MECÂNICA VETORIAL PARA ENGENHEIROS: ESTÁTICA

CAPÍTULO

6

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Notas de Aula:
J. Walt Oler
Texas Tech University

Análise de Estruturas

Conteúdo

Introdução

Definição de Treliça

Treliças Simples

Análise de Treliças pelo Método dos Nós

Nós em Condições Especiais de Carregamento

Treliças Espaciais

Problema Resolvido 6.1

Análise de Treliças pelo Método das Seções

Treliças Feitas de Várias Treliças Simples

Problema Resolvido 6.3

Análise de Estruturas

Estruturas que Deixam de Ser Rígidas Quando Separadas de seus Apoios

Problema Resolvido 6.4

Máquinas

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Introdução

- Para problemas que tratam do equilíbrio de estruturas feitas de várias partes unidas, as *forças internas*, assim como as *forças externas* devem ser determinadas.
- Para a interação de partes unidas, a terceira lei de Newton estabelece que as *forças de ação e reação* entre corpos que estão em contato têm a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos.
- Três categorias de estruturas de engenharia serão consideradas:
 - a) *Treliças*: consistem em elementos retos *sujeitos a duas forças* e unidos em nós localizados nas extremidades de cada elemento.
 - b) *Estruturas*: contêm ao menos um elemento sujeito a múltiplas forças, ou seja, um membro sobre o qual atuam 3 ou mais forças.
 - c) *Máquinas*: estruturas que contêm partes móveis e que são projetadas para transmitir e modificar forças.

Definição de Uma Treliça

- Uma treliça consiste em elementos retos unidos por nós. Nenhum elemento é contínuo através de um nó.
- A maioria das estruturas reais é feita de várias treliças unidas para formar uma estrutura espacial. Cada treliça sustenta cargas que atuam em seu plano e, portanto, pode ser tratada como uma estrutura bidimensional.
- É comum supor que elementos unidos por meio de conexões aparafusadas ou soldadas sejam unidos por pinos. Portanto, as forças que atuam em cada uma das extremidades de um elemento se reduzem a uma única força sem binário.
- Quando as forças tendem a esticar o elemento, ele está sob *tração*. Quando as forças tendem a comprimir o elemento, ele está sob *compressão*.

Definição de Treliça

Em geral os membros de uma treliça são esbeltos e podem suportar pouca carga lateral. Portanto, todas as cargas devem ser aplicadas nos nós.

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Definição de Treliça

Treliças Simples

- Uma *treliça rígida* é aquela que não irá entrar em colapso sob a aplicação de uma carga.
- Uma *treliça simples* é obtida por meio da adição sucessiva de dois elementos e um nó a uma treliça triangular básica.
- Em uma treliça simples, $m = 2n - 3$, sendo m o número total de elementos e n o número total de nós.

Análise de Treliças pelo Método dos Nós

- Desmembramos a treliça e traçamos um diagrama de corpo livre para cada pino e cada elemento.
- As duas forças que atuam em cada elemento têm a igual intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos.
- As forças exercidas pelo elemento nos dois pinos ligados a ele devem estar direcionadas ao longo desse elemento e serem iguais e opostas.
- As condições de equilíbrio aplicadas aos nós proporcionam $2n$ equações para $2n$ incógnitas. Para uma treliça simples, $2n = m + 3$. Portanto, podemos determinar m forças que atuam nos elementos e 3 reações de apoio.
- As condições de equilíbrio para a treliça inteira geram 3 equações adicionais que não são independentes das equações dos nós.

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Nós em Condições Especiais de Carregamento

- Forças em elementos opostos que estão em duas linhas retas que se interceptam em um nó devem ser iguais.
- As forças em dois elementos opostos são iguais quando uma carga alinhada com um terceiro elemento é aplicada ao nó que une os três. A força no terceiro é igual à carga (incluindo carga nula).
- As forças em dois elementos unidos por um nó (sem carga aplicada) são iguais se os elementos estão alinhados e são zero em caso contrário.
- Identificar os nós em condições especiais de carregamento simplifica a análise de uma treliça.

Treliças Espaciais

- Uma *treliça espacial elementar* consiste em 6 elementos unidos em 4 nós para formar um tetraedro.
- Uma *treliça espacial simples* é formada e pode ser aumentada quando 3 novos elementos e 1 nó são acrescentados ao mesmo tempo à uma treliça elementar.
- Em uma treliça espacial simples, $m = 3n - 6$, sendo m o número de elementos e n o números de nós.
- As condições de equilíbrio para os nós proporcionam $3n$ equações. Para uma treliça simples, $3n = m + 6$ e as equações pode ser resolvidas para determinar as forças em m elementos e 6 reações de apoio.
- A análise do equilíbrio para a treliça inteira gera 6 equações adicionais que não são independentes das equações dos nós.

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.1

SOLUÇÃO:

- A partir do diagrama de corpo livre da treliça inteira, resolvemos as 3 equações de equilíbrio para obter as reações de apoio em C e E .
- O nó A está sujeito às forças de apenas dois elementos. Determinamos então estas forças por meio de um triângulo de forças.
- Na sequência, determinamos as forças desconhecidas que atuam sobre os nós D , B e E ao estabelecer o equilíbrio dos mesmos.
- As reações de apoio e as forças de todos os elementos que chegam ao nó C são conhecidas. Entretanto, podemos verificar seu equilíbrio para conferir os resultados.

Usando o método dos nós, determine a força em cada elemento de treliça mostrada na figura.

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.1

SOLUÇÃO:

- A partir do diagrama de corpo livre da treliça inteira, resolvemos as 3 equações de equilíbrio para obter as reações de apoio em E e C .

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 \\ &= (9.000 \text{ N})(7,2 \text{ m}) + (4.500 \text{ N})(3,6 \text{ m}) - E(1,8 \text{ m})\end{aligned}$$

$$E = 45.000 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 = C_x \quad C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 = -9.000 \text{ N} - 4.500 \text{ N} + 45.000 \text{ N} + C_y$$

$$C_y = 31.500 \text{ N} \downarrow$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.1

- O nó A está sujeito às forças de apenas dois elementos. Determinamos então estas forças por meio de um triângulo de forças.

$$\frac{9.000 \text{ N}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$F_{AB} = 6.750 \text{ N } T$$

$$F_{AD} = 11.250 \text{ N } C$$

- Agora há apenas duas forças desconhecidas no nó D.

$$F_{DB} = F_{DA}$$

$$F_{DE} = 2\left(\frac{3}{5}\right)F_{DA}$$

$$F_{DB} = 11.250 \text{ N } T$$

$$F_{DE} = 13.500 \text{ N } C$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.1

- Agora há apenas duas forças desconhecidas atuando no nó B. Arbitramos que ambas são de tração.

$$\sum F_y = 0 = -4.500 - \frac{4}{5}(11.250) - \frac{4}{5}F_{BE}$$

$$F_{BE} = -16.875 \text{ N}$$

$$F_{BE} = 16.875 \text{ N } C$$

$$\sum F_x = 0 = F_{BC} - 6.750 - \frac{3}{5}(11.250) - \frac{3}{5}(16.875)$$

$$F_{BC} = +23.625 \text{ N}$$

$$F_{BC} = 23.625 \text{ N } T$$

- Há apenas uma força desconhecida no nó E. Arbitramos que o elemento EC está sob tração.

$$\sum F_x = 0 = \frac{3}{5}F_{EC} + 13.500 + \frac{3}{5}(16.875)$$

$$F_{EC} = -39.375 \text{ N}$$

$$F_{EC} = 39.375 \text{ N } C$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.1

- As reações de apoio e as forças de todos os elementos que chegam ao nó C são conhecidas. Entretanto, podemos verificar seu equilíbrio para conferir os resultados.

$$\sum F_x = -23.625 + \frac{3}{5}(39.375) = 0 \quad (\text{verificado})$$

$$\sum F_y = -31.500 + \frac{4}{5}(39.375) = 0 \quad (\text{verificado})$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Análise de Treliças pelo Método das Seções

- Quando se deseja determinar a força em apenas um elemento ou as forças em uns poucos elementos, o *método das seções* é mais eficiente.
- Por exemplo, para determinar a força em um elemento BD , *passamos uma seção* através da treliça como mostrado e traçamos um diagrama de corpo livre para uma das partes resultantes do corte da treliça.
- Com apenas três elementos cortados pela seção, as equações de equilíbrio podem ser aplicadas para que se determinem as forças desconhecidas, incluindo F_{BD} .

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Treliças Feitas de Várias Treliças Simples

- As treliças compostas ao lado são estaticamente determinadas, rígidas e completamente vinculadas.

$$m = 2n - 3$$

- A treliça ao lado contém um *elemento redundante* e é estaticamente *indeterminada*.

$$m > 2n - 3$$

não-rígida

$$m < 2n - 3$$

rígida

$$m = 2n - 4$$

- Reações de apoio adicionais podem ser necessárias para que uma treliça se torne rígida.
- Uma condição necessária porém não suficiente para que uma treliça composta seja estaticamente determinada, rígida e completamente vinculada é:

$$m + r = 2n$$

Problema Resolvido 6.3

SOLUÇÃO:

- Tomamos a treliça inteira como um corpo livre e então aplicamos as condições de equilíbrio para determinar as reações em A e L.
- Passamos uma seção através dos elementos FH , GH e GI e usamos a parte HLI da treliça como corpo livre.
- Aplicamos as condições de equilíbrio para determinar as forças nos elementos desejados.

Determine a força nos elementos FH , GH , e GI .

Problema Resolvido 6.3

SOLUÇÃO:

- Tomamos a treliça inteira como um corpo livre e então aplicamos as condições de equilíbrio para determinar as reações em A e L.

$$\sum M_A = 0 = -(5 \text{ m})(6 \text{ kN}) - (10 \text{ m})(6 \text{ kN}) - (15 \text{ m})(6 \text{ kN}) - (20 \text{ m})(1 \text{ kN}) - (25 \text{ m})(1 \text{ kN}) + (30 \text{ m})L$$

$$L = 7,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 = -20 \text{ kN} + L + A$$

$$A = 12,5 \text{ kN} \uparrow$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.3

- Passamos uma seção através dos elementos FH , GH e GI e usamos a parte HLI da treliça como corpo livre.

- Aplicamos as condições de equilíbrio para determinar as forças nos elementos desejados.

$$\sum M_H = 0$$

$$(7,50 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{GI}(5,33 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13,13 \text{ kN}$$

$$F_{GI} = 13,13 \text{ kN } T$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.3

$$\tan \alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0,5333 \quad \alpha = 28,07^\circ$$

$$\sum M_G = 0$$

$$(7,5 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13,82 \text{ kN}$$

$$F_{FH} = 13,82 \text{ kN C}$$

$$\tan \beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{2}{3}(8 \text{ m})} = 0,9375 \quad \beta = 43,15^\circ$$

$$\sum M_L = 0$$

$$(1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH} \cos \beta)(10 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GH} = -1,371 \text{ kN}$$

$$F_{GH} = 1,371 \text{ kN C}$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Análise de Estruturas

- *Estruturas e máquinas* são estruturas nas quais pelo menos um elemento está *sujeito a múltiplas forças*. Estruturas são projetadas para suportar cargas e geralmente são estacionárias. Máquinas contêm partes móveis e são projetadas para transmitir e modificar forças.
- Um diagrama de corpo livre da estrutura completa é utilizado para determinar as forças externas que nela atuam.
- As forças internas são determinadas pelo desmembramento da estrutura e pela criação de um diagrama de corpo livre para cada componente.
- As forças que atuam em membros sob a ação de duas forças têm linhas de ação conhecidas mas intensidade e sentido desconhecidos.
- As forças que atuam em elementos sob a ação de múltiplas forças têm intensidades e linhas de ação desconhecidas. Eles devem ser representadas por seus componentes x e y desconhecidos.
- As forças entre componentes conectados têm a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos.

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Estruturas que Deixam de Ser Rígidas Quando Separadas de seus Apoios

- Algumas estruturas colapsarão se forem separadas de seus apoios. Tais estruturas não podem ser consideradas como corpos rígidos.
- O diagrama de corpo livre da estrutura completa ao lado mostra quatro componentes de força desconhecidos que não podem ser determinados a partir das três equações de equilíbrio.
- Deve-se considerar a estrutura como feita de duas partes rígidas distintas, porém relacionadas.
- Com reações iguais e opostas no ponto de contato entre os dois elementos, os dois diagramas de corpo livre ao lado mostram 6 componentes de força desconhecidos.
- As condições de equilíbrio, aplicadas aos dois corpos rígidos geram 6 equações independentes.

Problema Resolvido 6.4

Os elementos ACE e BCD estão ligados por um pino em C e pela haste DE . Para o carregamento mostrado, determine a força na haste DE e os componentes da força exercida em C no elemento BCD .

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre para a estrutura completa e determinamos as reações de apoio.
- Traçamos um diagrama de corpo livre para o elemento BCD . A força exercida pela haste DE tem linha de ação conhecida mas intensidade desconhecida. Ela é determinada pela soma dos momentos em relação a C .
- Conhecendo a força na haste DE , a soma das forças nas direções x e y pode ser usada para encontrar os componentes da força em C .
- Utilizando o elemento ACE como um corpo livre, conferimos a solução pela soma dos momentos em relação a A .

Problema Resolvido 6.4

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre para a estrutura completa e determinamos as reações de apoio.

$$\sum F_y = 0 = A_y - 480 \text{ N}$$

$$A_y = 480 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 = -(480 \text{ N})(100 \text{ mm}) + B(160 \text{ mm})$$

$$B = 300 \text{ N } \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 = B + A_x$$

$$A_x = 300 \text{ N } \leftarrow$$

Observação:

$$\alpha = \arctan \frac{80}{150} = 28,07^\circ$$

Problema Resolvido 6.4

- Traçamos um diagrama de corpo livre para o elemento BCD . A força exercida pela haste DE tem linha de ação conhecida mas intensidade desconhecida. Ela é determinada pela soma dos momentos em relação a C .

$$\sum M_C = 0 = (F_{DE} \operatorname{sen} \alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(60 \text{ mm}) + (480 \text{ N})(100 \text{ mm})$$

$$F_{DE} = -561 \text{ N}$$

$$F_{DE} = 561 \text{ N } \swarrow$$

- A soma das forças nas direções x e y pode ser usada para encontrar os componentes da força em C .

$$\sum F_x = 0 = C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N}$$

$$0 = C_x - (-561 \text{ N}) \cos \alpha + 300 \text{ N}$$

$$C_x = 795 \text{ N } \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 = C_y - F_{DE} \operatorname{sen} \alpha - 480 \text{ N}$$

$$0 = C_y - (-561 \text{ N}) \operatorname{sen} \alpha - 480 \text{ N}$$

$$C_y = 216 \text{ N } \uparrow$$

Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 6.4

- Utilizando o elemento ACE como um corpo livre, conferimos a solução pela soma dos momentos em relação a A .

$$\begin{aligned} \sum M_A &= (F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \operatorname{sen} \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm}) \\ &= (561 \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (561 \operatorname{sen} \alpha)(100 \text{ mm}) - (795)(220 \text{ mm}) = 0 \end{aligned}$$

(verificado)

Máquinas

- Máquinas são estruturas utilizadas para transmitir e modificar forças. Sua principal função é transformar *forças de entrada* em *forças de saída*.
- Como exemplo, dada a intensidade de P , determinemos a intensidade de Q para o alicate ao lado.
- Traçamos um diagrama de corpo livre do alicate completo, incluindo as reações que o arame exerce no alicate.
- Como o alicate é uma estrutura não-rígida, usamos uma de suas partes como um corpo livre.
- Calculando o momento em relação a A , temos:

$$\sum M_A = 0 = aP - bQ \quad Q = \frac{a}{b} P$$

Exercícios

1) A barra rígida BDE é suspensa por duas hastes biarticuladas AB e CD . Para a força de 30 kN, determine as reações em A e C e as condições de trabalho (tração / compressão) das hastes AB e CD

Exercícios

6.1 a 6.12 Usando o método dos nós, determine a força em cada barra da treliça ilustrada. Indique se cada barra está tracionada ou comprimida.

Figura P6.1

Figura P6.2

Exercícios

Figura P6.3

Figura P6.4

Exercícios

Figura P6.5

Figura P6.6

Exercícios

Figura P6.9

Figura P6.10

Exercícios

6.45 a 6.48 Classifique cada uma das estruturas dadas como completa parcial ou ineficazmente vinculada. Se completamente vinculada, classifique ainda como determinada ou indeterminada. (Todas as barras podem estar submetidas a tração ou a compressão.)

Figura P6.45

Figura P6.46

Exercícios

6.45 a 6.48 Classifique cada uma das estruturas dadas como completa parcial ou ineficazmente vinculada. Se completamente vinculada, classifique ainda como determinada ou indeterminada. (Todas as barras podem estar submetidas a tração ou a compressão.)

Figura P6.47

Figura P6.48

Exercícios

- 6.23 Determine as forças nas barras CD e DF da treliça da figura.
- 6.24 Determine as forças nas barras CE e EF da treliça da figura.

Figuras P6.23 e P6.24

Exercícios

- 6.25 Determine as forças nas barras DE e EF da treliça da figura.
- 6.26 Determine as forças nas barras FG e FH da treliça da figura.

Figuras P6.25 e P6.26

Exercícios

6.31 Determine a força na barra CD da treliça Fink de telhado, da ilustração, quando $P = 15 \text{ kN}$.

Figura P6.31

Exercícios

6.57 Sabendo que $P = 375 \text{ N}$ e $Q = 225 \text{ N}$, determine as componentes de todas as forças que agem na barra $BCDE$ da montagem da figura.

6.58 Sabendo que $P = 225 \text{ N}$ e $Q = 375 \text{ N}$, determine as componentes de todas as forças que agem na barra $BCDE$ da montagem da figura.

Figuras P6.57 e P6.58

Exercícios

6.60 Para o guindaste marítimo da figura, utilizado em operações de perfuração de poços no mar, determine: (a) a força na haste CD , (b) a força do braço AC e (c) a força exercida em A pela lança AB .

Figura P6.60

Exercícios

6.63 Determine as componentes das reações em A e E se a carga de 800 N é aplicada:
(a) como na figura e (b) em D , verticalmente para baixo.

6.64 Determine as componentes das reações em D e E se a estrutura da figura é carregada com binário horário de momento igual a $150\text{ N}\cdot\text{m}$, aplicado no ponto: (a) A e (b) B .

Figuras P6.63 e P6.64

Exercícios - respostas

- 6.2. $F_{AB} = 148 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 72 \text{ kN C}$; $F_{AD} = 74 \text{ kN T}$; $F_{BC} = F_{CD} = 70 \text{ kN C}$.
- 6.4. $F_{AB} = 4,50 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 3,90 \text{ kN C}$; $F_{BC} = 3,60 \text{ kN T}$.
- 6.6. $F_{AB} = 4 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 15 \text{ kN T}$; $F_{BD} = 9 \text{ kN C}$; $F_{BE} = 5 \text{ kN T}$;
 $F_{CD} = 16 \text{ kN C}$; $F_{DE} = 4 \text{ kN C}$.
- 6.8. $F_{AB} = 3,75 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 3,75 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 6,00 \text{ kN C}$; $F_{BD} = 1,05 \text{ kN T}$;
 $F_{CD} = 3,60 \text{ kN T}$.
- 6.10. $F_{AB} = 2,10 \text{ kN C}$; $F_{AC} = F_{CE} = 2,00 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 1,30 \text{ kN C}$;
 $F_{BC} = F_{CD} = 625 \text{ N T}$;
 $F_{BE} = 4,16 \text{ kN C}$.
- 6.24. $F_{CE} = 36 \text{ kN T}$; $F_{EF} = 15 \text{ kN C}$.
- 6.26. $F_{FG} = 22,7 \text{ kN T}$; $F_{FH} = 53,4 \text{ kN T}$.
- 6.46. (a) Completamente vinculado; determinado.
 (b) Completamente vinculado; indeterminado.
 (c) Ineficazmente vinculado.
- 6.48. (a) Completamente vinculado; determinado.
 (b) Ineficazmente vinculado.
 (c) Completamente vinculado; indeterminado.
- 6.58. $B = 410 \text{ N } \downarrow$; $C_x = 375 \text{ N } \leftarrow$; $C_y = 575 \text{ N } \uparrow$; $D_x = 375 \text{ N } \rightarrow$; $D_y = 60 \text{ N } \uparrow$.
- 6.60. (a) $1\,524 \text{ kN T}$. (b) $1\,133 \text{ kN C}$. (c) $1\,593 \text{ kN } \nearrow 62,1^\circ$.
- 6.64. (a) $D_x = 750 \text{ N } \rightarrow$; $D_y = 250 \text{ N } \downarrow$; $E_x = 750 \text{ N } \leftarrow$; $E_y = 250 \text{ N } \uparrow$.
 (b) $D_x = 375 \text{ N } \rightarrow$; $D_y = 250 \text{ N } \downarrow$; $E_x = 375 \text{ N } \leftarrow$; $E_y = 250 \text{ N } \uparrow$.