

CAPÍTULO

4

MECÂNICA VETORIAL PARA ENGENHEIROS: ESTÁTICA

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Notas de Aula:
J. Walt Oler
Texas Tech University

Equilíbrio de Corpos Rígidos



Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Conteúdo

[Introdução](#)

[Diagrama de Corpo Livre](#)

[Reações em Apoios e Conexões para
uma Estrutura Bidimensional](#)

[Equilíbrio de um Corpo Rígido em
Duas Dimensões](#)

[Reações Estaticamente
Indeterminadas](#)

[Problema Resolvido 4.1](#)

[Problema Resolvido 4.3](#)

[Problema Resolvido 4.4](#)

[Equilíbrio de um Corpo Sujeito à Ação
de Duas Forças](#)

[Equilíbrio de um Corpo Sujeito à Ação
de Três Forças](#)

[Problema Resolvido 4.6](#)

[Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três
Dimensões](#)

[Reações em Apoios e Conexões para
uma Estrutura Tridimensional](#)

[Problema Resolvido 4.8](#)



Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Introdução

- Para um corpo rígido em equilíbrio estático, as forças e momentos externos estão balanceadas e não impõem movimento de translação ou de rotação ao corpo.
- As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio estático de um corpo são que a força e o binário resultantes de todas as forças externas formam um sistema equivalente a zero,

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

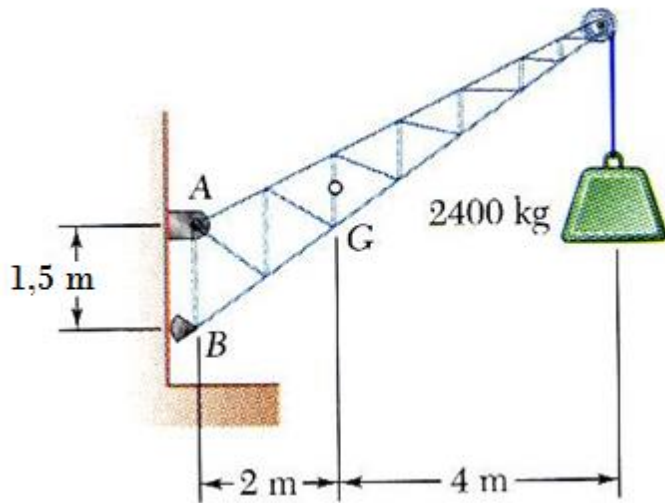
- Decompondo cada força e cada momento em seus componentes retangulares, podemos indicar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio por meio de 6 equações escalares,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$



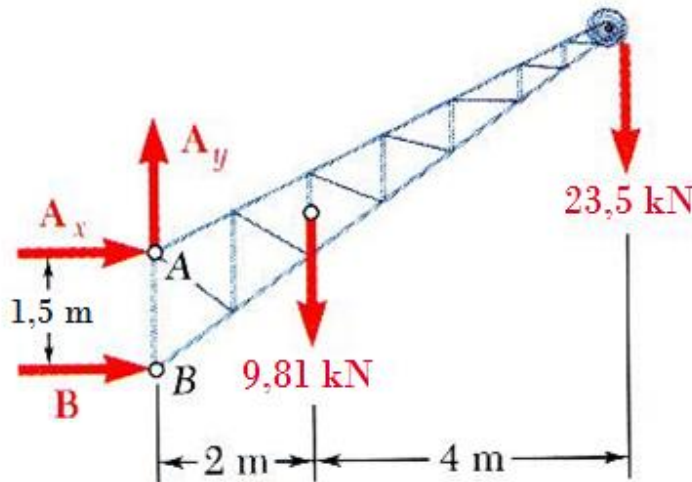
Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Diagrama de Corpo Livre



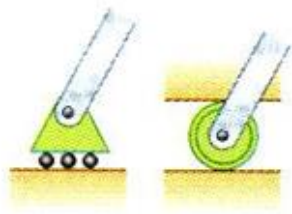
O primeiro passo na análise do equilíbrio estático de um corpo rígido é identificar todas as forças que atuam no corpo com um diagrama de *corpo livre*.

- Seleccionamos a extensão do corpo livre e o destacamos do solo e de todos os outros corpos.
- Indicamos o ponto de aplicação, intensidade, direção e sentido das forças externas, incluindo o peso do corpo rígido.
- Indicamos o ponto de aplicação e as direções e sentidos arbitrados para as forças desconhecidas. Estas geralmente consistem nas reações de apoio por meio das quais o solo e os outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo rígido.
- Incluimos as dimensões necessárias ao cálculo dos momentos das forças.



Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Bidimensional



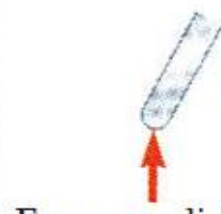
Roletes



Suporte
basculante



Superfície
sem atrito

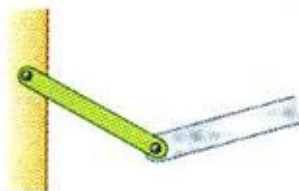


Força com linha de
ação conhecida

- Reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida.



Cabo curto



Haste curta



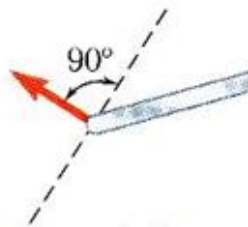
Força com linha de
ação conhecida



Cursor sobre haste
sem atrito



Pino deslizante sem atrito



Força com linha de
ação conhecida

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

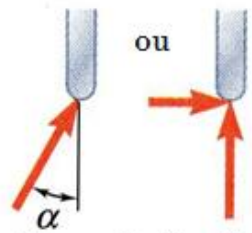
Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Bidimensional



Pino sem atrito
ou articulação



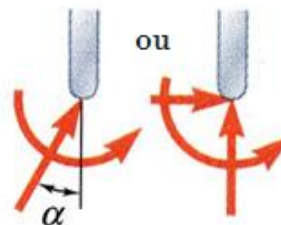
Superfície rugosa



Força de direção
desconhecida



Engaste

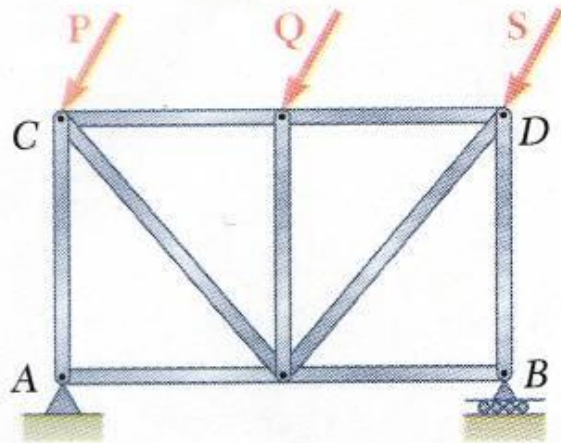


Força e binário

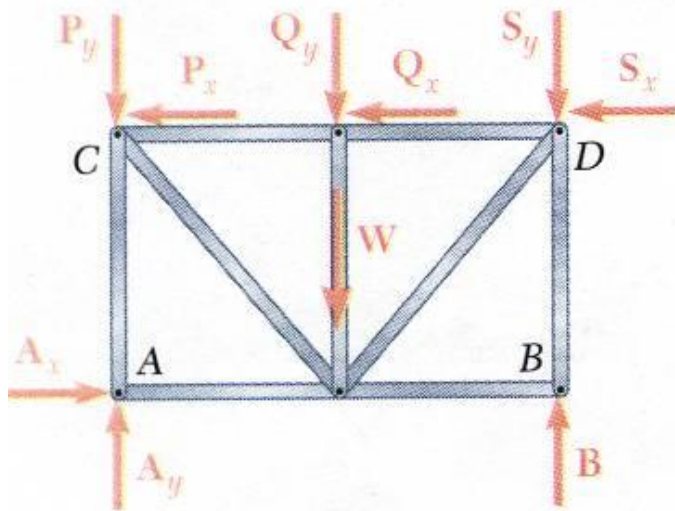
- Reações equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos
- Reações equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos e a um binário de intensidade desconhecida

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas Dimensões



(a)



(b)

- Para todas as forças e momentos aplicados a uma estrutura bidimensional:

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

- As equações de equilíbrio se reduzem a:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

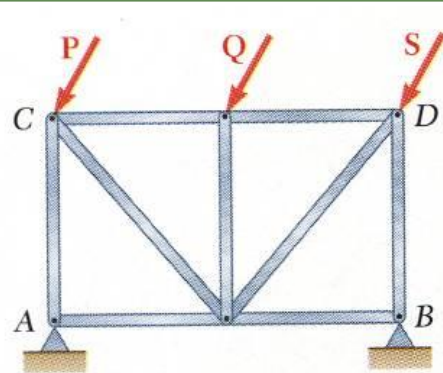
sendo A qualquer ponto no plano da estrutura.

- As 3 equações podem ser resolvidas para no máximo 3 incógnitas.
- As 3 equações não podem ser ampliadas com equações adicionais, mas qualquer uma delas pode ser substituída por outra equação.

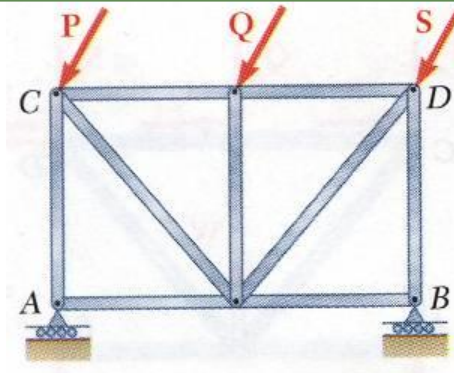
$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

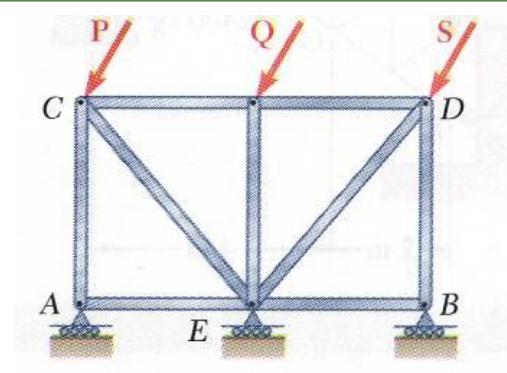
Reações Estaticamente Indeterminadas



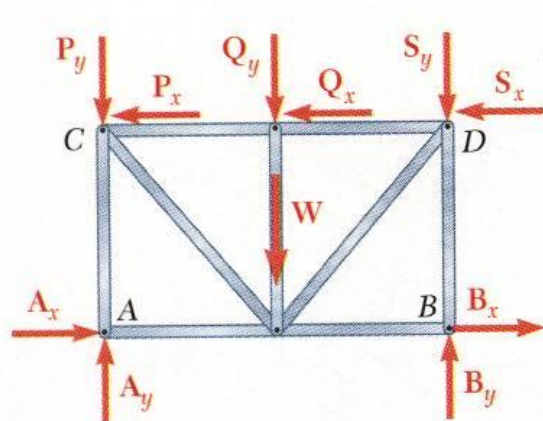
(a)



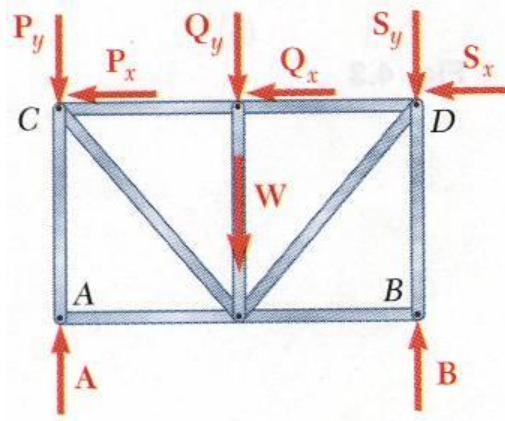
(a)



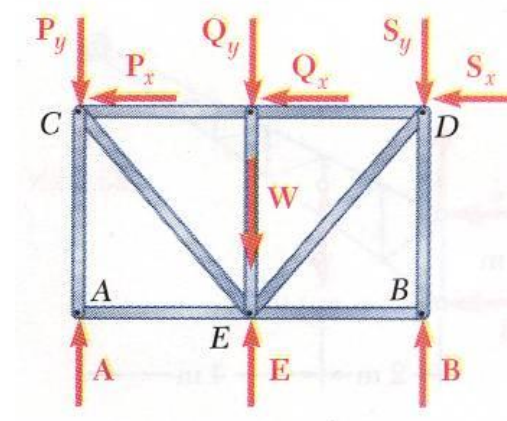
(a)



(b)



(b)

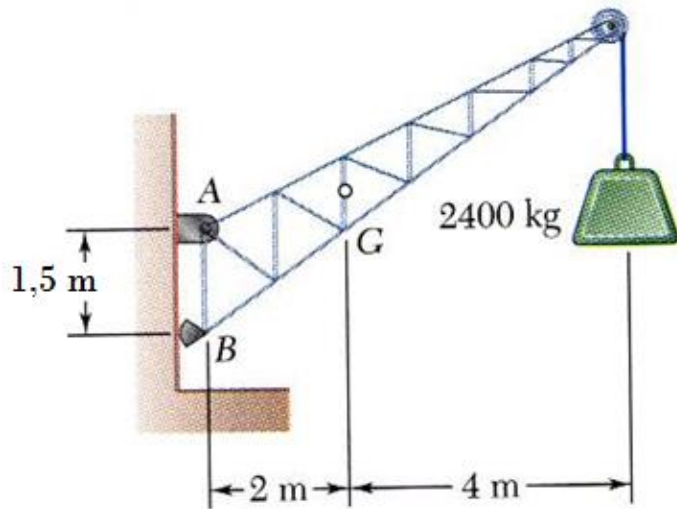


(b)

- Estrutura com mais incógnitas do que equações
- Estrutura com menos incógnitas do que equações: parcialmente vinculada
- Estrutura com número de incógnitas igual ao número de equações mas impropriamente vinculada

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.1



Um guindaste fixo tem massa de 1000 kg e é usado para suspender um caixote de 2400 kg. Ele é mantido no lugar por um pino em A e um suporte basculante em B. O centro de gravidade do guindaste está localizado em G.

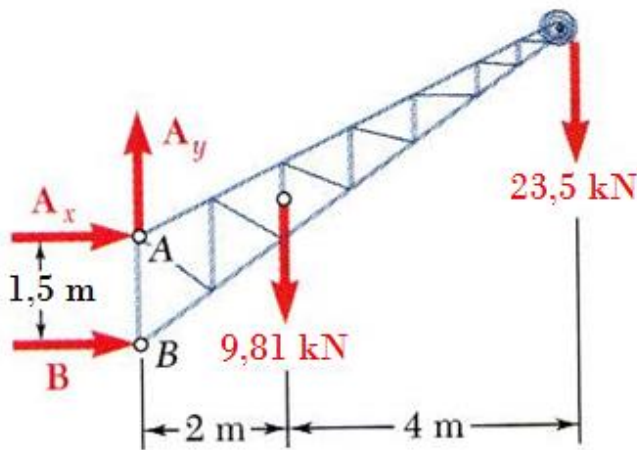
Determine os componentes das reações em A e B.

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre do guindaste.
- Determinamos a reação em B resolvemos a equação para a soma dos momentos de todas as forças em relação a A. Observamos que as reações em A não geram momento em relação àquele ponto.
- Determinamos as reações em A resolvendo as equações para a soma dos componentes horizontais e verticais de todas as forças.
- Conferimos se os resultados obtidos estão corretos verificando se a soma dos momentos de todas as forças em relação a B é zero.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.1



- Traçamos um diagrama de corpo livre do guindaste.

- Determinamos a reação em B resolvendo a equação para a soma dos momentos de todas as forças em relação a A.

$$\sum M_A = 0: + B(1,5 \text{ m}) - 9,81 \text{ kN}(2 \text{ m}) - 23,5 \text{ kN}(6 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107,1 \text{ kN}$$

- Determinamos as reações em A resolvendo as equações para a soma dos componentes horizontais e verticais de todas as forças.

$$\sum F_x = 0: A_x + B = 0$$

$$A_x = -107,1 \text{ kN}$$

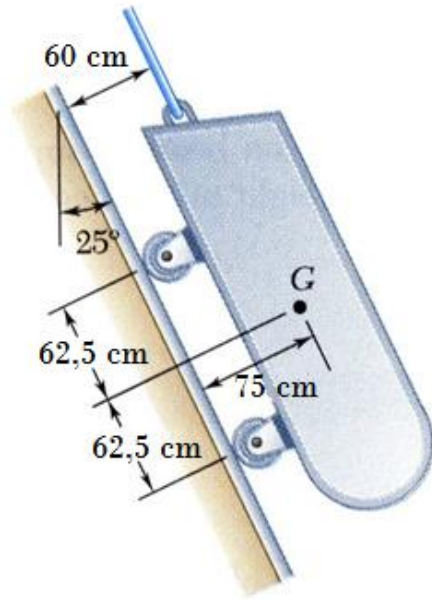
$$\sum F_y = 0: A_y - 9,81 \text{ kN} - 23,5 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33,3 \text{ kN}$$

- Conferimos os resultados obtidos.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.3



Um vagão de carga está em repouso sobre um trilho inclinado. O peso bruto do vagão e sua carga é 24.750 N e está aplicado em G . O vagão é mantido no lugar pelo cabo.

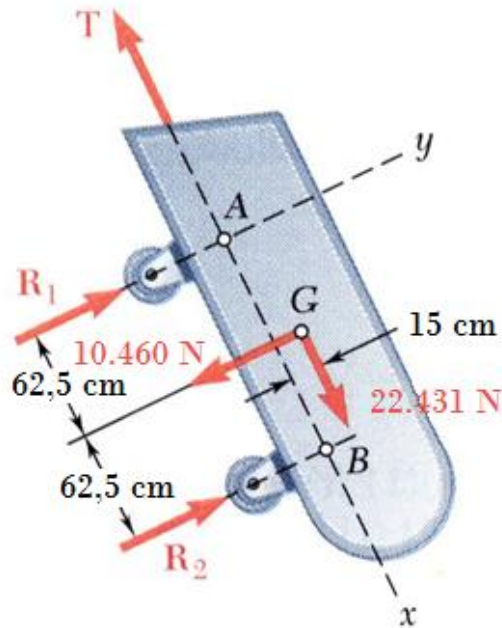
Determine a tração no cabo e a reação em cada par de rodas.

SOLUÇÃO:

- Criamos um diagrama de corpo livre para o vagão com sistema de coordenadas alinhado com o trilho.
- Determinamos as reações nas rodas resolvendo as equações para a soma dos momentos em relação aos eixos das rodas.
- Determinamos a tração no cabo resolvendo a equação para a soma dos componentes das forças paralelos ao trilho.
- Conferimos os resultados obtidos verificando se a soma dos componentes das forças perpendiculares ao trilho é zero.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.3



- Determinamos as reações nas rodas.

$$\sum M_A = 0: -(10.460 \text{ N})62,5 \text{ cm} - (22.431 \text{ N})15 \text{ cm} + R_2(125 \text{ cm}) = 0$$

$$R_2 = 7.922 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0: +(10.460 \text{ N})62,5 \text{ cm} - (22.431 \text{ N})15 \text{ cm} - R_1(125 \text{ cm}) = 0$$

$$R_1 = 2.538 \text{ N}$$

- Traçamos um diagrama de corpo livre

$$W_x = +(24.750 \text{ N})\cos 25^\circ = +22.431 \text{ N}$$

$$W_y = -(24.750 \text{ N})\sin 25^\circ = -10.460 \text{ N}$$

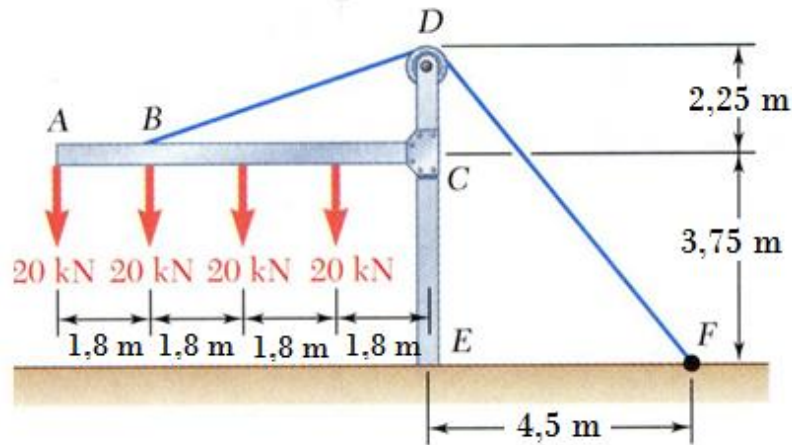
- Determinamos a tração no cabo

$$\sum F_x = 0: +22.431 \text{ N} - T = 0$$

$$T = +22.431 \text{ N}$$

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.4



SOLUÇÃO:

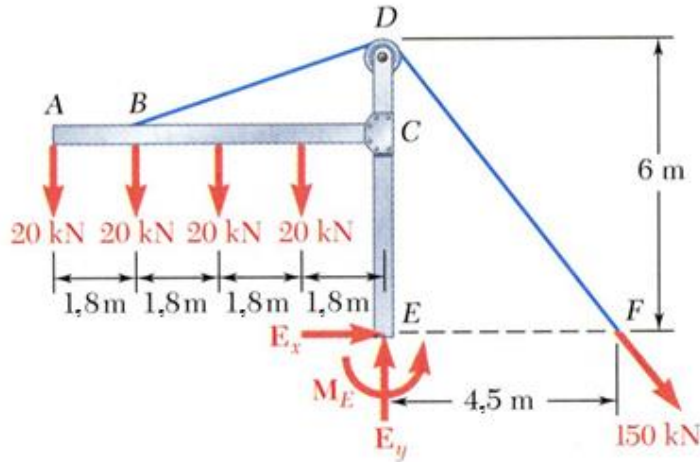
- Traçamos um diagrama de corpo livre da estrutura e do cabo *BDF*.
- Resolvemos as 3 equações de equilíbrio para os componentes da força e do binário em *E*.

A estrutura representada na figura sustenta parte do teto de uma pequeno edifício. Sabendo que a tração no cabo é 150 kN.

Determine a reação na extremidade *E*.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.4



- Resolvemos as 3 equações de equilíbrio para os componentes da força e do binário em E .

$$\sum F_x = 0: \quad E_x + \frac{4,5}{7,5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7,5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

- Traçamos um diagrama de corpo livre da estrutura e do cabo BDF .

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0: \\ + 20 \text{ kN}(7,2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5,4 \text{ m}) \\ + 20 \text{ kN}(3,6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1,8 \text{ m}) \\ - \frac{6}{7,5}(150 \text{ kN})4,5 \text{ m} + M_E = 0 \end{aligned}$$

$$M_E = 180,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Exercícios

4.1 O pau-de-carga montado em um caminhão de 4.300 kg é usado para descarregar uma plataforma de telhas com massa de 1.600 kg. Determine a reação em cada uma das duas (a) rodas traseiras B, (b) roda dianteiras C.

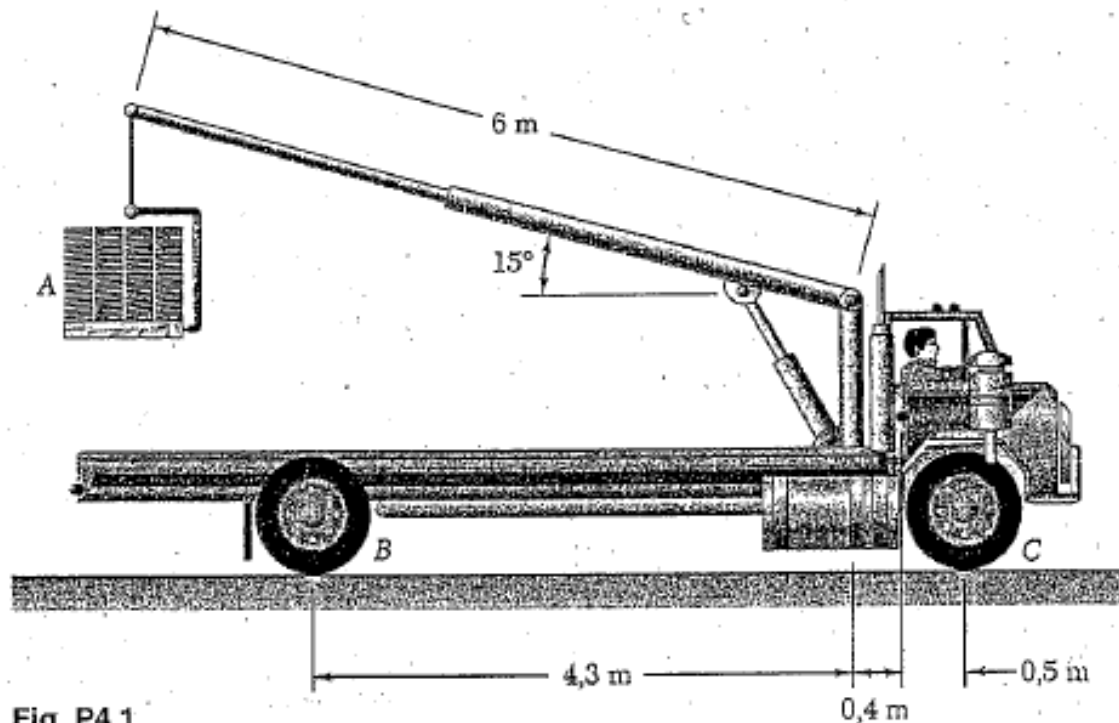


Fig. P4.1

(a) 12,13 kN ↑ . (b) 16,81 kN ↑

Exercícios

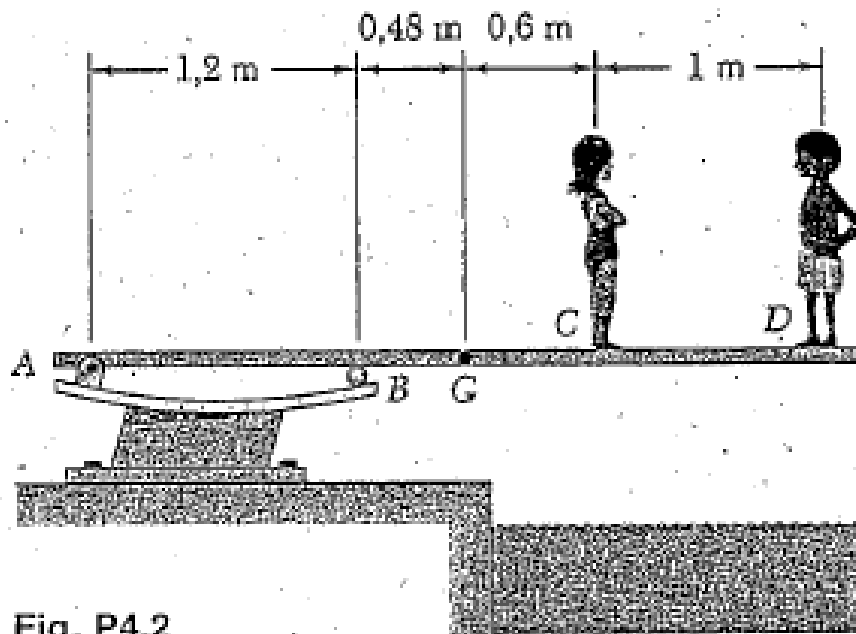


Fig. P4.2

4.2 Duas crianças estão de pé sobre um trampolim com massa de 65 kg. Sabendo que as massas das crianças em C e D são 28 kg e 40 kg, respectivamente, determine (a) a reação em A e (b) a reação em B.

(a) 1,182 kN ↓ . (b) 2,49 kN ↑

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Exercícios

4.3 Dois caixotes, cada qual pesando 1.125 N , são colocados na caçamba de uma camionete com peso de 13.500 N . Determine as reações em cada uma das duas (a) rodas traseiras A e (b) rodas dianteiras B.

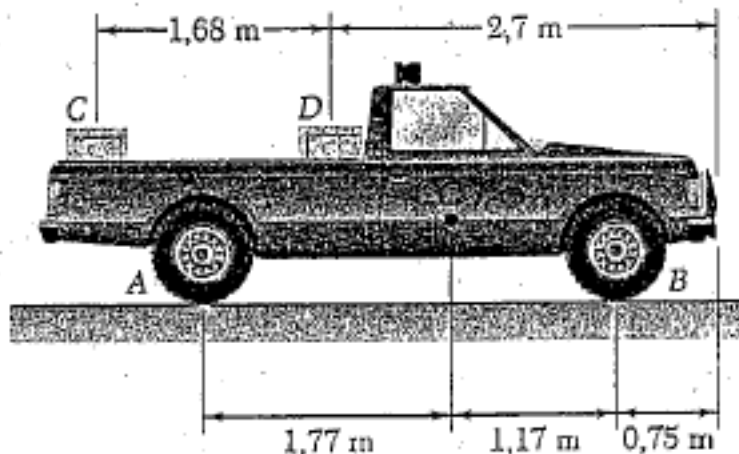


Fig. P4.3

4.4 Resolva o Problema 4.3 considerando que o caixote D foi removido e que a posição do caixote C permanece inalterada.

*4.3 (a) $3.754\text{ N } \uparrow$. (b) $4.121\text{ N } \uparrow$.

*4.4 (a) $3.381\text{ N } \uparrow$. (b) $3.932\text{ N } \uparrow$.

Exercícios

4.9 Quatro caixas são colocadas em uma prancha de madeira uniforme de 14 kg que está apoiada em dois cavaletes. Sabendo que as massas das caixas B e D são 4,5 kg e 45 kg, respectivamente, determine o intervalo de valores da massa da caixa A de modo que a prancha permaneça em equilíbrio quando a caixa C for removida.

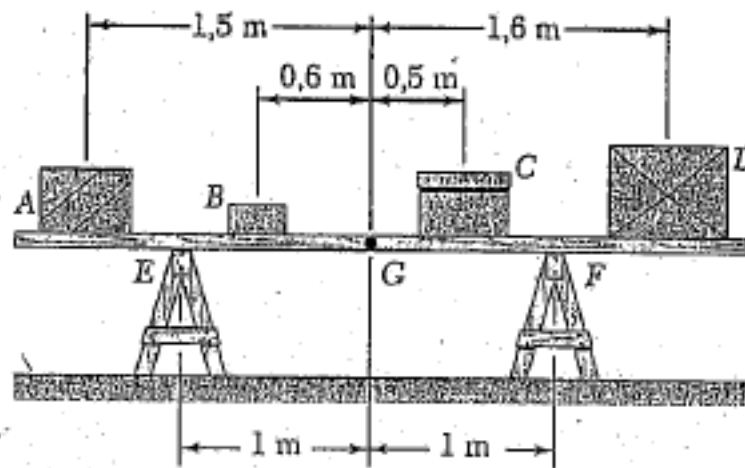
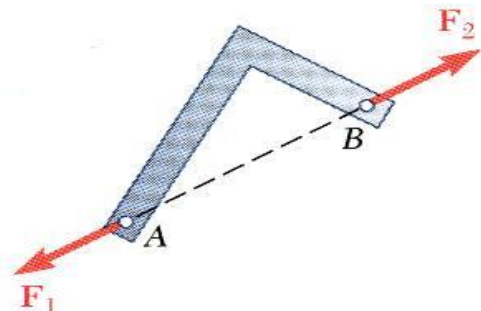
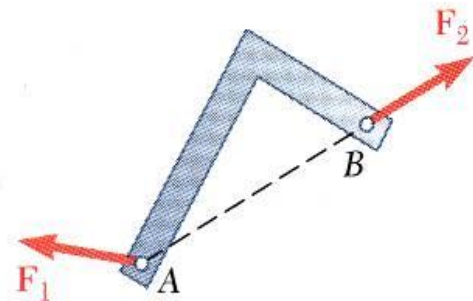
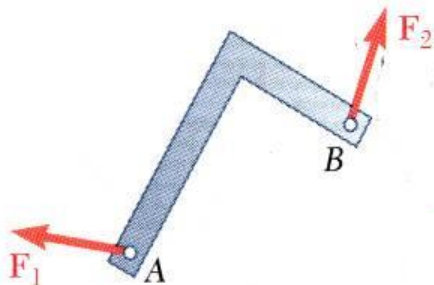


Fig. P4.9

$$2,32 \text{ kg} \leq m_A \leq 266 \text{ kg}$$

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

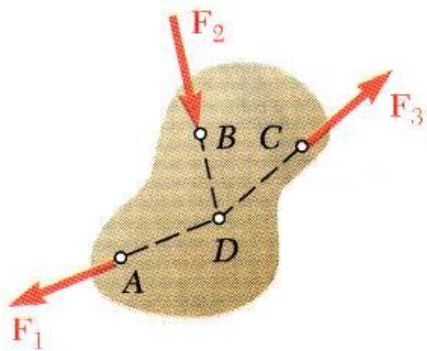
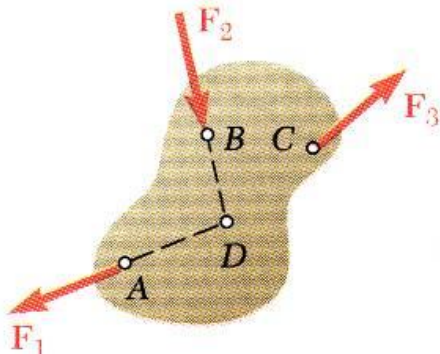
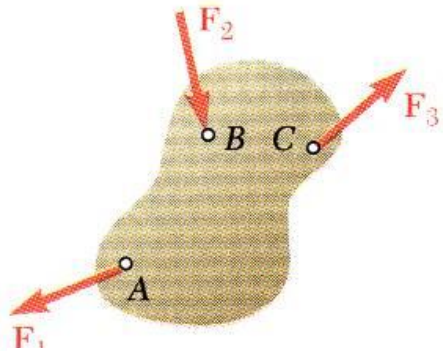
Equilíbrio de um Corpo Sujeito à Ação de Duas Forças



- Considere uma placa do tipo cantoneira sujeita à ação de duas forças F_1 e F_2
- Se a placa estiver em equilíbrio, a soma dos momentos em relação a A deve ser zero. Como o momento de F_1 é obviamente zero, o momento de F_2 também deve ser zero, ou seja, a linha de ação de F_2 deve passar por A.
- De forma similar, a linha de ação de F_1 deve passar por B para que a soma dos momentos em relação a B seja zero.
- Como a soma das forças em qualquer direção deve ser zero, conclui-se que F_1 e F_2 devem ter a mesma intensidade, mas sentidos opostos

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

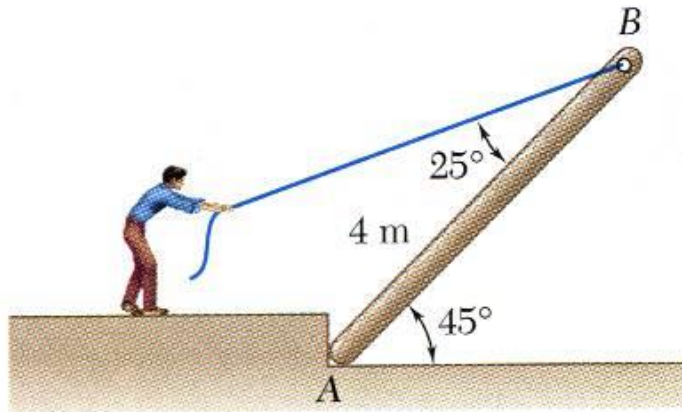
Equilíbrio de um Corpo Sujeito à Ação de Três Forças



- Considere um corpo rígido sujeito a ação de forças atuando em apenas 3 pontos.
- Assumindo que as linhas de ação das forças F_1 e F_2 se interceptam, o momento de ambas em relação ao ponto de interseção representado por D é zero.
- Como o corpo rígido está em equilíbrio, a soma dos momentos de F_1 , F_2 e F_3 em relação a qualquer eixo deve ser zero. Portanto, o momento de F_3 em relação a D também deve ser zero e a linha de ação de F_3 deve passar por D .
- As linhas de ação das três forças devem ser concorrentes ou paralelas

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.6



Um homem levanta uma viga de 10 kg e 4 m de comprimento puxando-a com uma corda.

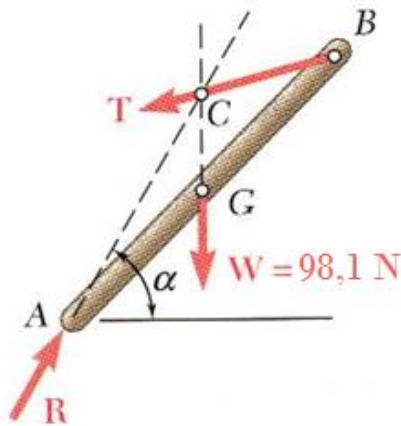
Encontre a tração T na corda e a reação em A.

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre da viga observando que a viga é um corpo sob a ação de 3 forças que são o seu peso, a força exercida pela corda e a reação em A.
- Para que o corpo esteja em equilíbrio, as três forças devem ser concorrentes. Portanto, a reação $\mathbf{R}$ deve passar pela interseção das linhas de ação do peso e da força exercida pela corda. Dessa forma determina-se a direção da reação $\mathbf{R}$.
- Utilizamos um triângulo de forças para determinar a intensidade da reação $\mathbf{R}$.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.6



- Traçamos um diagrama de corpo livre da viga.
- Determinamos a direção da reação **R**.

$$AF = AB \cos 45^\circ = (4 \text{ m}) \cos 45^\circ = 2,828 \text{ m}$$

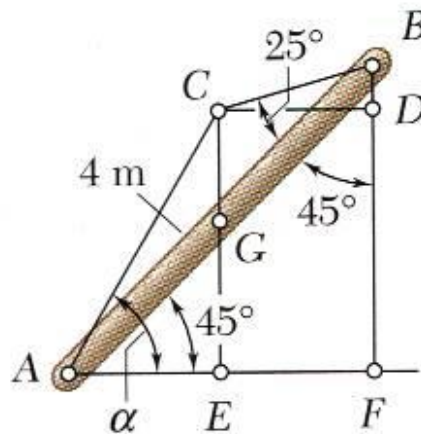
$$CD = AE = \frac{1}{2} AF = 1,414 \text{ m}$$

$$BD = CD \cot(45 + 20) = (1,414 \text{ m}) \tan 20^\circ = 0,515 \text{ m}$$

$$CE = BF - BD = (2,828 - 0,515) \text{ m} = 2,313 \text{ m}$$

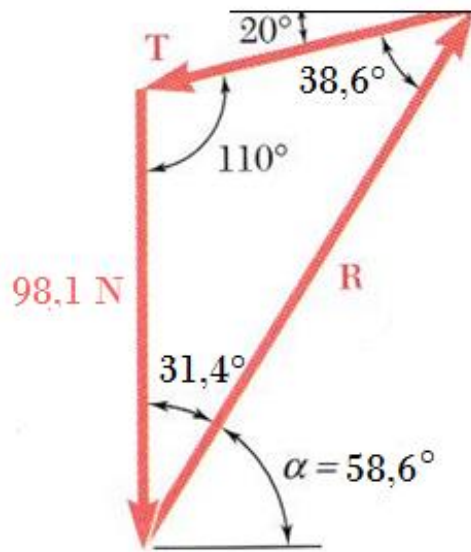
$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2,313}{1,414} = 1,636$$

$$\alpha = 58,6^\circ$$



Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.6



- Determinamos a intensidade da reação R .

$$\frac{T}{\sin 31,4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98,1 \text{ N}}{\sin 38,6^\circ}$$

$$T = 81,9 \text{ N}$$

$$R = 147,8 \text{ N}$$

Exercícios

4.67 Para remover um prego, coloca-se um pequeno bloco de madeira sob um pé-de-cabra e aplica-se uma força horizontal P tal como mostra a figura. Sabendo que $l = 8,75$ cm e $P = 135$ N, determine a força vertical exercida sobre o prego e a reação em B .

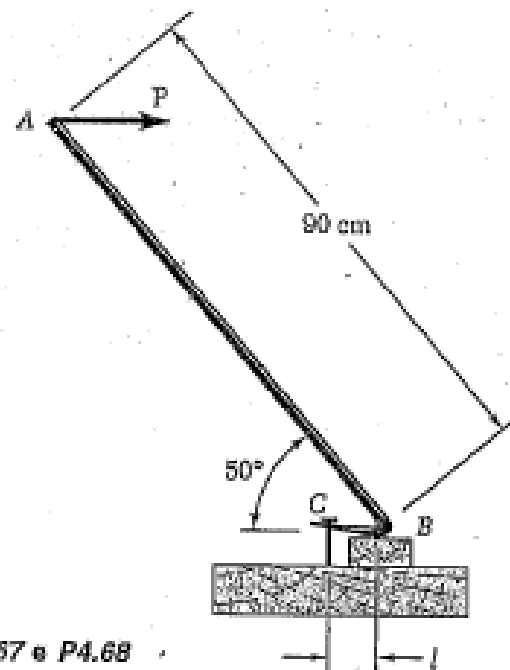


Fig. P4.67 e P4.68

4.68 Para remover um prego, coloca-se um pequeno bloco de madeira sob um pé-de-cabra e aplica-se uma força horizontal P tal como mostra a figura. Sabendo que a máxima força vertical necessária para se extrair o prego é de 2.700 N e que a força horizontal P não deve exceder 292,5 N, determine o maior valor aceitável para a distância l .

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Exercícios

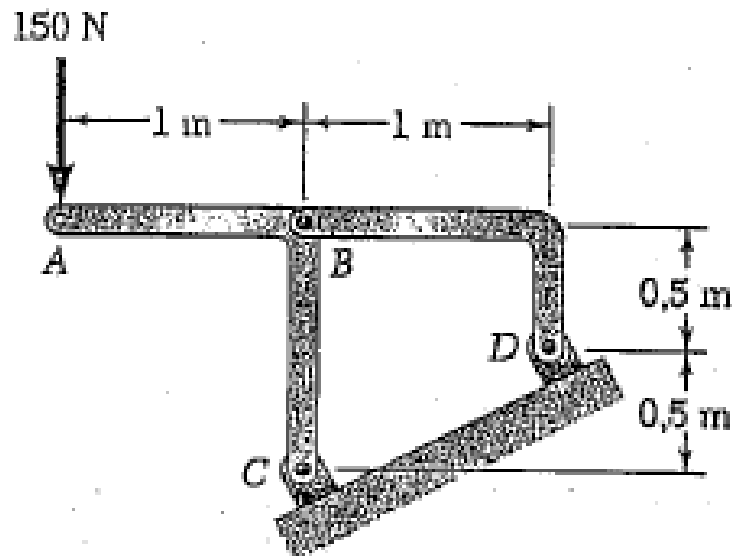


Fig. P4.69

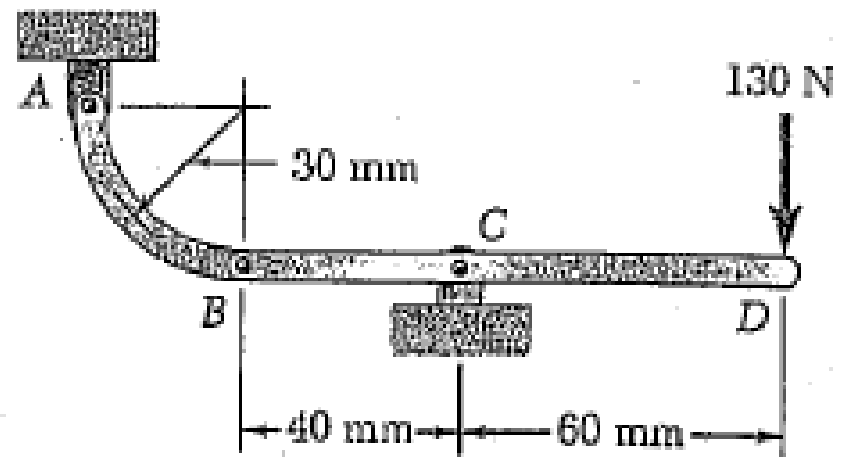


Fig. P4.70

4.69 Para a estrutura e o carregamento mostrados na figura, determine as reações em C e D .

4.70 Para a estrutura e o carregamento mostrados na figura, determine as reações em A e C .

4.69 $C = 270 \text{ N} \nearrow 56,3^\circ$; $D = 167,7 \text{ N} \searrow 26,6^\circ$.

4.70 $A = 276 \text{ N} \searrow 45,0^\circ$; $C = 379 \text{ N} \nearrow 59,0^\circ$.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Exercícios

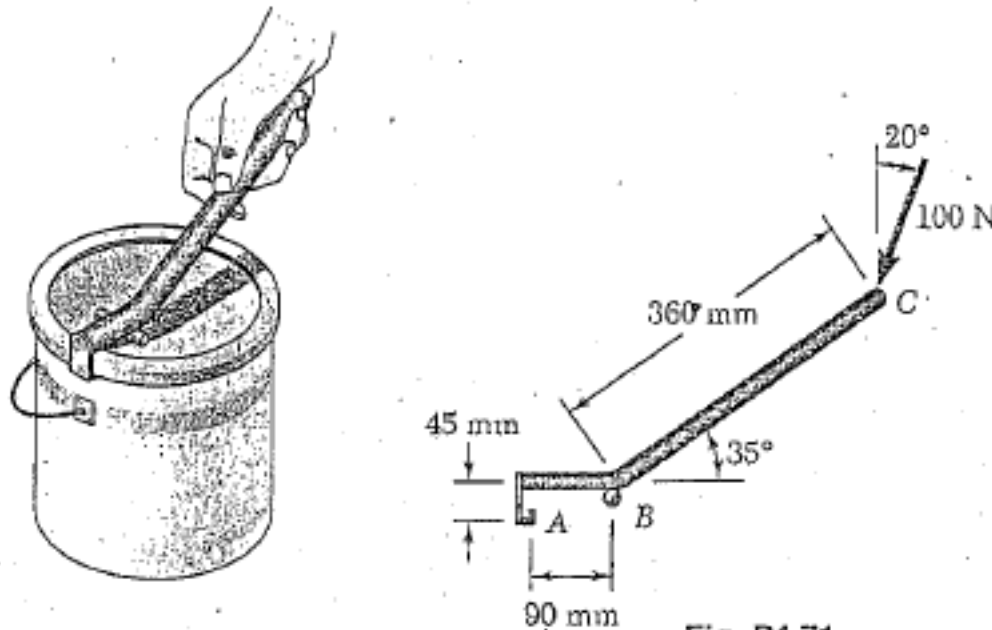


Fig. P4.71

4.71 Para retirar a tampa de um balde de 5 galões (aproximadamente 19 litros), utiliza-se a ferramenta mostrada na figura para aplicar uma força para cima e radialmente para fora na parte inferior do aro interno da tampa. Considerando que o aro está apoiado na ferramenta em A e que uma força de 100 N é aplicada ao cabo tal como indica a figura, determine a força que atua no aro.

$$215 \text{ N} \nearrow 80,8^\circ.$$

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Exercícios

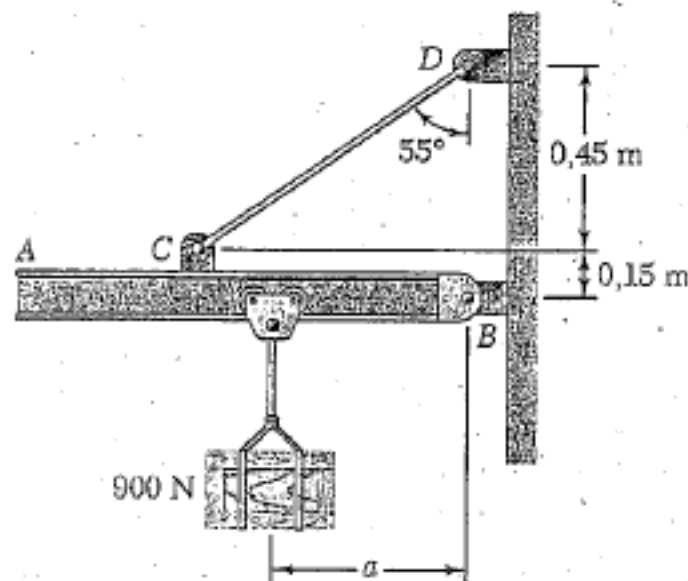


Fig. P4.73

4.73 Um caixote de 900 N é preso a uma viga de rolamento mostrado na figura. Sabendo que $a = 0,45$ m, determine (a) a tração no cabo CD, (b) a reação em B.

4.74 Resolva o Problema 4.73 considerando que $a = 0,9$ m.

*4.73 (a) 824 N. (b) 799 N $\searrow 32,3^\circ$.

*4.74 (a) 1.648 N. (b) 1.351 N $\searrow 1,921^\circ$.

4.77 Um pequeno guincho é montado na traseira de uma caminhonete e é usado para levantar um caixote de 120 kg. Determine (a) a força exercida no guincho pelo cilindro hidráulico BC e (b) a reação em A.

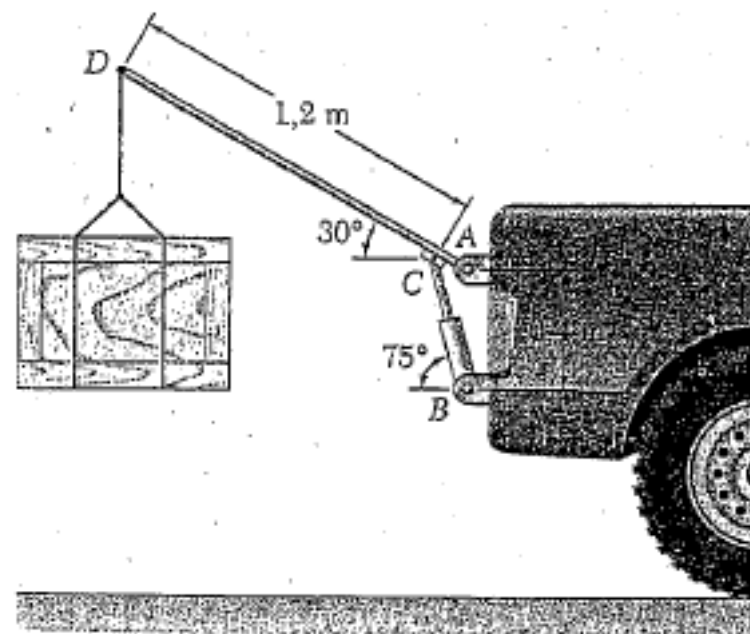


Fig. P4.77

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três Dimensões

- São necessárias seis equações escalares para expressar as condições para o equilíbrio de um corpo rígido no caso geral tridimensional.

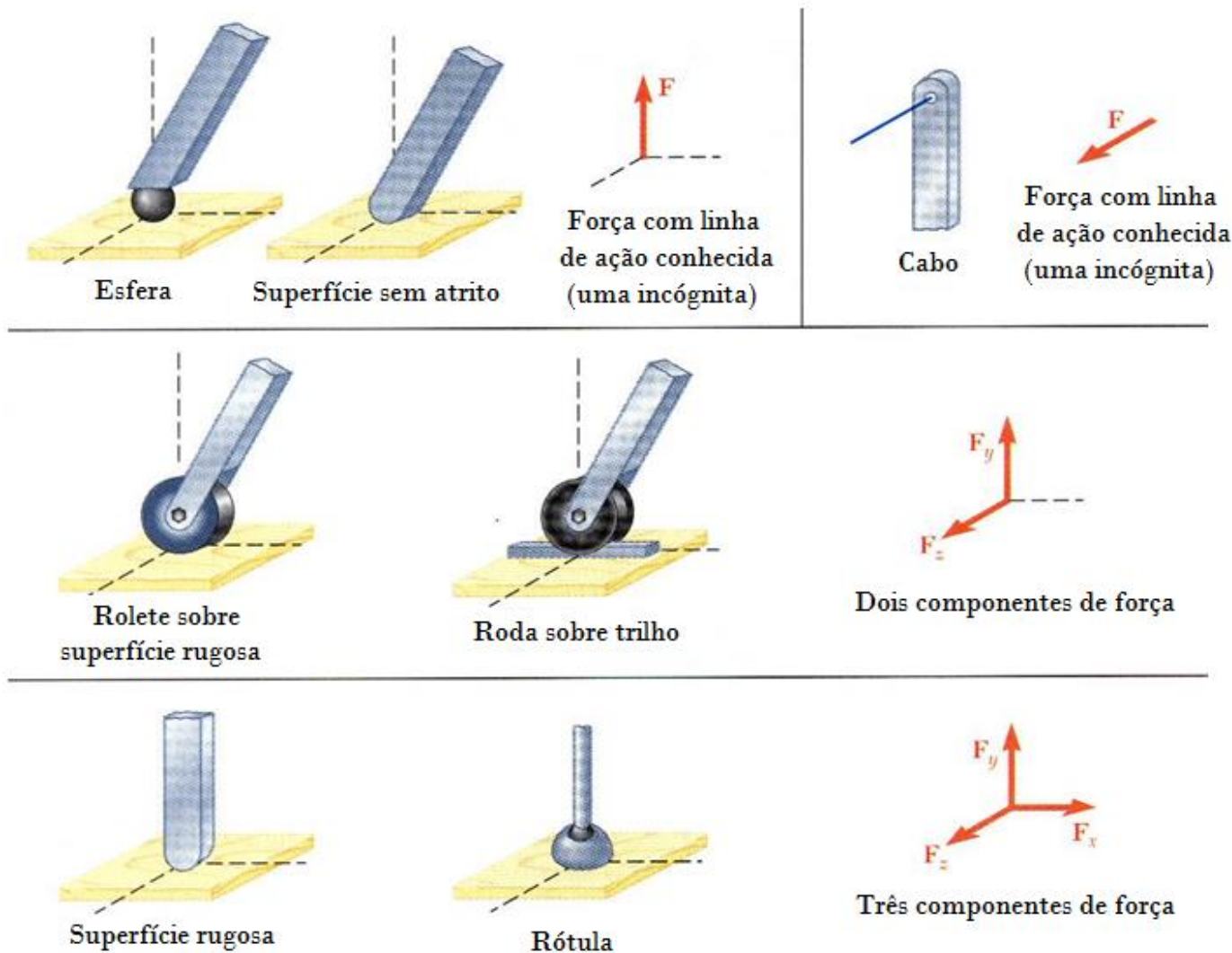
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0\end{aligned}$$

- Essas equações podem ser resolvidas para no máximo 6 incógnitas que, geralmente, representam reações em apoios ou conexões.
- As equações escalares serão obtidas mais convenientemente se expressarmos, inicialmente, as condições de equilíbrio na forma vetorial.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

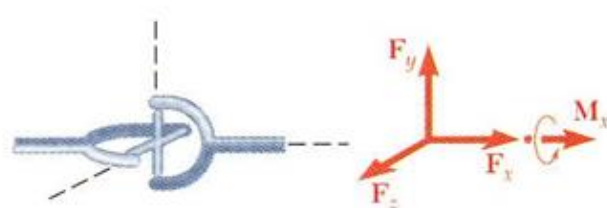
Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Tridimensional



Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Tridimensional



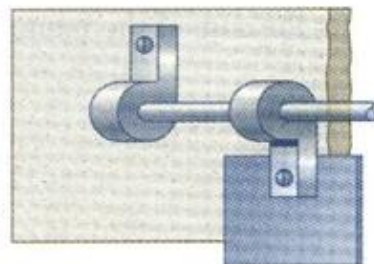
Junta universal

Três componentes de
força e um binário

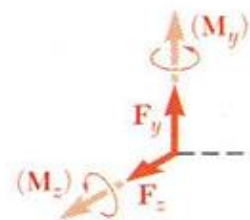
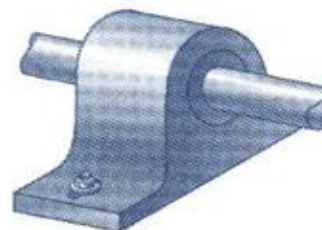


Engaste

Três componentes de
força e três binários



Dobradiça e mancal sustentando apenas carga radial



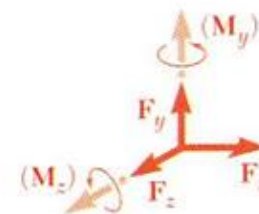
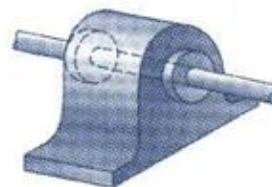
Dois componentes de
força (e dois binários)



Pino e suporte



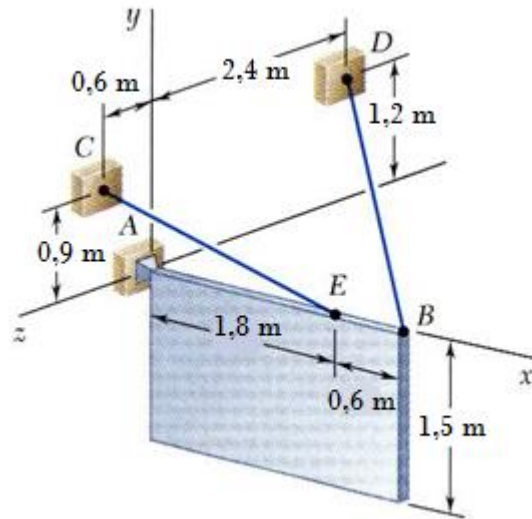
Dobradiça e mancal sustentando
empuxo axial e carga radial



Três componentes de
força (e dois binários)

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.8



SOLUÇÃO:

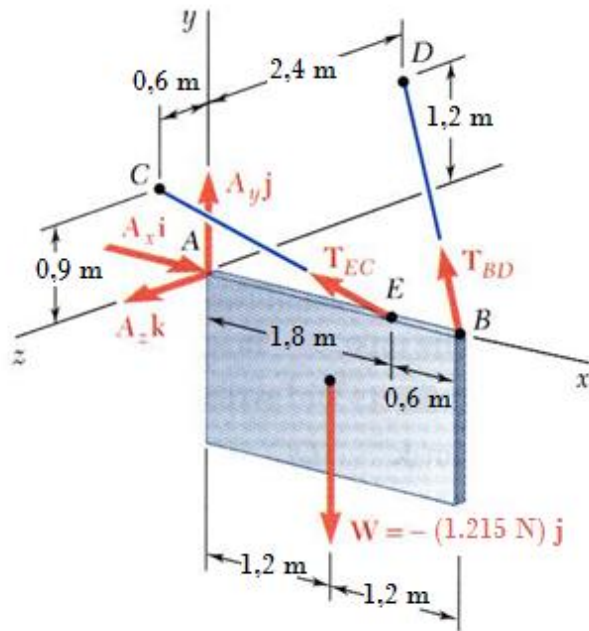
- Traçamos um diagrama de corpo livre da placa.
- Aplicamos as condições de equilíbrio para obter equações que possibilitem o cálculo das reações desconhecidas.

Uma placa de massa específica uniforme pesa 1.215 N e é sustentada por uma rótula em A e por dois cabos.

Determine a tração em cada cabo e a reação em A.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.8



- Traçamos um diagrama de corpo livre da placa.

Como há apenas 5 incógnitas, a placa está parcialmente vinculada. Ela pode girar livremente em torno do eixo x . No entanto, ela está em equilíbrio sob o carregamento dado.

$$\begin{aligned}\vec{T}_{BD} &= T_{BD} \left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} \right) \\ &= T_{BD} \frac{-2,4\vec{i} + 1,2\vec{j} - 2,4\vec{k}}{3,6}\end{aligned}$$

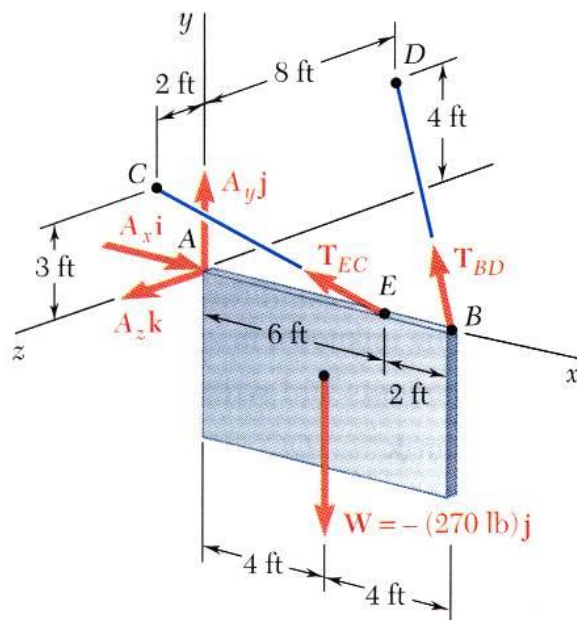
$$= T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{T}_{EC} &= T_{EC} \left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} \right) \\ &= T_{EC} \frac{-1,8\vec{i} + 0,9\vec{j} + 0,6\vec{k}}{2,1}\end{aligned}$$

$$= T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Problema Resolvido 4.8



$$\sum \vec{F} = \vec{A} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{EC} - (1.215 \text{ N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}: A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC} = 0$$

$$\vec{j}: A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 1.215 \text{ N} = 0$$

$$\vec{k}: A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{T}_{BD} + \vec{r}_E \times \vec{T}_{EC} + (1.2 \text{ m})\vec{i} \times (-1.215 \text{ N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{j}: 1.6T_{BD} - 0.514T_{EC} = 0$$

$$\vec{k}: 0.8T_{BD} + 0.771T_{EC} - 1.458 \text{ N} = 0$$

- Aplicamos as condições de equilíbrio para desenvolver equações para as reações desconhecidas

Resolvemos as 5 equações para as 5 incógnitas e obtemos:

$$T_{BD} = 455,9 \text{ N} \quad T_{EC} = 1.417,5 \text{ N}$$

$$\vec{A} = (1.521 \text{ N})\vec{i} + (455,4 \text{ N})\vec{j} - (101,25 \text{ N})\vec{k}$$