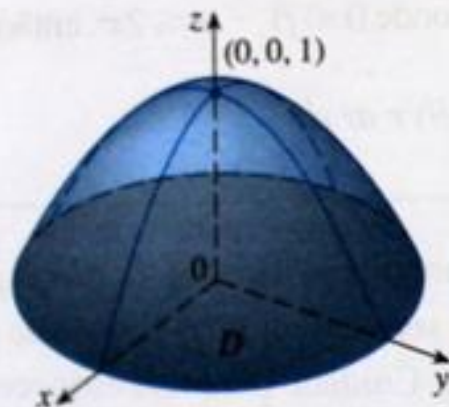


FIGURA 6

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1 dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

que coincide com a Fórmula 10.4.3.

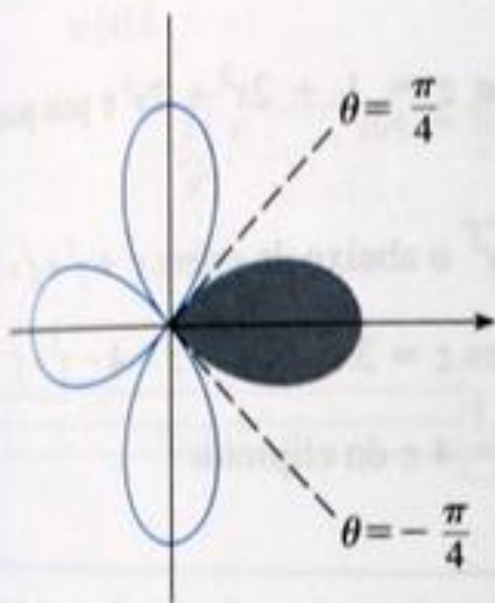


FIGURA 8

EXEMPLO 3 Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Sua área é

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

□

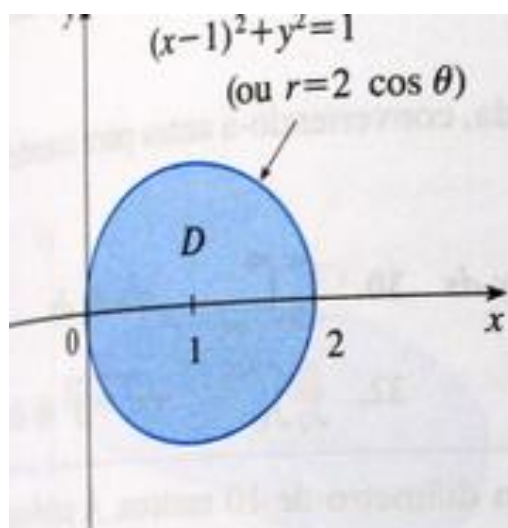


FIGURA 9

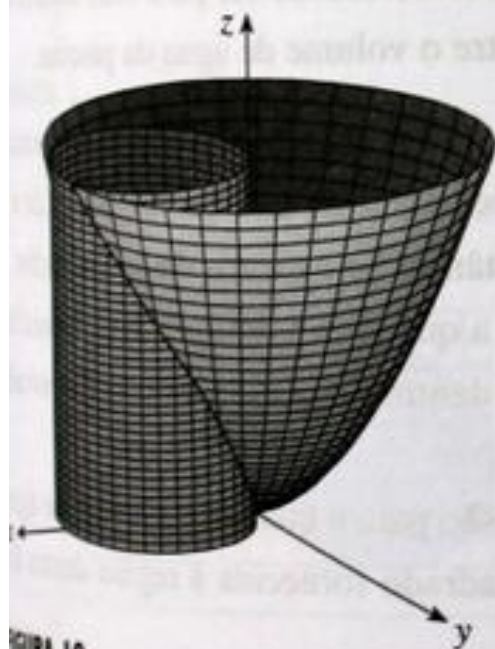


FIGURA 10

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cuja fronteira tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(veja as Figuras 9 e 10). Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r \cos \theta$, assim, a fronteira circular fica $r^2 = 2r \cos \theta$, ou $r = 2 \cos \theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$$

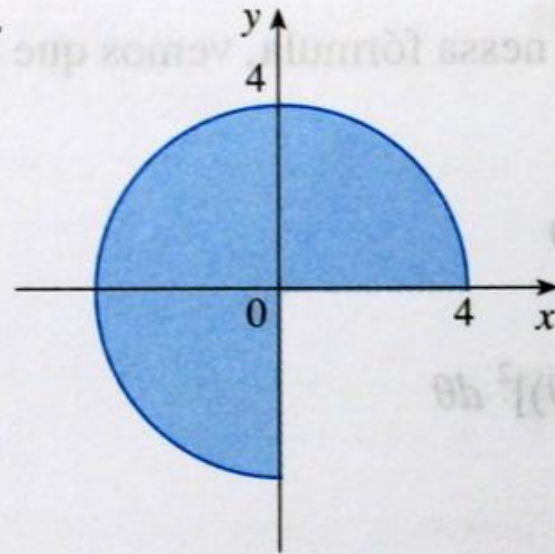
e, da Fórmula 3, vem

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)] d\theta \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

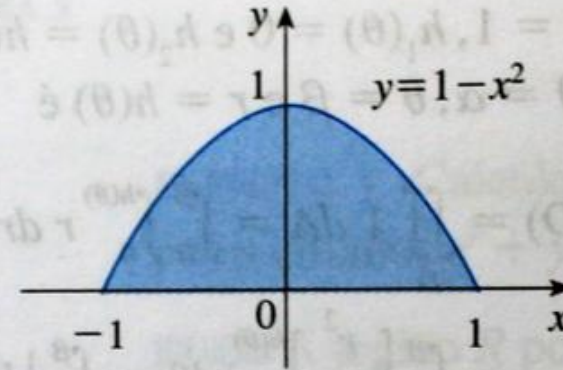
□

1-4 Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva $\iint_R f(x, y) dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R .

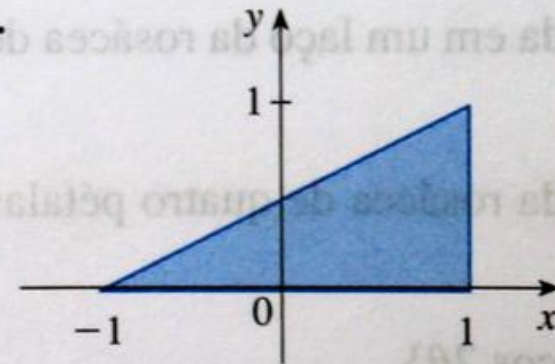
1.



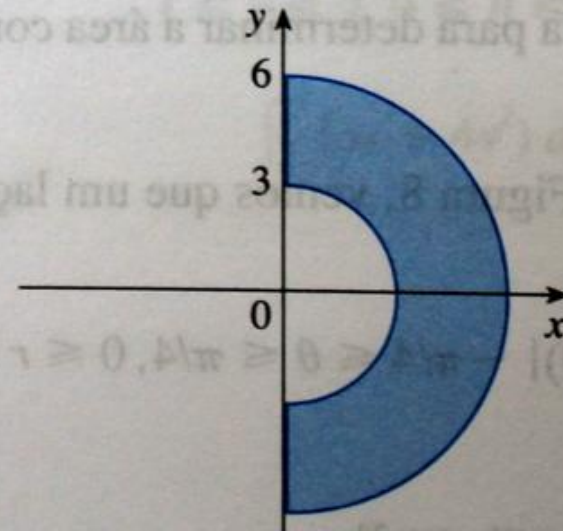
2.



3.



4.



5-6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a

5. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_4^7 r \, dr \, d\theta$

6. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r \, dr \, d\theta$

7-14 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_D xy \, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3

8. $\iint_R (x + y) \, dA$, onde R é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

9. $\iint_R \cos(x^2 + y^2) \, dA$, onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$

10. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$, onde D é a região delimitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\iint_R ye^x dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 25$

13. $\iint_R \arctg(y/x) dA$, onde $R = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

14. $\iint_D x dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15-18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região delimitada pela curva $r = 4 + 3 \cos \theta$

17. A região interior a ambos os círculos $r = \cos \theta$ e $r = \sin \theta$

18. A região dentro do círculos $r = 1 + \cos \theta$ e fora do círculo $r = 3 \cos \theta$

19-27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 4$

20. Abaixo do parabolóide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy

21. Delimitado pelo hiperbolóide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitado pelo parabolóide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante

25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitada pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$