Nona Edição

MECÂNICA VETORIAL PARA ENGENHEIROS:

ESTÁTICA

CAPÍTULO

3

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

Notas de Aula:

J. Walt Oler

Texas Tech University

Corpos Rígidos: Sistemas Equivalentes de Forças

Conteúdo

Introdução

- Nem sempre é possível tratar um corpo como uma única partícula. Em geral, o tamanho do corpo e os pontos de aplicação específicos de cada uma das forças que nele atuam devem ser considerados.

- Supõe-se que a maioria dos corpos considerados em **mecânica elementar** são rígidos, isto é, as deformações reais são ***desprezíveis*** e não afetam as condições de equilíbrio ou de movimento do corpo.

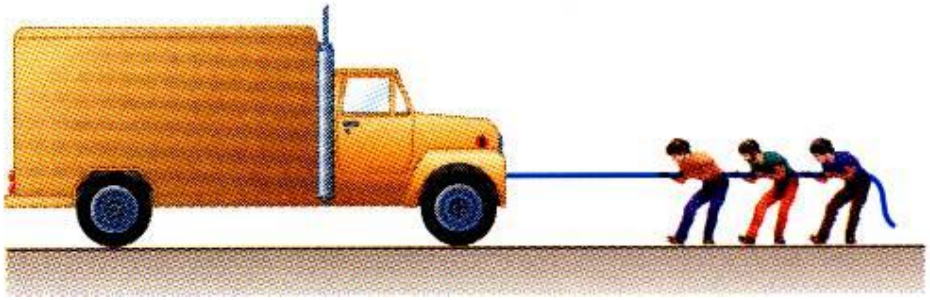
- Nesta parte estudaremos o efeito de forças exercidas em um corpo rígido e como substituir um dado sistema de forças por um sistema equivalente mais simples. Para tanto, são importantes os seguintes conceitos:
  - momento de uma força em relação a um ponto
  - momento de uma força em relação a um eixo
  - momento devido a um binário

- **Qualquer sistema de forças atuando em um corpo rígido pode ser substituído por um sistema equivalente composto por uma única força atuando em um dado ponto e um binário**.

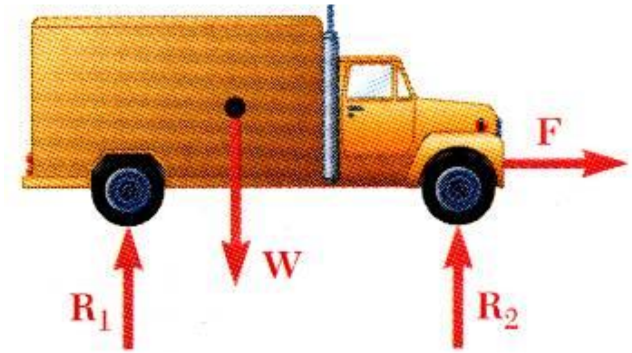
Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Forças Externas e Forças Internas

- Forças atuando em corpos rígidos são divididas em dois grupos:
  - Forças Externas
  - Forças Internas *(esforços internos)*



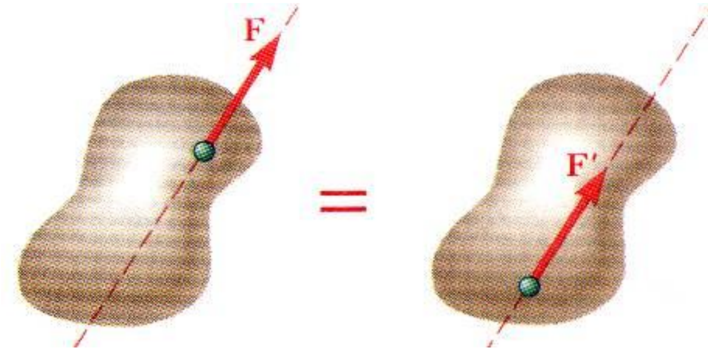
- Forças externas são mostradas em um diagrama de corpo livre.



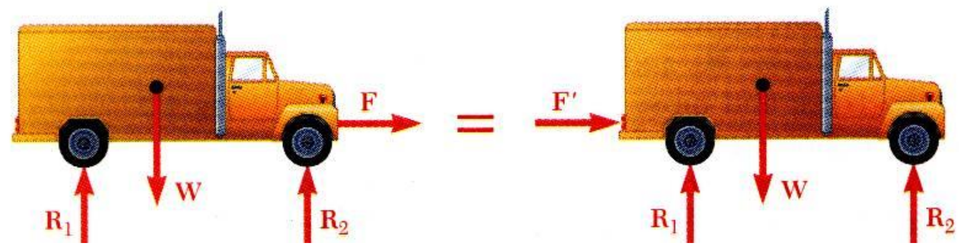
- Se não for contrabalanceada, cada uma das forças externas pode imprimir ao corpo rígido um movimento de translação ou de rotação, ou ambos.

Princípio da Transmissibilidade: Forças Equivalentes

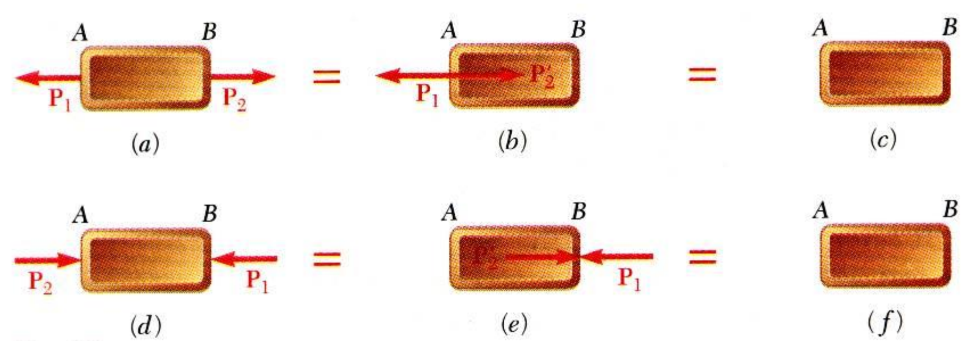
- *Princípio da Transmissibilidade* -
  As condições de equilíbrio ou de movimento de um corpo não se modificam ao se *transmitir* a ação de uma força ao longo de sua linha de ação.
  OBSERVAÇÃO: na figura ao lado **F** e **F**' são forças equivalentes.



- Para o caminhão ao lado, o fato de mudar o ponto de aplicação da força **F** para o para-choque traseiro não altera o seu movimento e nem interfere nas ações das demais forças que nele atuam.



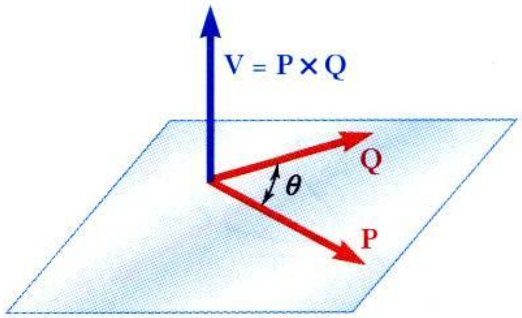
- ***O princípio da transmissibilidade nem sempre pode ser aplicado na determinação de forças internas e deformações.***



Produto Vetorial de Dois Vetores

- O conceito de momento de uma força em relação a um ponto é mais facilmente entendido por meio das aplicações do *produto vetorial.*

- O produto vetorial de dois vetores ***P*** e ***Q*** é definido como o vetor ***V*** que satisfaz às seguintes condições:
  1. A linha de ação de ***V*** é perpendicular ao plano que contém ***P*** e ***Q***.
  2. A intensidade de ***V*** é $V = PQ \operatorname{sen} \theta$
  3. A direção e o sentido de ***V*** são obtidos pela regra da mão direita.



(a)

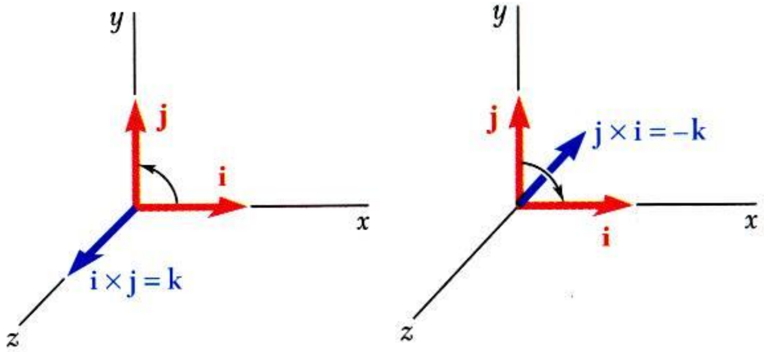
(b)

- Produtos vetorias:
  - não são comutativos, $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q})$
  - são distributivos, $\boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2) = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}_2$
  - não são associativos, $(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}) \times \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{S})$

Produtos Vetoriais: Componentes Retangulares

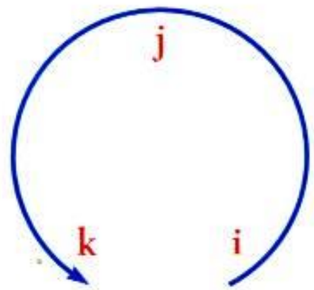
- Produtos vetoriais de vetores unitários:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{j}=0 \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{k}=0$$



- Produto vetorial em termos de componentes retangulares:

$$\vec{V}=\left(P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}\right)\times\left(Q_x\vec{i}+Q_y\vec{j}+Q_z\vec{k}\right)$$
$$=\left(P_yQ_z-P_zQ_y\right)\vec{i}+\left(P_zQ_x-P_xQ_z\right)\vec{j}$$
$$+\left(P_xQ_y-P_yQ_x\right)\vec{k}$$



$$\mathrm{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

Momento de uma Força em Relação a um Ponto

- Uma força é representada por um vetor que define sua intensidade, sua direção e seu sentido. Seu efeito em um corpo rígido depende também do seu ponto de aplicação.

- O *momento* de uma força $\boldsymbol{F}$ em relação a um ponto O é definido como

$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

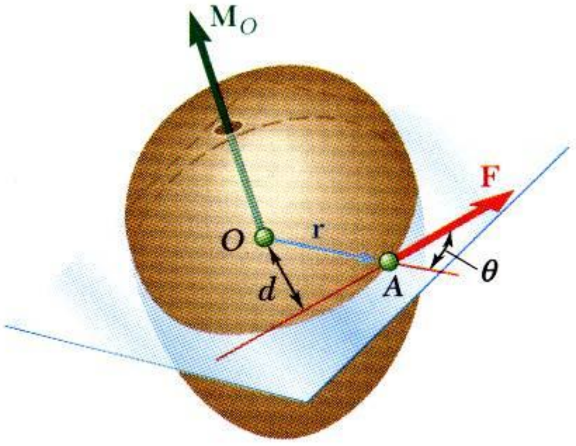
- O vetor momento $\boldsymbol{M_O}$ é perpendicular ao plano que contém o ponto O e a força $\boldsymbol{F}$.

- A intensidade de $\boldsymbol{M_O}$ expressa a tendência da força de causar rotação em torno de um eixo dirigido ao longo de $\boldsymbol{M_O}$.

$$M_O = F * r * sen\,\theta = F * d$$

O sentido do momento pode ser determinado pela regra da mão direita.

- Qualquer força $\boldsymbol{F'}$ que tem a mesma intensidade, direção e sentido de $\boldsymbol{F}$, é *equivalente* a ela se também tem sua mesma linha de ação e portando, gera o mesmo momento.



(a)

(b)

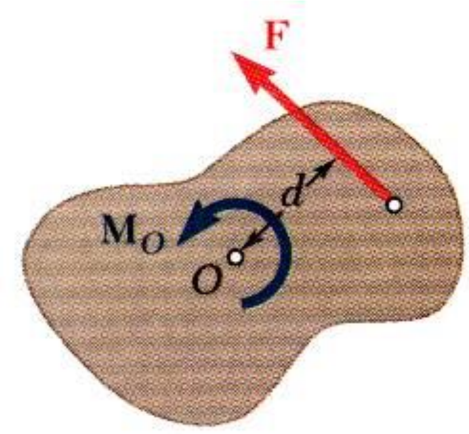
Momento de uma Força em Relação a um Ponto

- *Estruturas bidimensionais* têm comprimento e largura, mas espessura desprezível e estão sujeitas a forças contidas no plano da estrutura.

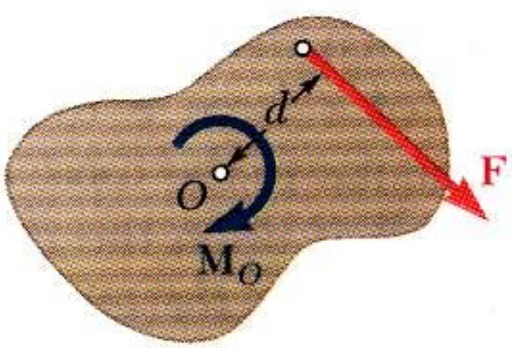
- O plano da estrutura contém o ponto *O* e a força $\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{M_O}$, o momento da força em relação a *O*, é perpendicular ao plano.

- Se a força tende a girar a estrutura no sentido anti-horário, o vetor momento aponta para for a (para cima) do plano da estrutura e a intensidade do momento é positiva.

- Se a força tende a girar a estrutura no sentido horário, o vetor momento aponta para dentro (para baixo) do plano da estrutura e a intensidade do momento é negativa.



(a) $\mathbf{M}_O = +Fd$

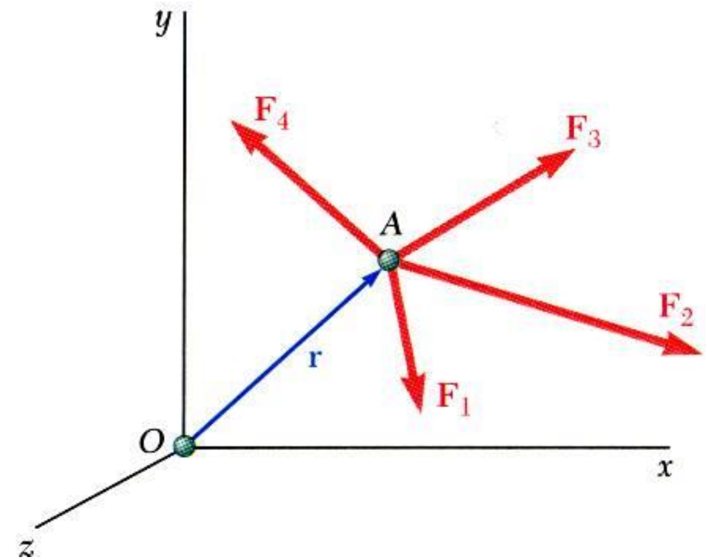


(b) $\mathbf{M}_O = -Fd$

Teorema de Varignon

- O momento em relação a um dado ponto *O* da resultante de diversas forças concorrentes é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto *O*.

$$\vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots$$



- O teorema de Varignon torna possível substituir a determinação direta do momento de uma força ***F*** pela determinação dos momentos de duas ou mais forças que a compõe.

Componentes Retangulares do Momento de uma Força

O momento de ***F*** em relação a *O*,

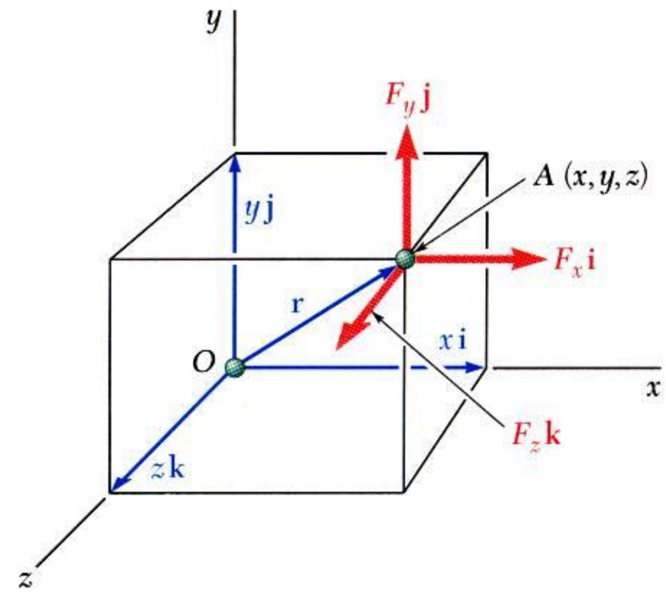
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$



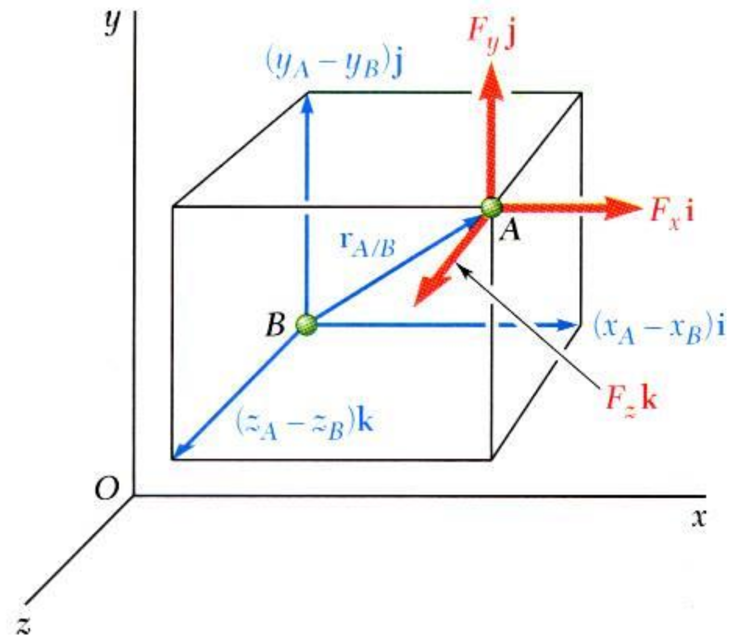
Componentes Retangulares do Momento de uma Força

Momento de ***F*** em relação a *B*:

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$
$$= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



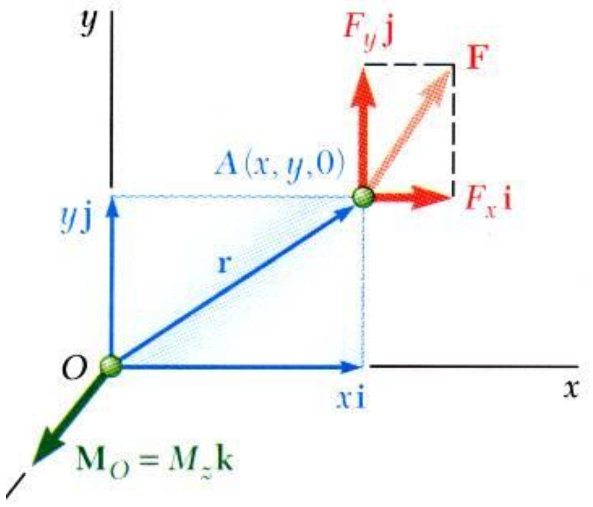
Componentes Retangulares do Momento de uma Força

Para estruturas bidimensionais:

$$\vec{M}_O = \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$

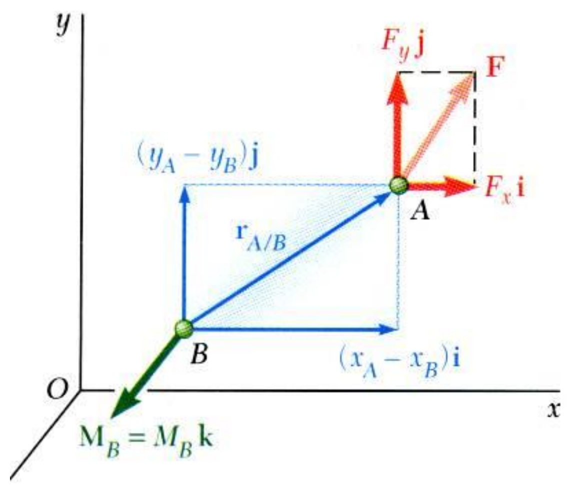
$$M_O = M_Z$$

$$= xF_y - yF_x$$

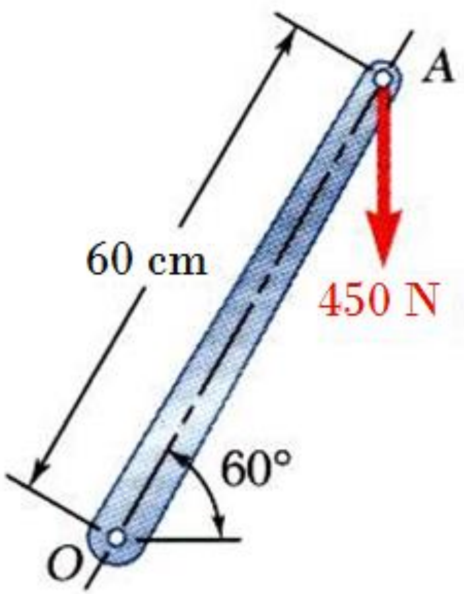


$$\vec{M}_B = \left[\left(x_A - x_B\right)F_y - \left(y_A - y_B\right)F_x\right]\vec{k}$$

$$M_B = \left(x_A - x_B\right)F_y - \left(y_A - y_B\right)F_x$$



Problema Resolvido 3.1



Uma força vertical de 450 N é aplicada na extremidade de uma alavanca que está ligada ao eixo em *O*.

Determine:

a) o momento da força em relação a *O;*

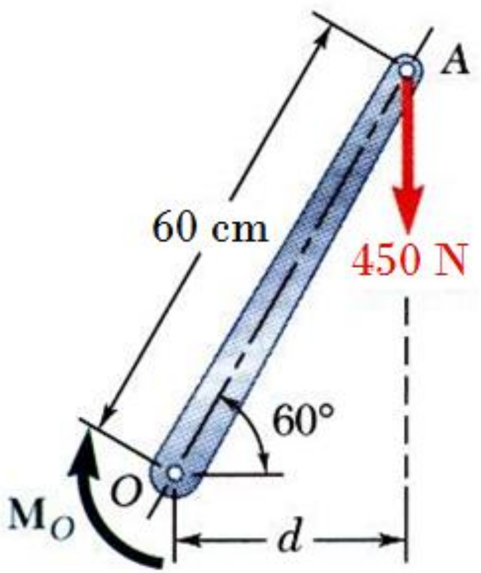
b) a força horizontal aplicada em *A* que gera o mesmo momento;

c) a força mínima aplicada em A que gera o mesmo momento;

d) a posição de uma força vertical de 1.080 N para que ela gere o mesmo momento;

e) se alguma das forças obtidas nas partes *b*, *c* e *d* é equivalente à força original

Problema Resolvido 3.1



a) O momento em relação a *O* é igual ao produto da força pela distância perpendicular entre a linha de ação da força e *O*. Como a força tende a girar a alavanca no sentido horário, o vetor momento aponta *para dentro* do plano que contém a alavanca e a força.

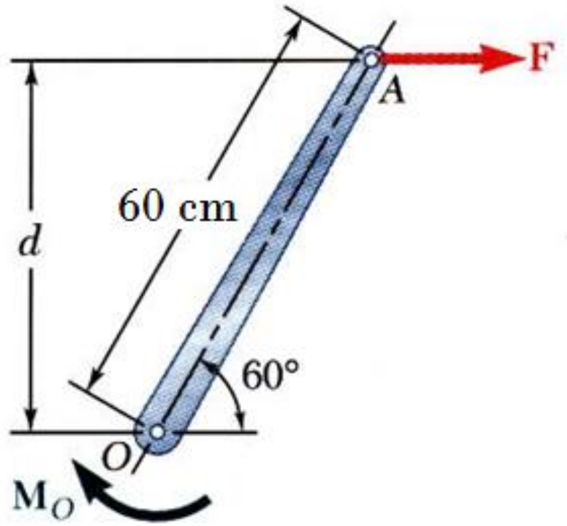
$$M_O = Fd$$

$$d = (60\text{ cm})\cos 60° = 30\text{ cm}$$

$$M_O = (450\text{ N})(0{,}3\text{ m})$$

$$\boxed{M_O = 135\text{ N}\cdot\text{m}}$$

Problema Resolvido 3.1



b) Para a força horizontal aplicada em *A* que gera o mesmo momento tem-se,

$$d = (60\text{ cm})\,\text{sen}\,60° = 52\text{ cm}$$

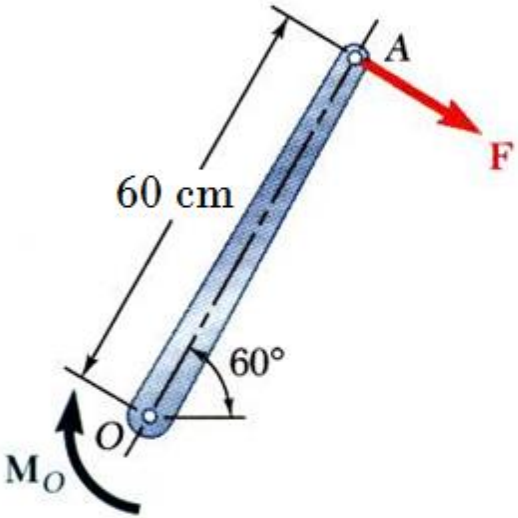
$$M_O = Fd$$

$$135\text{ N}\cdot\text{m} = F(0{,}52\text{ m})$$

$$F = \frac{135\text{ N}\cdot\text{m}}{0{,}52\text{ m}}$$

$$\boxed{F = 259{,}6\text{ N}}$$

Problema Resolvido 3.1



c) A força mínima aplicada em A que gera o mesmo momento deve atuar a uma distância perpendicular é máxima de *O*, ou seja, quando *F* é perpendicular a *OA*.

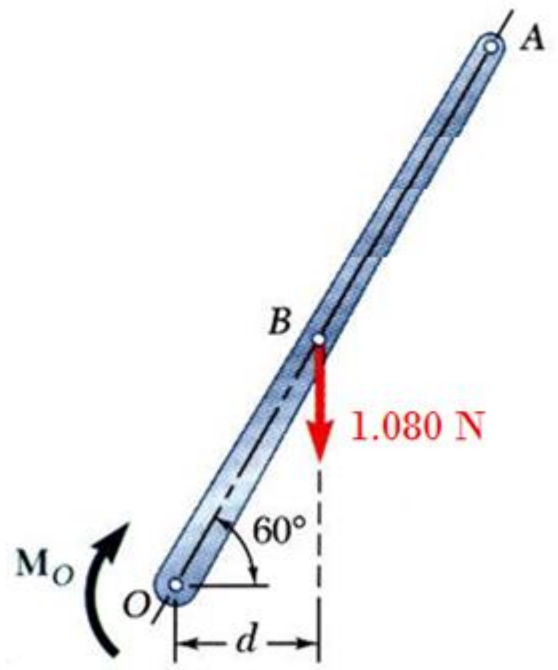
$$M_O = Fd$$

$$135\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = F(0{,}6\ \mathrm{m.})$$

$$F = \frac{135\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{0{,}6\ \mathrm{m}}$$

$$\boxed{F = 225\ \mathrm{N}}$$

Problema Resolvido 3.1



d) Para determinar o ponto de aplicação de uma força vertical de 1.080 N que gera o mesmo momento em relação a *O* temos,

$$M_O = Fd$$

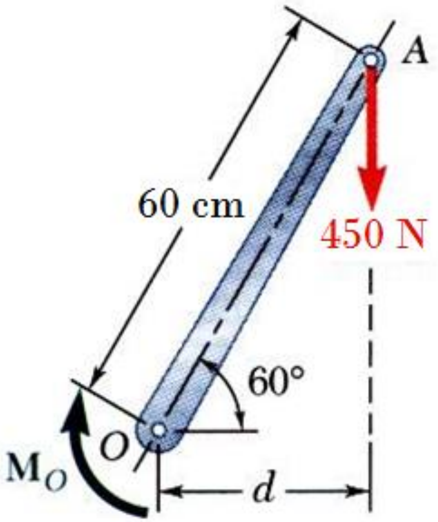
$$135\ \text{N} \cdot \text{m} = (1.080\ \text{N})\, d$$

$$d = \frac{135\ \text{N} \cdot \text{m}}{1.080\ \text{N}} = 0{,}125\ \text{m}$$

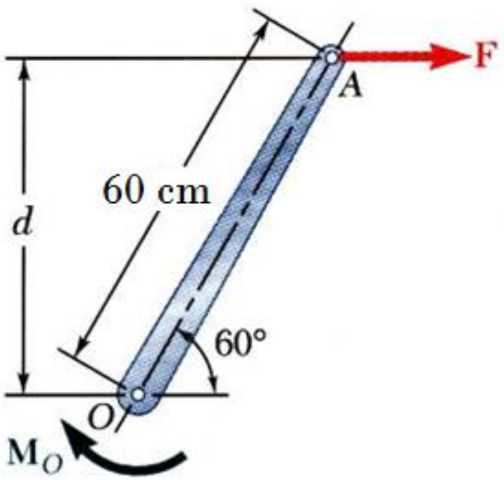
$$OB \cos 60° = 12{,}5\ \text{cm}$$

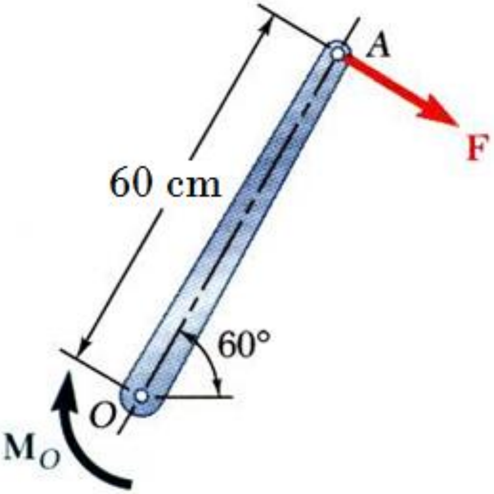
$$\boxed{OB = 25\ \text{cm}}$$

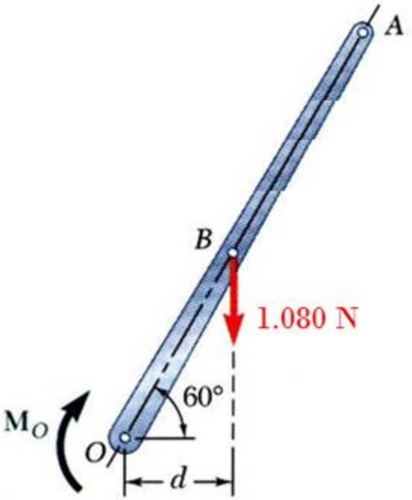
Problema Resolvido 3.1



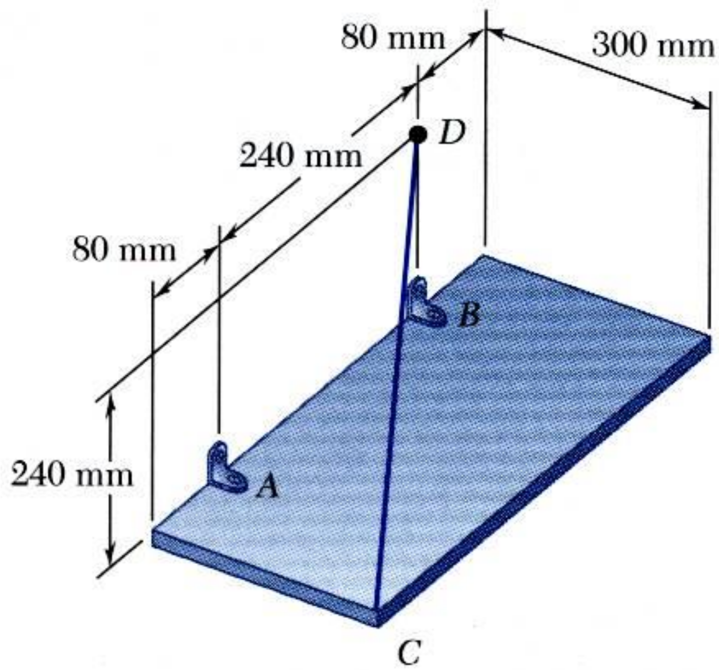
e) Embora cada uma das forças nas letras *b), c) e d)* gere o mesmo momento que a força de 450 N, nenhuma tem sua mesma intensidade, direção e sentido, ou sua mesma linha de ação. Portanto, nenhuma das forças é equivalente à força de 450 N.







Problema Resolvido 3.4



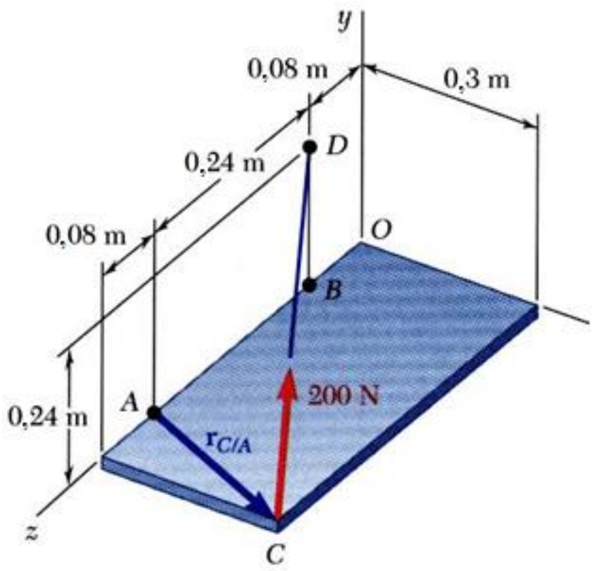
Uma placa retangular é sustentada pelos suportes *A* e *B* e por um fio *CD*. Sabendo que a tração no fio é 200 N, determine o momento em relação a *A* da força exercida pelo fio no ponto *C*.

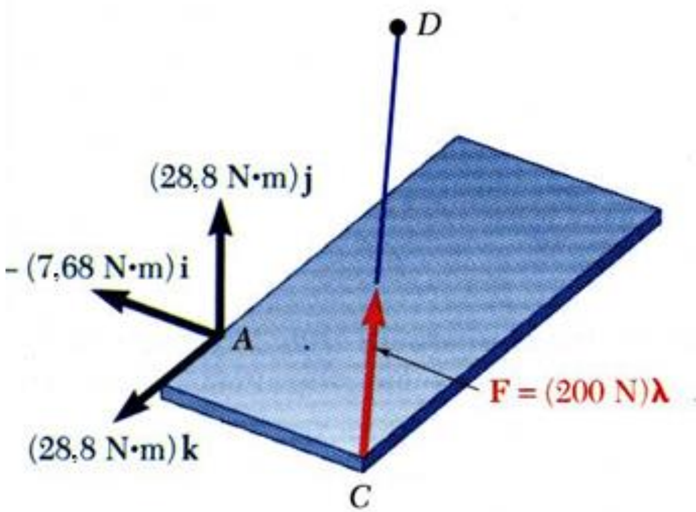
SOLUÇÃO:

O momento M_A da força **F** exercida pelo fio é obtida a partir do produto vetorial,

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

Problema Resolvido 3.4





SOLUÇÃO:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0{,}3\,\mathrm{m})\vec{i} + (0{,}08\,\mathrm{m})\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = (200\ \mathrm{N})\frac{\vec{r}_{C/D}}{r_{C/D}}$$

$$= (200\ \mathrm{N})\frac{-(0{,}3\,\mathrm{m})\vec{i} + (0{,}24\,\mathrm{m})\vec{j} - (0{,}32\,\mathrm{m})\vec{k}}{0.5\,\mathrm{m}}$$

$$= -(120\ \mathrm{N})\vec{i} + (96\ \mathrm{N})\vec{j} - (128\ \mathrm{N})\vec{k}$$

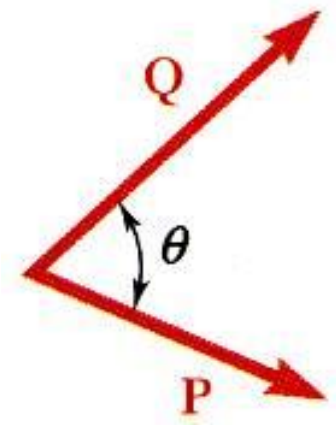
$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{M}_A = -(7{,}68\ N\cdot m)\vec{i} + (28{,}8\ N\cdot m)\vec{j} + (28{,}8\ N\cdot m)\vec{k}; \\ &M_A = 41{,}45\ N\cdot m \end{aligned}}$$

Produto Escalar de Dois Vetores

- O *produto escalar* de dois vetores ***P*** e ***Q*** é definido como

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ\cos\theta \quad (\text{resultado escalar})$$



- Produtos escalares:
  - são comutativos, $\vec{P} \bullet \vec{Q} = \vec{Q} \bullet \vec{P}$
  - são distributivos, $\vec{P} \bullet \left(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2\right) = \vec{P} \bullet \vec{Q}_1 + \vec{P} \bullet \vec{Q}_2$
  - não são associativos, $\left(\vec{P} \bullet \vec{Q}\right) \bullet \vec{S} = \text{indefinido}$

- Produtos escalares em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = \left(P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}\right) \bullet \left(Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

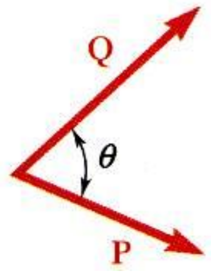
$$\vec{P} \bullet \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

Produto Escalar de Dois Vetores: Aplicações

- Ângulo entre dois vetores:

$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = PQ\cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\cos\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ}$$

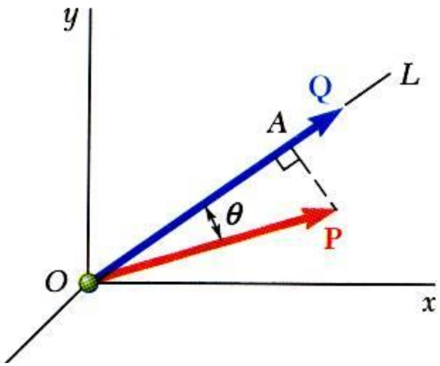


- Projeção de um vetor sobre um dado eixo:

$$P_{OL} = P\cos\theta = \text{projeção de } \vec{P} \text{ sobre o eixo } OL$$

$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = PQ\cos\theta$$

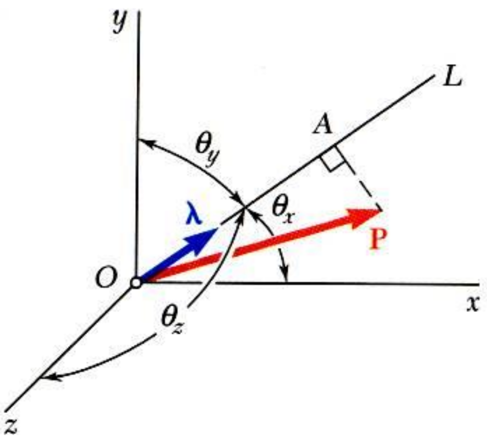
$$\frac{\vec{P}\bullet\vec{Q}}{Q} = P\cos\theta = P_{OL}$$



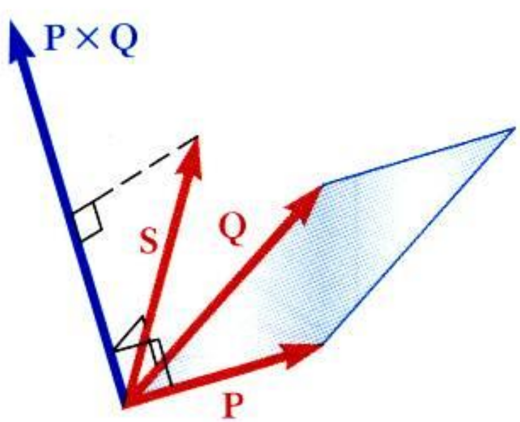
- Para um eixo definido por um vetor unitário:

$$P_{OL} = \vec{P}\bullet\vec{\lambda}$$

$$= P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z$$



Produto Triplo Misto de Três Vetores



- Produto triplo misto de três vetores:

$$\vec{S} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{Q}\right) = \text{resultado escalar}$$

- Os seis produtos triplos mistos que podem ser formados com ***S***, ***P*** e ***Q*** têm o mesmo valor absoluto, mas não necessariamente o mesmo sinal,

$$\begin{aligned} \vec{S} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{Q}\right) &= \vec{P} \bullet \left(\vec{Q} \times \vec{S}\right) = \vec{Q} \bullet \left(\vec{S} \times \vec{P}\right) \\ &= -\vec{S} \bullet \left(\vec{Q} \times P\right) = -\vec{P} \bullet \left(\vec{S} \times \vec{Q}\right) = -\vec{Q} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{S}\right) \end{aligned}$$

- Analisando o produto triplo misto tem-se,

$$\begin{aligned} \vec{S} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{Q}\right) &= S_x\left(P_y Q_z - P_z Q_y\right) + S_y\left(P_z Q_x - P_x Q_z\right) \\ &\quad + S_z\left(P_x Q_y - P_y Q_x\right) \\ &= \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

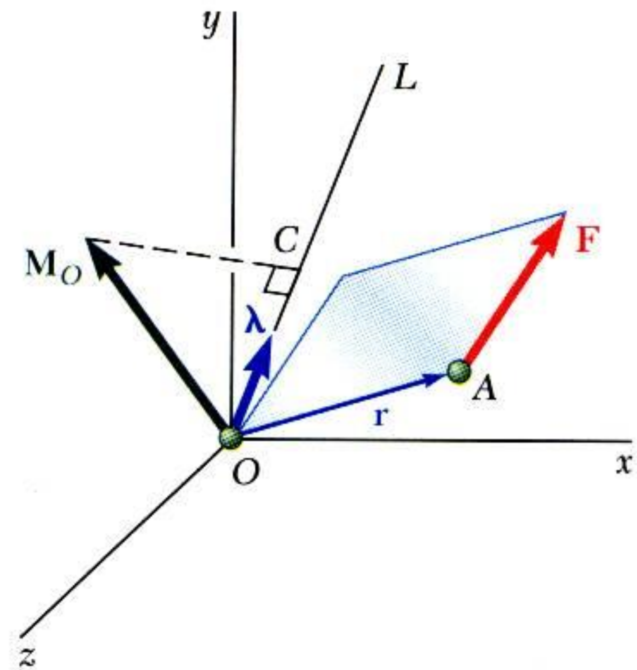
Momento de uma Força em Relação a um Dado Eixo

- Momento $\boldsymbol{M_O}$ de uma força $\boldsymbol{F}$ aplicada no ponto $\boldsymbol{A}$ em relação a um ponto $\boldsymbol{O}$:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

- O momento M_{OL} em relação a um eixo $\boldsymbol{OL}$ é a projeção do momento $\boldsymbol{M_O}$ sobre esse eixo, ou seja,

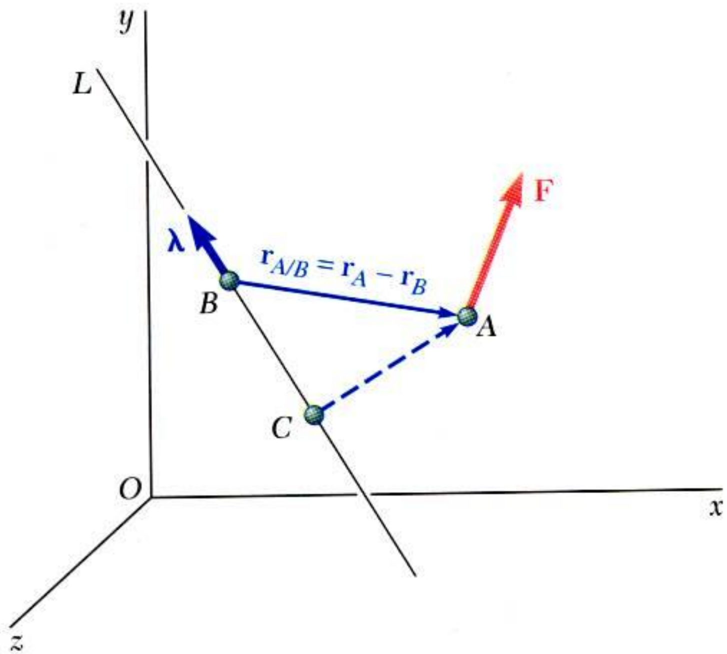
$$M_{OL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_O = \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$



- Momentos de $\boldsymbol{F}$ em relação aos eixos coordenados:

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

Momento de uma Força em Relação a um Dado Eixo

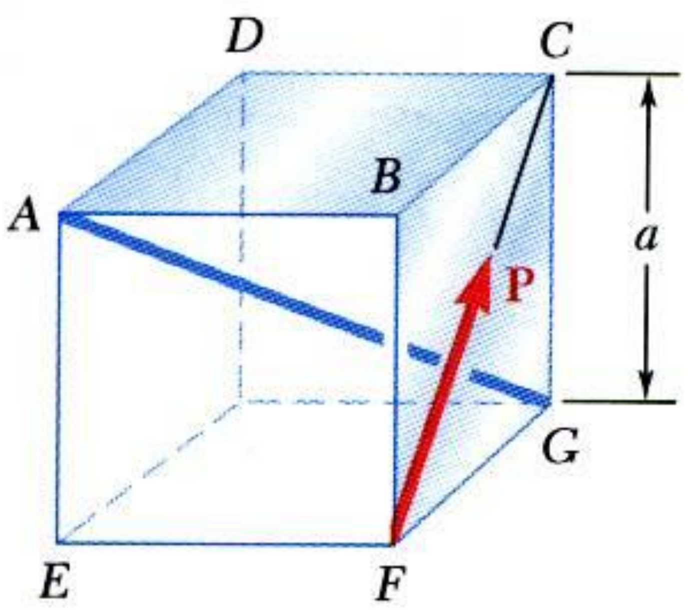


- Momento de uma força em relação a um eixo arbitrário:

$$
\begin{aligned}
M_{BL} &= \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_B \\
&= \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r}_{A/B} \times \vec{F} \right) \\
\vec{r}_{A/B} &= \vec{r}_A - \vec{r}_B
\end{aligned}
$$

- O resultado é independente do ponto *B* escolhido sobre o eixo dado.

Problema Resolvido 3.5



Um cubo sofre a ação de uma força ***P*** conforme mostrado. Determine o momento de ***P***:

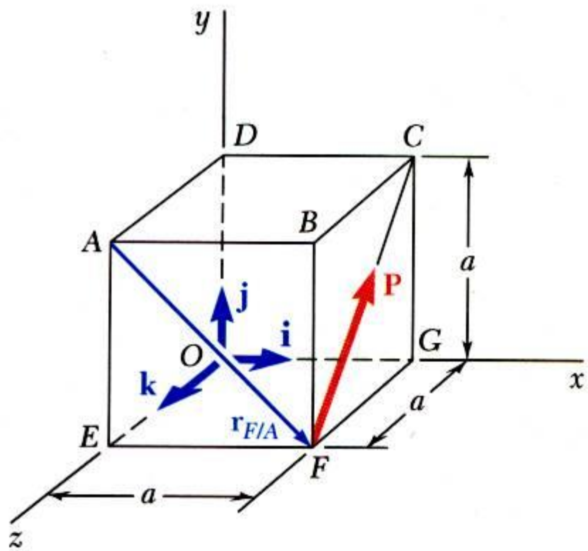
a) em relação a *A*

b) em relação à aresta *AB*

c) em relação à diagonal *AG* do cubo.

d) Determine a distância perpendicular entre *AG* e *FC*.

Problema Resolvido 3.5



- Momento de ***P*** em relação a *A:*

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{F/A} = a\vec{i} - a\vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{P} = P\left(\vec{j} - \vec{k}\right)\sqrt{2}/2 = P\left(\vec{j} - \vec{k}\right)\sqrt{2}/2$$

$$\vec{M}_A = a\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \times P\left(\vec{j} - \vec{k}\right)\sqrt{2}/2$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \left(aP\sqrt{2}/2\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)}$$

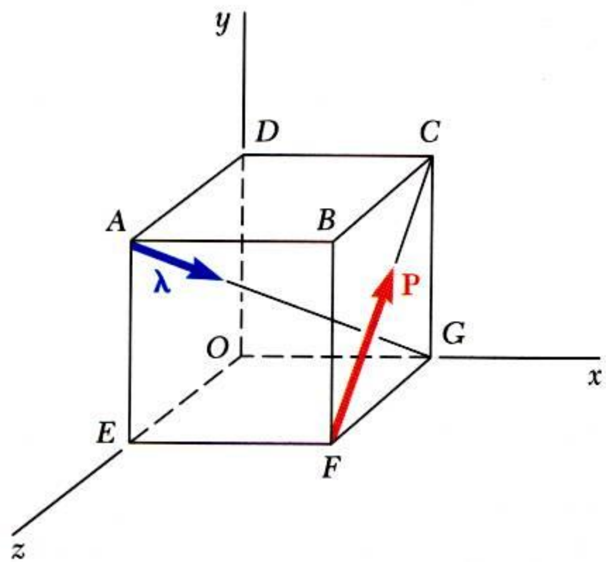
- Momento de ***P*** em relação a *AB:*

$$M_{AB} = \vec{i} \bullet \vec{M}_A$$

$$= \vec{i} \bullet \left(aP\sqrt{2}/2\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\boxed{M_{AB} = aP\sqrt{2}/2}$$

Problema Resolvido 3.5



- Momento de ***P*** em relação à diagonal *AG*:

$$M_{AG} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_A$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{A/G}}{r_{A/G}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$$

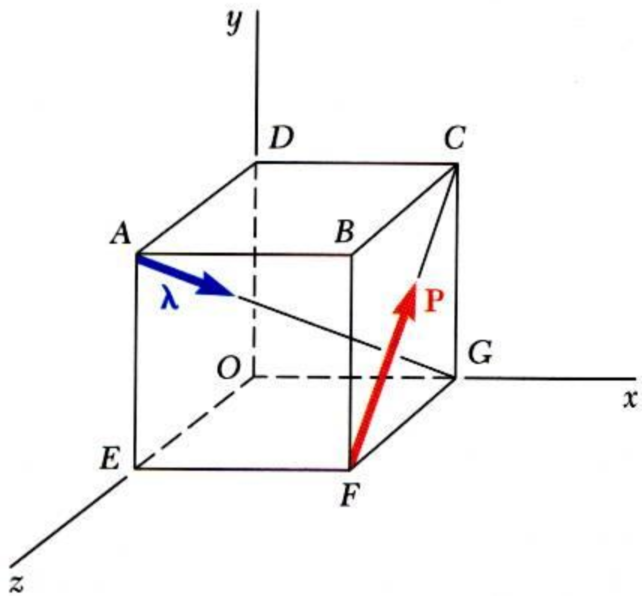
$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

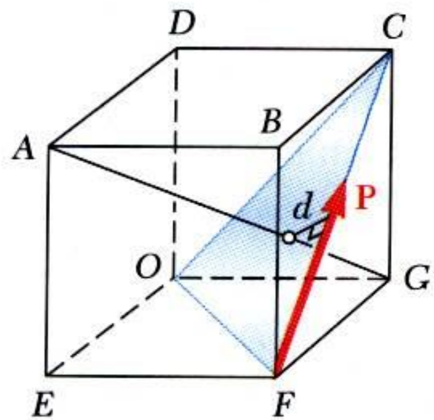
$$M_{AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) \bullet \frac{aP}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1 - 1 - 1)$$

$$\boxed{M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}}$$

Problema Resolvido 3.5





- Distância perpendicular entre *AG* e *FC:*

$$\vec{P} \bullet \vec{\lambda} = \frac{P}{\sqrt{2}}\left(\vec{j} - \vec{k}\right) \bullet \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) = \frac{P}{\sqrt{6}}(0 - 1 + 1)$$

$$= 0$$

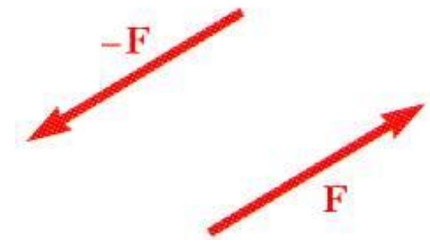
Portanto, *P* é perpendicular a *AG*.

$$\left|M_{AG}\right| = \frac{aP}{\sqrt{6}} = Pd$$

$$\boxed{d = \frac{a}{\sqrt{6}}}$$

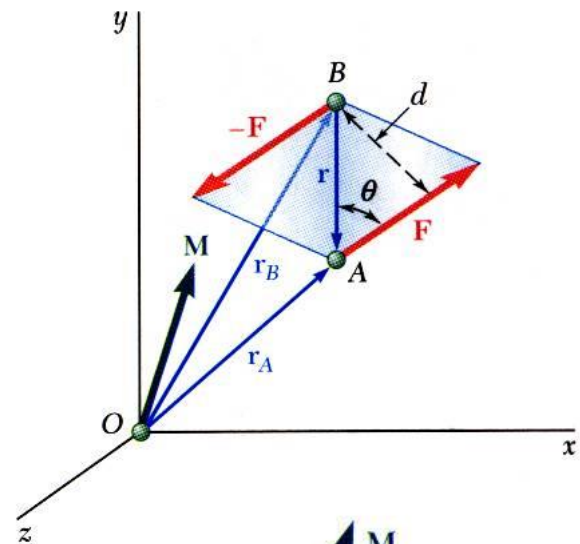
Momento de um Binário

- Duas forças ***F*** e ***-F*** de mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário.

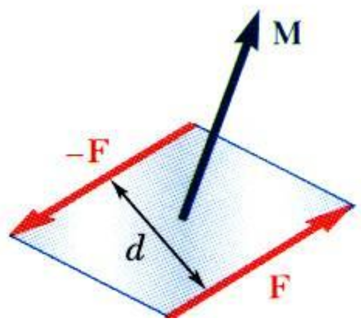


- Momento do binário:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right)\\ &= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F}\\ &= \vec{r} \times \vec{F}\\ M &= F * r * sen\,\theta = F * d\end{aligned}$$



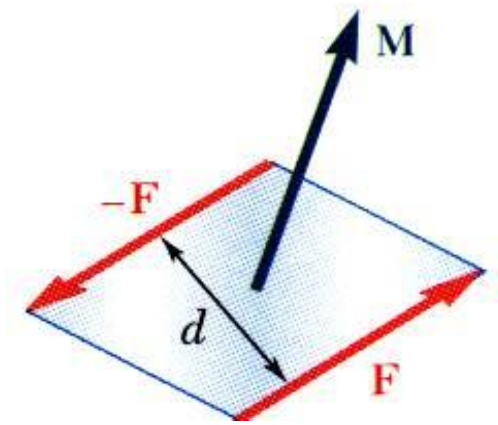
- O vetor que representa o momento do binário é independente da escolha da origem dos eixos coordenados, isto é, trata-se de um *vetor livre* que pode ser aplicado a qualquer ponto produzindo o mesmo efeito

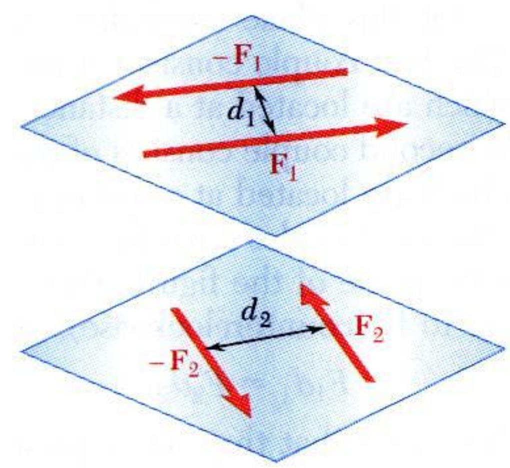


Momento de um Binário

Dois binários terão momentos iguais se

- $F_1 d_1 = F_2 d_2$
- os dois binários estiverem em planos paralelos, e
- os dois binários tiverem o mesmo sentido ou a tendência de causar rotação na mesma direção.

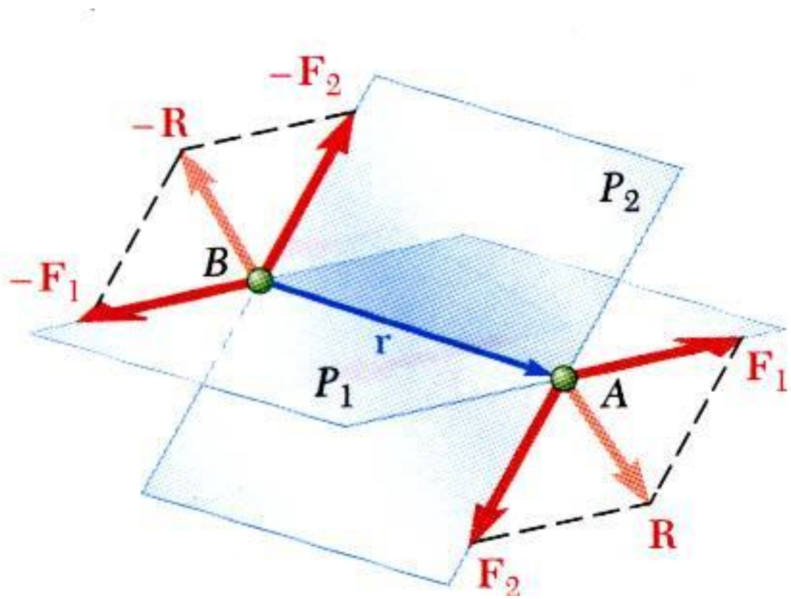




Adição de Binários

- Considere dois planos P_1 e P_2 que se interceptam, cada um contendo um binário.

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 \text{ no plano } P_1$$
$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 \text{ no plano } P_2$$

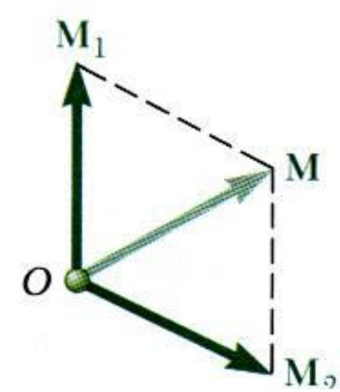


- As resultantes dos vetores também formam um binário.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$$

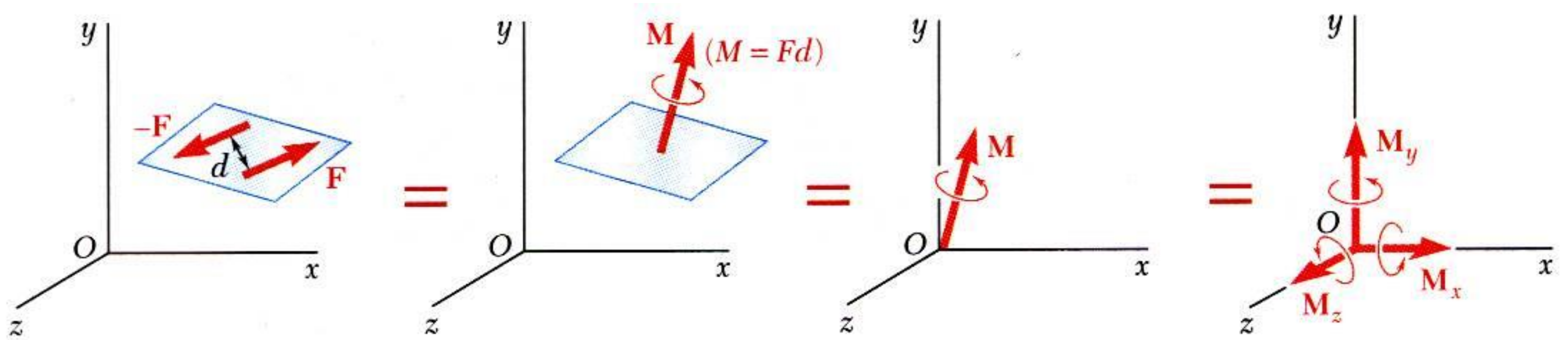
- Pelo teorema de Varignon,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



- A soma de dois binários é um binário de momento igual à soma vetorial dos momentos dos dois.

Binários Podem Ser Representados por Vetores



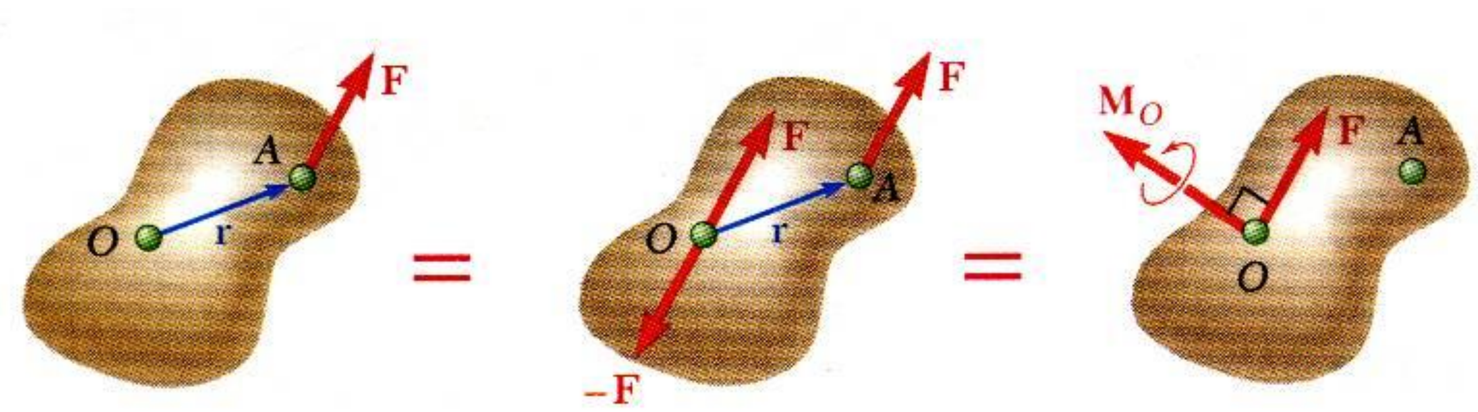
- Um binário pode ser representado por um vetor igual em intensidade, direção e sentido ao momento do binário.

- *Vetores* que representam *binários* obedecem à lei de adição de vetores.

- Vetores binários são vetores livres, ou seja, o ponto de aplicação não é relevante.

- Vetores binários podem ser decompostos em componentes vetoriais.

Substituição de uma Dada Força por uma Força em O e um Binário

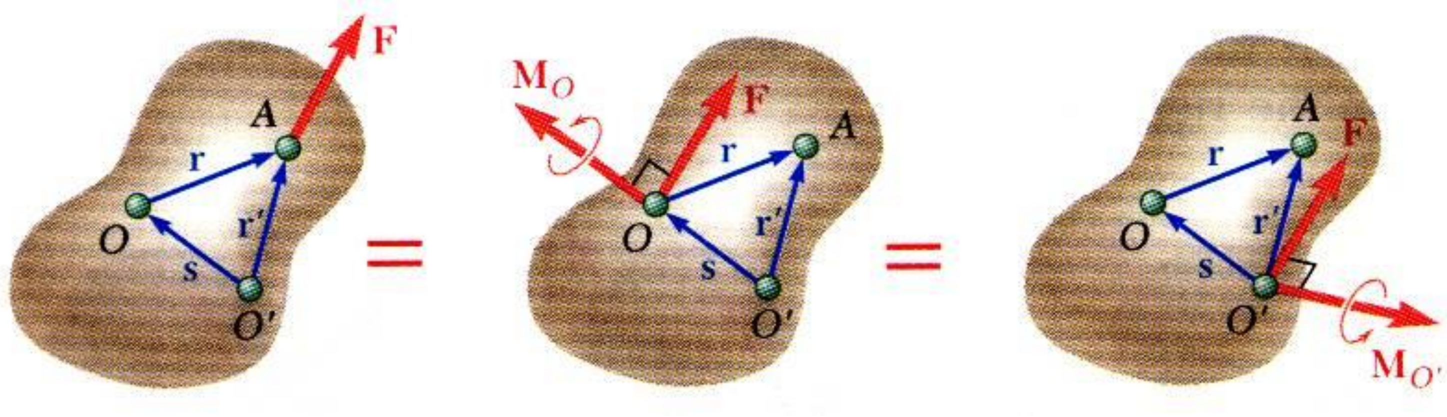


- Não se pode simplesmente mover uma força ***F*** para o ponto *O* sem modificar sua ação no corpo.

- A aplicação de duas forças de mesma intensidade e sentidos opostos em *O* não altera a ação da força original sobre o corpo.

- As três forças podem ser substituídas por uma força equivalente e um vetor binário, isto é, um *sistema força-binário*.

Substituição de uma Dada Força por uma Força em O e um Binário



- Para mover a força ***F*** de *A* para um ponto diferente *O'* deve-se aplicar naquele ponto outro vetor binário $\boldsymbol{M_{O'}}$

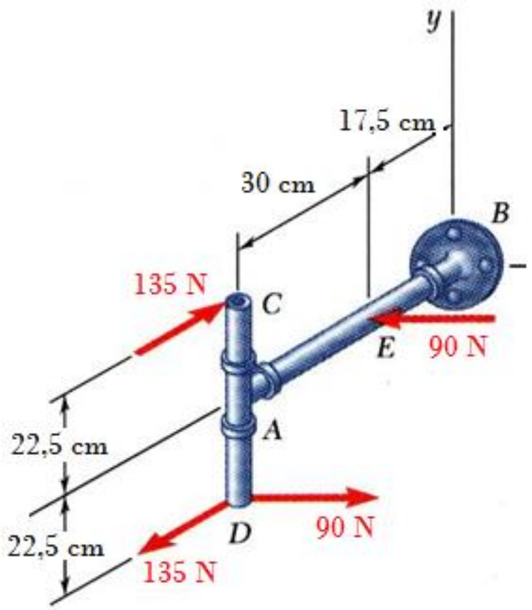
$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}\,' \times \vec{F}$$

- Os momentos de ***F*** em relação a *O* e a *O'* estão relacionados.

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}\,' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{s} \times \vec{F}$$
$$= \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}$$

- Para mover o sistema força-binário de *O* para *O'* deve-se somar ao sistema o momento da força aplicada em *O* em relação a *O'*.

Problema Resolvido 3.6



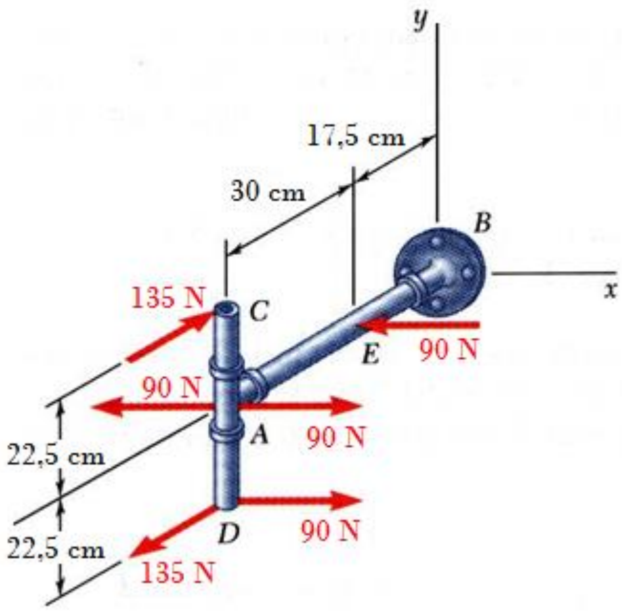
Determine os componentes do binário único equivalente aos dois binários mostrados.

SOLUÇÃO:

- Introduzimos no ponto A duas forças de 90 N com sentidos opostos, produzindo 3 binários para os quais os componentes dos momentos são facilmente calculados.

- Alternativamente, pode-se calcular os momentos das quatro forças em relação a um único ponto arbitrário. O ponto *D* é uma boa escolha pois apenas duas das forças geram momento naquele ponto.

Problema Resolvido 3.6



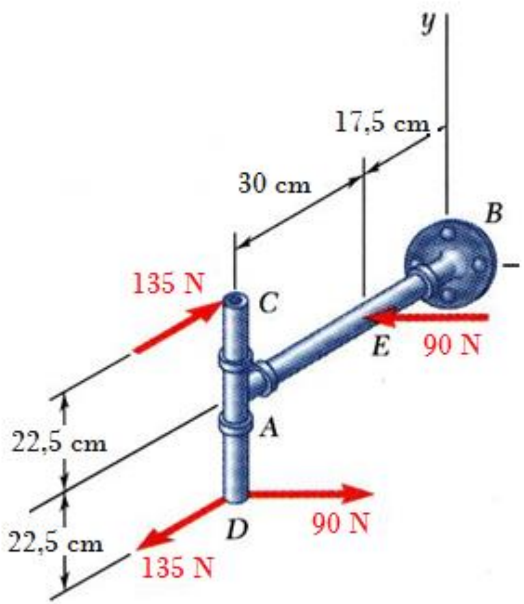
- Introduzimos no ponto A duas forças de 90 N com sentidos opostos.

- Os três binários podem ser representados pelos três vetores binários,

$$M_x = -(135\ \mathrm{N})(0{,}45\ \mathrm{m}) = -60{,}75\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$M_y = +(90\ \mathrm{N})(0{,}30\ \mathrm{m}) = +27\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$M_z = +(90\ \mathrm{N})(0{,}225\ \mathrm{m}) = +20{,}25\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$\boxed{\vec{M} = -(60{,}75\ \mathrm{N \cdot m})\vec{i} + (27\ \mathrm{N \cdot m})\vec{j} + (20{,}25\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}}$$

Problema Resolvido 3.6

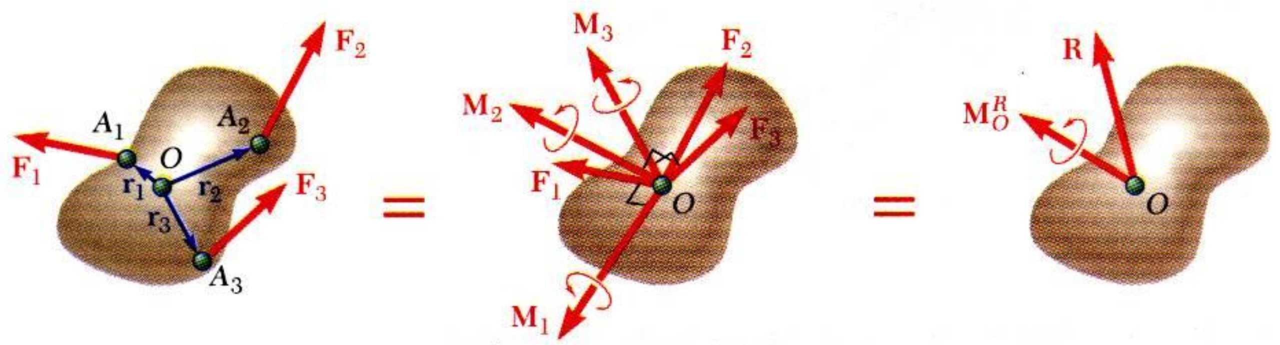


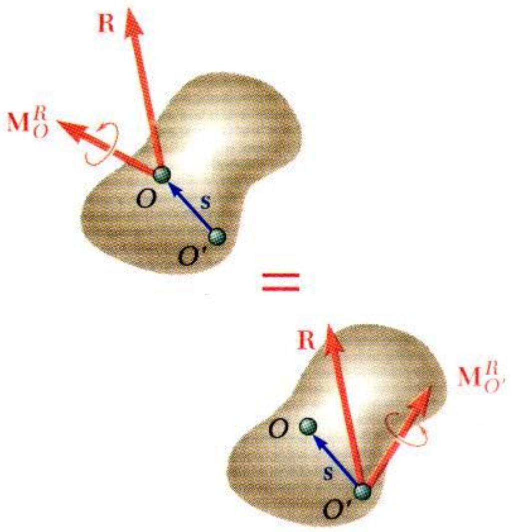
- Alternativamente, calculamos a soma dos momentos das quatro forças em relação a D.
- Somente as forças em *C* e *E* geram momento em relação ao ponto *D*.

$$\vec{M} = \vec{M}_D = (0{,}45\ \mathrm{m})\vec{j} \times (-135\ \mathrm{N})\vec{k} + \left[(0{,}225\ \mathrm{m})\vec{j} - (0{,}30\ \mathrm{m})\vec{k}\right] \times (-90\ \mathrm{N})\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{M} = -(60{,}75\ \mathrm{N \cdot m})\vec{i} + (27\ \mathrm{N \cdot m})\vec{j} + (20{,}25\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}}$$

Sistema de Forças: Redução a uma Força e um Binário





- Um sistema de forças pode ser substituído por um sistema força-binário equivalente atuando em um dado ponto *O*.

- As forças e os vetores binários podem ser substituídos por uma força resultante e um vetor binário resultante,

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \qquad \vec{M}_O^R = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$

- O sistema força-binário em *O* pode ser movido para *O'* com a soma do momento de ***R*** em relação à *O'*,

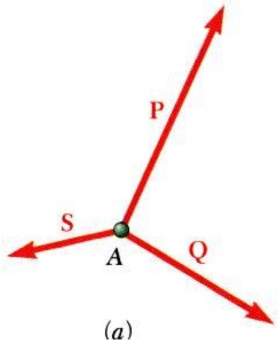
$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$$

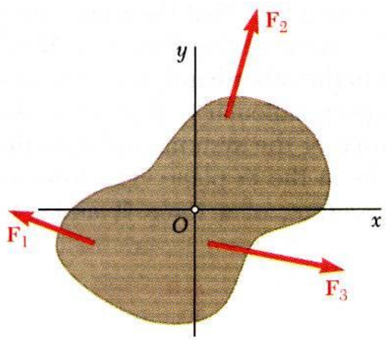
- Dois sistemas de forças são equivalentes se eles podem ser reduzidos a um mesmo sistema força-binário.

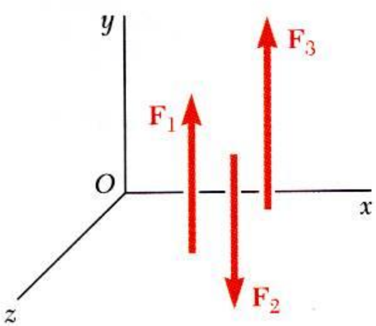
Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

- Se a força resultante e o binário em *O* forem mutuamente perpendiculares, o sistema pode ser substituído por uma única força que atua ao longo de uma nova linha de ação.

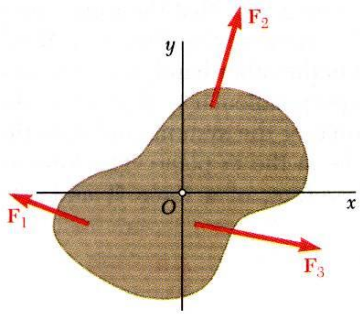
- O sistema força-binário resultante para um sistema de forças será mutuamente perpendicular se:
  1) as forças forem concorrentes,
  2) as forças forem coplanares, ou
  3) as forças forem paralelas.

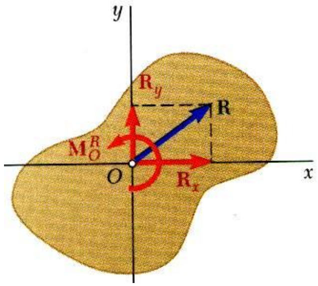




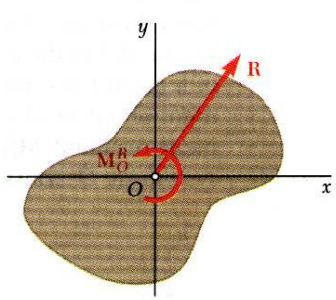


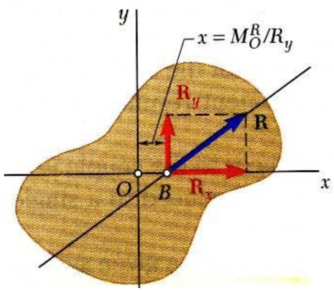
Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças





- O sistema de forças coplanares é reduzido a um sistema força-binário que consiste em $\vec{R}$ e $\vec{M}_O^R$, que são mutuamente perpendiculares.

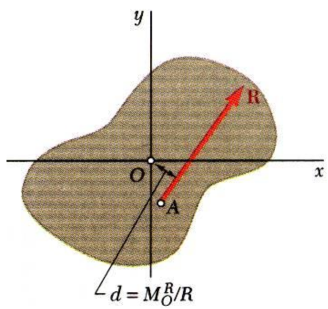


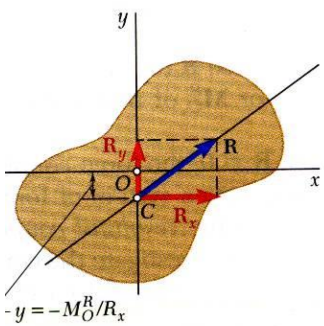


- O sistema pode ser reduzido a uma única força movendo-se a linha de ação de $\vec{R}$ até que seu momento em relação a O se torne $\vec{M}_O^R$.

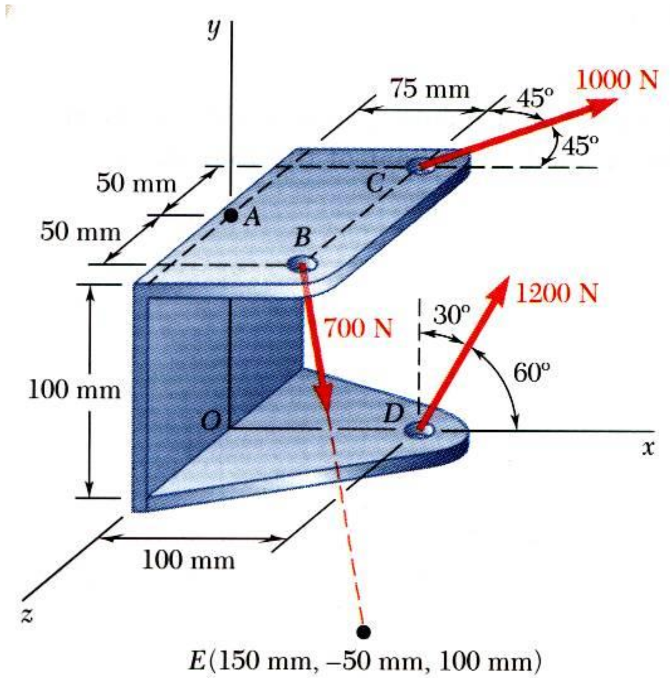
- Em termos de componentes retangulares,

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$





Problema Resolvido 3.10



Três cabos estão presos ao suporte, como ilustrado. Substitua as forças exercidas pelos cabos por um sistema força-binário equivalente em *A*.

SOLUÇÃO:

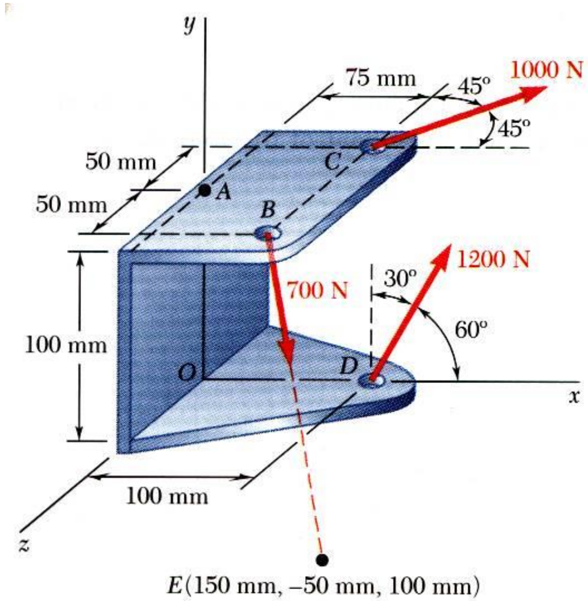
- Determinamos os vetores posição relativos traçados do ponto *A* até os pontos de aplicação das várias forças.
- Decompomos as forças em componentes retangulares.
- Calculamos a força resultante,

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

- Calculamos o binário resultante,

$$\vec{M}_A^R = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right)$$

Problema Resolvido 3.10



SOLUÇÃO:

- Determinamos os vetores posição relativos em relação a A:

$$\vec{r}_{B/A} = 0{,}075\vec{i} + 0{,}050\vec{k}\ (\text{m})$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0{,}075\vec{i} - 0{,}050\vec{k}\ (\text{m})$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0{,}100\vec{i} - 0{,}100\vec{j}\ (\text{m})$$

- Decompomos as forças em componentes retangulares :

$$\vec{F}_B = (700\text{ N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0{,}429\vec{i} - 0{,}857\vec{j} + 0{,}289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k}\ (\text{N})$$

$$\vec{F}_C = (1000\text{ N})\left(\cos 45\vec{i} - \cos 45\vec{k}\right)$$

$$= 707\vec{i} - 707\vec{k}\ (\text{N})$$

$$\vec{F}_D = (1200\text{ N})\left(\cos 60\vec{i} + \cos 30\vec{j}\right)$$

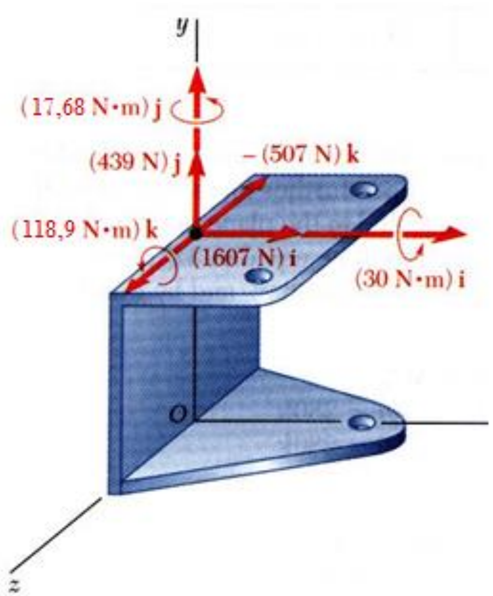
$$= 600\vec{i} + 1039\vec{j}\ (\text{N})$$

Problema Resolvido 3.10

- Calculamos a força resultante:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$= (300 + 707 + 600)\vec{i}$$
$$+ (-600 + 1039)\vec{j}$$
$$+ (200 - 707)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \ \ (\mathrm{N})}$$



- Calculamos o binário resultante:

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}075 & 0 & 0{,}050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}075 & 0 & -0{,}050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17{,}68\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}100 & -0{,}100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163{,}9\vec{k}$$

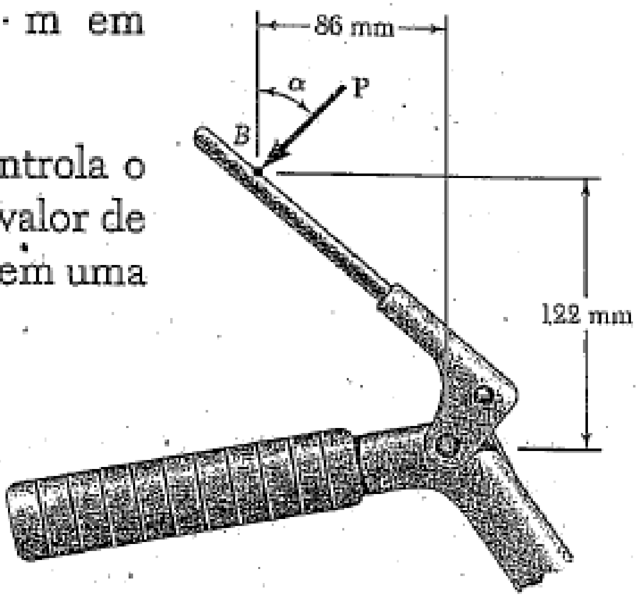
$$\boxed{\vec{M}_A^R = (30\ \mathrm{N \cdot m})\vec{i} + (17{,}68\ \mathrm{N \cdot m})\vec{j} + (118{,}9\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}}$$

Exercícios

3.1 Uma força **P** de 13,2 N é aplicada à alavanca que controla o rotor de um equipamento para remoção de neve. Determine o momento de **P** em relação a A quando α é igual a 30°.

3.2 A força **P** é aplicada à alavanca que controla o rotor de um equipamento para remoção de neve. Determine a intensidade e a direção da menor força **P** para gerar um momento anti-horário de 2,20 N · m em relação a A.

3.3 Uma força **P** de 13,1 N é aplicada à alavanca que controla o rotor de um equipamento para remoção de neve. Determine o valor de α sabendo que o momento de **P** em relação a A é anti-horário e tem uma intensidade de 1,95 N · m.



3.1	1,788 N · m ↺.
3.2	14,74 N ↗ 35,2°.
3.3	50,6° ou 59,1°.

Exercícios

3.4 Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em B. Sabendo que $\alpha = 28°$, determine o momento de uma força de 18 N em relação ao ponto B decompondo a força em componentes horizontal e vertical.

137,3 N · cm ↰.

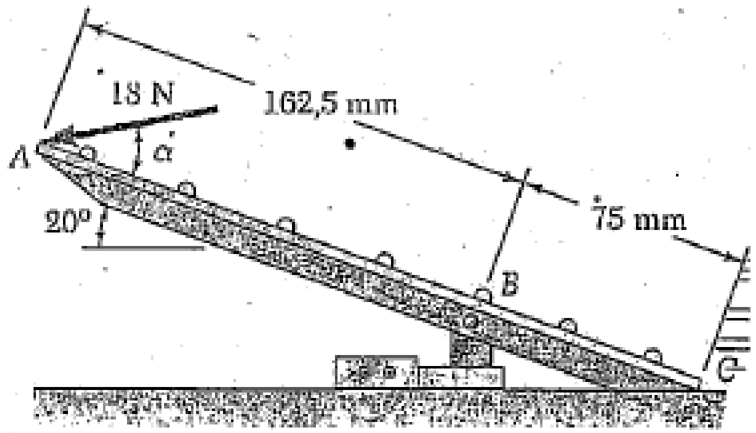


Fig. P3.4 e *P3.5*

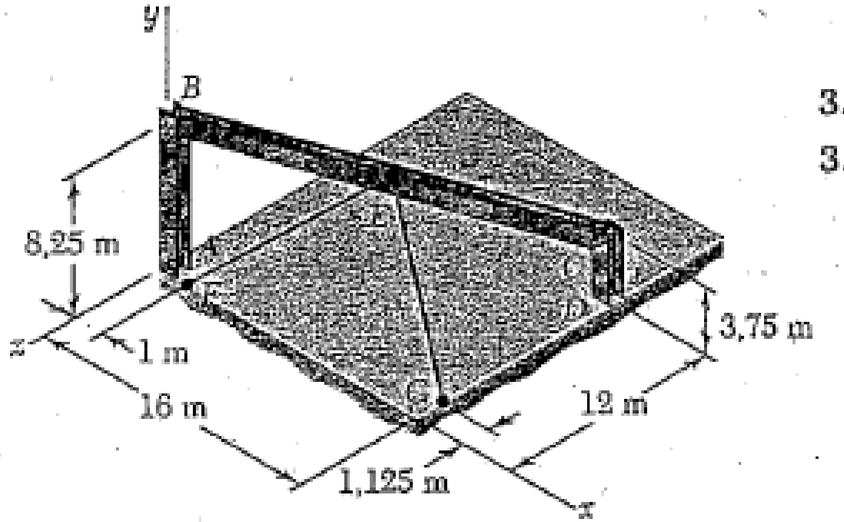
3.5 Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em B. Sabendo que $\alpha = 28°$, determine o momento de uma força de 18 N em relação ao ponto B decompondo a força em componentes ao longo de ABC e em uma direção perpendicular a ABC.

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Exercícios

3.39 Os elementos de uma estrutura de aço AB, BC e CD estão unidos em B e C e são reforçados com os cabos EF e EG. Sabendo que E coincide com o ponto médio de BC e que a tração no cabo EF é de 330 N, determine (*a*) o ângulo entre EF e o elemento BC, e (*b*) a projeção sobre BC da força exercida pelo cabo EF no ponto E.

3.40 Os elementos de uma estrutura de aço AB, BC e CD estão unidos em B e C e são reforçados com os cabos EF e EG. Sabendo que E coincide com o ponto médio de BC e que a tração no cabo EG é de 445 N, determine (*a*) o ângulo entre EG e o elemento BC, (*b*) a projeção sobre BC da força exercida pelo cabo EG no ponto E.



3.39 (*a*) 134,1°. (*b*) –230 N.
3.40 (*a*) 65,0°. (*b*) 188,3 N.

Exercícios

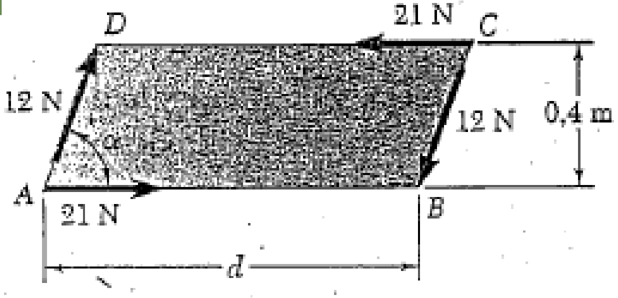


Fig. P3.68

3.68 Uma placa em forma de paralelogramo sofre a ação de dois binários. Determine (*a*) o momento do binário formado pelas duas forças de 21 N, (*b*) a distância perpendicular entre as forças de 12 N se a resultante dos dois binários for nula, (*c*) o valor de α se o binário resultante for de 1,8 N · m no sentido horário e d for 1,05 m.

3.69 Um binário **M** de intensidade 13,5 N · m é aplicado no cabo de uma chave de fenda para apertar um parafuso em um bloco de madeira. Determine as intensidades das duas menores forças horizontais que são equivalentes a **M** se estas forem aplicadas (*a*) nos cantos *A* e *D*, (*b*) nos cantos *B* e *C*, (*c*) em qualquer lugar do bloco.

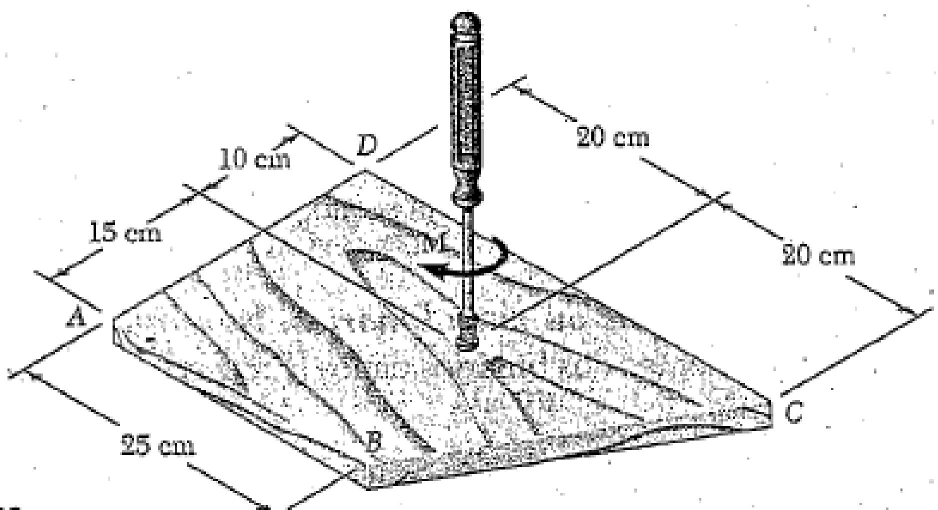


Fig. P3.69

3.68 (*a*) 8,40 N · m ↻. (*b*) 0,700 m.
***3.69** (*a*) 54 N. (*b*) 46,31 N. (*c*) 28,62 N.

Exercícios

3.71 A placa de aço mostrada irá sustentar seis roletes esticadores de 50 mm de diâmetro montados sobre a placa, como mostra a figura. Duas correias planas passam em torno dos roletes e os roletes *A* e *D* serão ajustados de modo que a tração em cada correia seja de 45 N. Determine (*a*) o binário resultante que atua sobre a placa para $a = 0{,}2$ m, e (*b*) o valor de *a* para que o binário resultante que atua sobre a placa seja de 54 N · m no sentido horário.

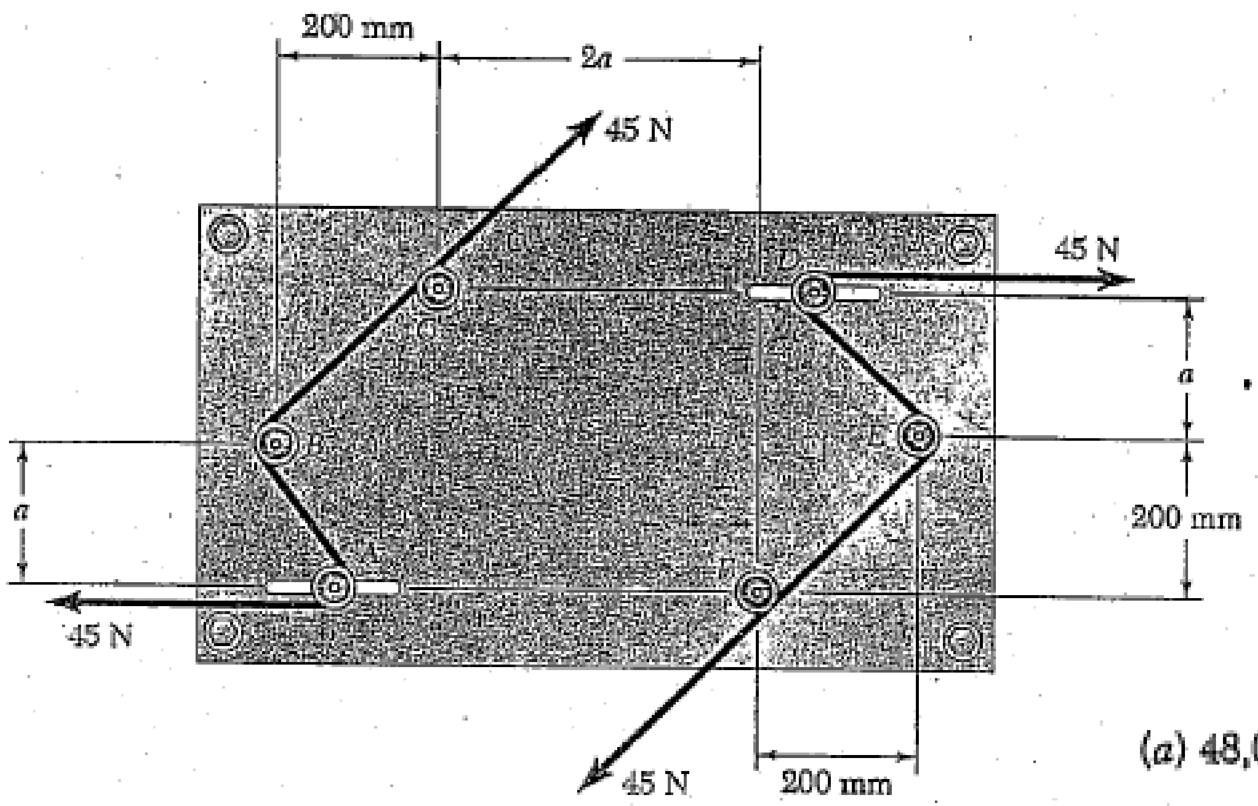


Fig. P3.71

(*a*) 48,0 N · m ↓. (*b*) 243 mm.