



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de Lorena – EEL

“LOM3055 - FÍSICA PARA ENGENHARIA DE MATERIAIS II”

Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior

Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)

Escola de Engenharia de Lorena (EEL)

Universidade de São Paulo (USP)

Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970

durval@demar.eel.usp.br

Rodovia Itajubá-Lorena, Km 74,5 - Caixa Postal 116
CEP 12600-970 - Lorena - SP
Fax (12) 3153-3133
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

USP Lorena
www.eel.usp.br

Polo Urbo-Industrial Gleba AI-6 - Caixa Postal 116
CEP 12600-970 - Lorena - SP
Fax (12) 3153-3006
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

UNIDADE 8c -

**Fótons e
Ondas de Matéria III**

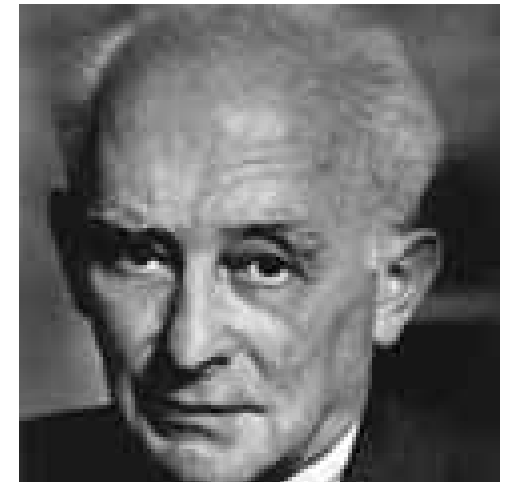
A função de onda

A nossa conclusão sobre tudo o que foi dito até agora é que, dada uma partícula atômica ou um fóton, este objeto pode ser descrito pela chamada *amplitude de probabilidade* $\psi(\vec{r}, t)$, ou *função de onda*, à qual podemos aplicar:

- *Princípio da superposição*: $\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$
- *Interpretação probabilística*: $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
(Max Born)

$$\int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r = 1$$

A *função de onda* carrega a *informação máxima* que podemos ter sobre o sistema em questão.



Dualidade e complementaridade

Assim, as propriedades ondulatórias e corpusculares coexistem.

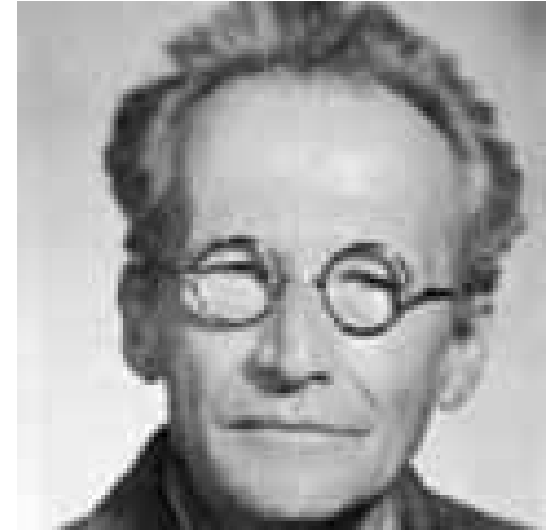
Esta é a chamada dualidade onda-partícula.

Entretanto, não há nenhuma forma destas duas propriedades serem testadas simultaneamente. Ou fazemos um esquema de medida onde o aspecto corpuscular seja evidenciado ou um que revele o caráter ondulatório do sistema em questão.

Este é o *princípio da complementaridade*, que ficou bem claro na experiência de Young que analisamos.

A equação de Schrödinger

- Embora tenha obtido alguns sucessos notáveis, a velha teoria quântica (1900 ~ 1920) tinha sérios defeitos. Era uma mistura arbitrária de física clássica com novos postulados, alheios e contraditórios à própria física clássica.



Erwin Schrödinger

- Em 1926, Schrödinger foi convidado a dar um seminário na Universidade de Zurich sobre a teoria de De Broglie.

Durante o seminário um dos ouvintes perguntou como ele podia falar abertamente sobre uma **onda associada ao elétron**, se não havia nenhuma **equação de onda** !

Alguns meses depois, Schrödinger apresentou a equação de onda, dando início a ***mecânica quântica moderna***.

A equação de Schrödinger

“ Nossa **mecânica clássica** talvez seja completamente análoga à **óptica geométrica** e por isso falha, estando em desacordo com a realidade... Portanto é preciso estabelecer uma **mecânica ondulatória**...” - *Schrödinger, 1926.*

A equação de Schrödinger **não pode ser deduzida**, assim como não podem ser deduzidas as equações da dinâmica de Newton. Ela só pode ser postulada.

A forma escolhida deveria **incorporar o sucesso das teorias anteriores**. Fatalmente, ela também levaria a novas previsões (e interpretações) que poderiam ser testadas.

A equação de Schrödinger

- Os fenômenos ondulatórios, **independentemente da sua origem**, têm a sua **evolução temporal** descrita por equações de onda do tipo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$$

ou

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$$

onde $\vec{F}(\vec{r}, t)$ é a variável dinâmica de interesse;

Por exemplo: o campo elétrico ou o campo magnético da radiação EM, ou a função de onda $\psi(\vec{r}, t)$.

- Se quisermos investigar a evolução temporal da densidade de probabilidade $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$, devemos estudar como $\psi(\vec{r}, t)$ varia no tempo. No que segue, vamos fazer essa análise apenas para partículas massivas!

A equação de Schrödinger

Em geral podemos dizer que para uma onda plana temos:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \psi_0 \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \right)$$

Derivando $\psi(\vec{r}, t)$ com relação a t :

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \psi(\vec{r}, t)$$

Tomando o gradiente de $\psi(\vec{r}, t)$ e depois a sua divergência

$$\vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{r}, t) = i\vec{k} \psi(\vec{r}, t) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t)] = \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = -k^2 \psi(\vec{r}, t)$$

A equação de Schrödinger

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Então:

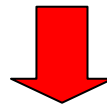
$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hbar \omega \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t)$$

e

$$\text{pois } E = hf = \frac{h}{2\pi} (2\pi f) = \hbar \omega$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t)$$

$$\text{pois } \vec{p} = \frac{hf}{c} = \hbar \vec{k}$$



Equação de Schrödinger da partícula livre ($E = E_k$; $V = 0$) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t)$$

A equação de Schrödinger

Mas, no caso geral não relativístico:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad E \psi(\vec{r}, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$



Equação de Schrödinger (*Postulada!*)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

A equação de Schrödinger

Onda estacionária:

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$$

substituindo na Eq. de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

obtemos:

$$\hbar\omega\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r})$$

Equação de Schrödinger independente do tempo.

Aplicações da Equação de Schrödinger

- 1) A partícula livre em 1-D**
- 2) O potencial degrau**
- 3) A barreira de potencial**

1) A partícula livre em 1-D

Para encontrar a solução geral de:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

devemos resolver inicialmente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = E \varphi(x) \quad ; \quad V(r) = 0$$

ou: $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0 \quad ; \quad \text{onde} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

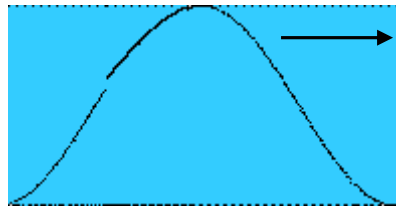
1) A partícula livre em 1-D

Solução geral: $\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$

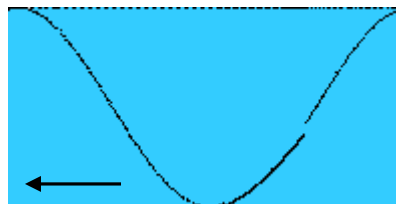
como: $\exp(\pm i\theta) = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \longrightarrow$

$\varphi(x) = A' \cos kx + B' \sin kx$; com $A' = (A + B)$; $B' = i(A - B)$

$\psi(x, t) \propto \exp i(kx - \omega t) \longrightarrow$ Onda propagante para a direita:



$\psi(x, t) \propto \exp[-i(kx + \omega t)] \longrightarrow$ Onda propagante para a esquerda:



1) A partícula livre em 1-D

Façamos: $A = \varphi_0$ e $B = 0 \rightarrow \varphi(x) = \varphi_0 \exp(ikx)$ (p/ direita)

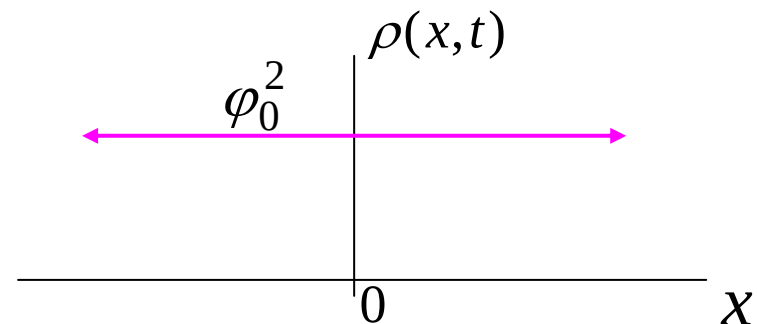
e $\psi(x,t) = \varphi_0 \exp i(kx - \omega t)$ onde $\omega = \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$

pois: $\hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

A densidade de probabilidade para encontrar a partícula será:

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \varphi_0^2 = \text{Constante!} \quad \text{para } -\infty < x < +\infty$$

- Ou seja, uma partícula livre pode ser encontrada em qualquer ponto sobre o eixo x , com a mesma probabilidade.



O princípio da incerteza

[wavemechanics-freepacket](#)

- Seja um “pacote de ondas”: $\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp i[kx - \omega(k)t] dk$

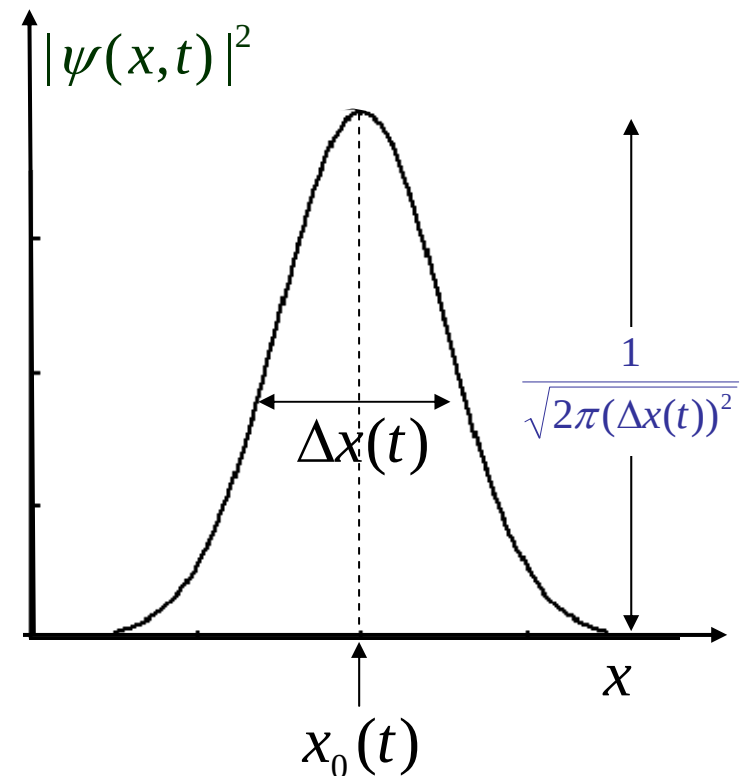
Densidade de probab.: $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}[\Delta x(t)]^2} \exp \left[-\frac{(x - x_0(t))^2}{2[\Delta x(t)]^2} \right]$

$$x_0(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m} t$$

e

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 (\Delta x_0)^4}}$$

onde: $\Delta x_0 = \frac{1}{2\Delta k}$



O princípio da incerteza

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Propriedade da distribuição gaussiana:

$$\Delta x_0 = \frac{1}{2\Delta k} \Rightarrow \Delta x_0 \Delta k = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x_0 \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$



Werner Heisenberg

Como: $\Delta x_0 \leq \Delta x(t) \equiv \Delta x$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Relação conhecida como *princípio da incerteza* de Heisenberg!
- Não podemos determinar a **posição** e o **momento linear** de uma partícula quântica com **precisão arbitrária** em ambas as medidas!

O princípio da incerteza

- Apesar de termos mostrado essa propriedade partindo de uma distribuição gaussiana (pacote de ondas), ela é inerente à mecânica quântica. Ela se aplica sempre aos pares das chamadas **variáveis incompatíveis**. Essas são variáveis que **não podem ser medidas simultaneamente!**

Em 3-D:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{array} \right.$$

O princípio da incerteza

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Também pode ser escrito como:

$$\Delta x \Delta p \frac{\Delta p}{\Delta p} \frac{2m}{2m} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \frac{(\Delta p)^2}{2m} \frac{2m}{m\Delta v} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$2\Delta E \frac{\Delta x}{\Delta v} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Prob.1:



a) Uma bola de gude, com 25 g, está numa caixa que tem 10 cm de lado. Achar a incerteza mínima no seu momento linear p e na sua velocidade v .

b) Resolver o mesmo problema, para um elétron confinado numa região de comprimento de 1 Å , que é da ordem de grandeza do diâmetro de um átomo.

$$a) \quad \Delta x^b \leq 10 \text{ cm} \rightarrow \frac{\hbar}{2} \leq \Delta x^b \Delta p_x^b \leq (10 \text{ cm}) \Delta p_x^b \rightarrow \Delta p_x^{b,\min} = \frac{h(\text{erg.s})}{4\pi(10 \text{ cm})}$$

$$\Delta p_x^{b,\min} = \frac{6.63 \times 10^{-27} (\text{erg.s})}{40\pi (\text{cm})} \approx 5.28 \times 10^{-29} (\text{g cm / s})$$

$$\Delta p_x^{b,\min} = m^b \Delta v_x^{b,\min} \rightarrow \Delta v_x^{b,\min} = \frac{6.63 \times 10^{-27} (\text{erg.s})}{40\pi (\text{cm}) \times 25 (\text{g})} \approx 2.11 \times 10^{-30} (\text{cm / s})$$

b) elétron num átomo:

$$\Delta x^e \leq 10^{-8} \text{ cm} \rightarrow \Delta p_x^{e,\min} = \frac{h(\text{erg.s})}{4\pi(10^{-8} \text{ cm})} = 10^9 \Delta p_x^{b,\min} ; \quad \Delta v_x^{e,\min} = 10^9 \frac{\Delta p_x^{b,\min}}{m^e}$$

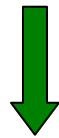
$$\Delta p_x^{e,\min} \approx 5.28 \times 10^{-20} (\text{g} \frac{\text{cm}}{\text{s}}) ; \quad \Delta v_x^{e,\min} \approx \frac{5.28 \times 10^{-11} (\text{g} \frac{\text{cm}}{\text{s}})}{9.1 \times 10^{-28} (\text{g})} \approx 5.8 \times 10^7 (\frac{\text{cm}}{\text{s}}) \approx 0.019c$$

Prob. 2:

Mostre que o número de onda angular k , de uma partícula livre não-relativística de massa m , pode ser escrito na forma abaixo, onde K é a energia cinética da partícula.

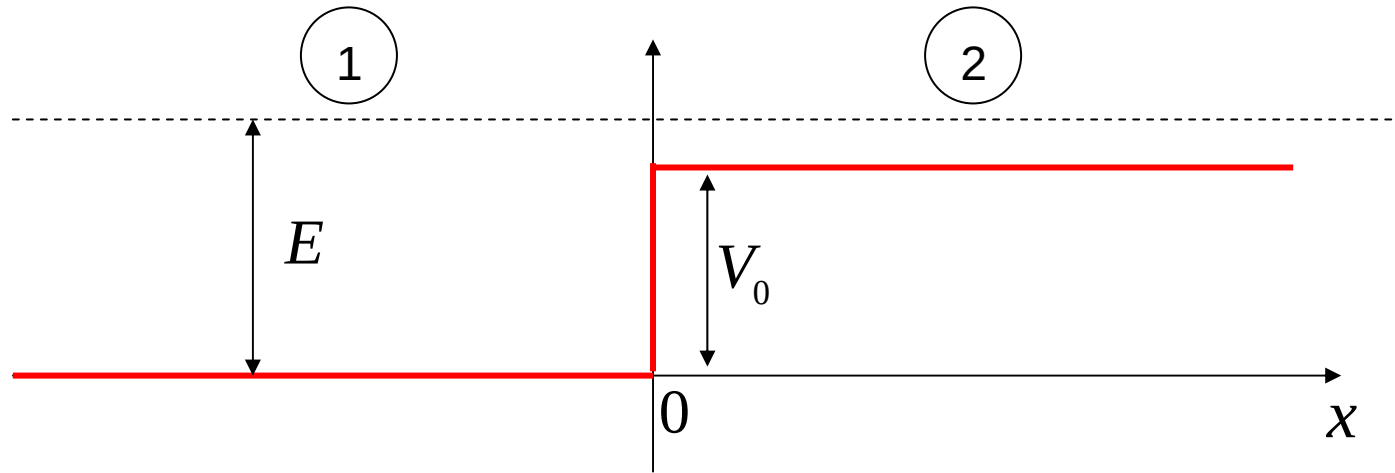
$$k = \frac{2\pi\sqrt{2mK}}{h}$$

$$p = \hbar k \quad ; \quad K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$



$$k^2 = \frac{2mK}{\hbar^2} \rightarrow k = \frac{\sqrt{2mK}}{\hbar} = \frac{2\pi\sqrt{2mK}}{h}$$

2) O potencial degrau



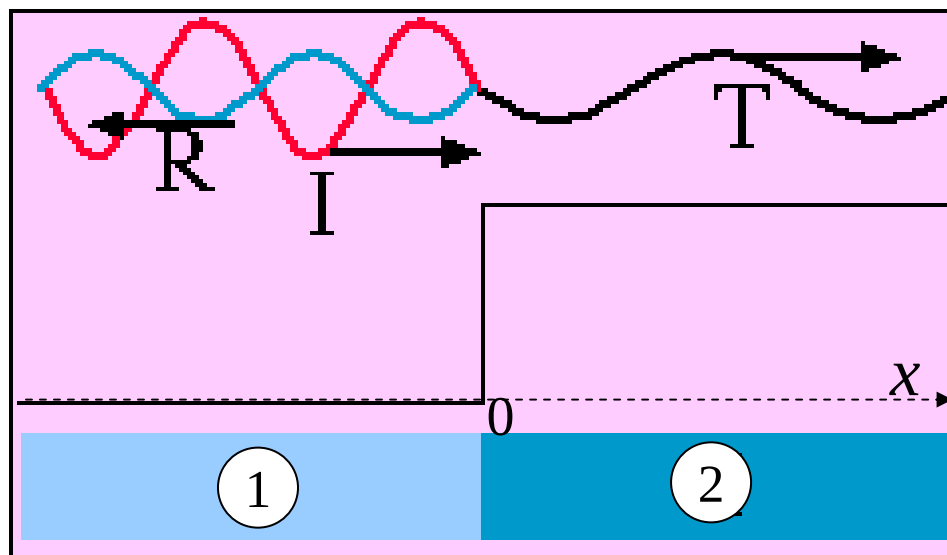
I) $E > V_0$:

① se $x < 0$; $\frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} + k_1^2 \varphi_1(x) = 0$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② se $x > 0$; $\frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} + k_2^2 \varphi_2(x) = 0$; onde $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$

2) O potencial degrau

$$E > V_0:$$



Soluções gerais:

① $x < 0$: $\varphi_1(x) = \underbrace{A \exp(ik_1 x)}_{\text{I}} + \underbrace{B \exp(-ik_1 x)}_{\text{R}}$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② $x > 0$: $\varphi_2(x) = \underbrace{C \exp(ik_2 x)}_{\text{T}} + \underbrace{D \exp(-ik_2 x)}_{\text{R}}$; onde $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$

mas : $D = 0$, pois não há onda refletida para $x > 0$.

2) O potencial degrau

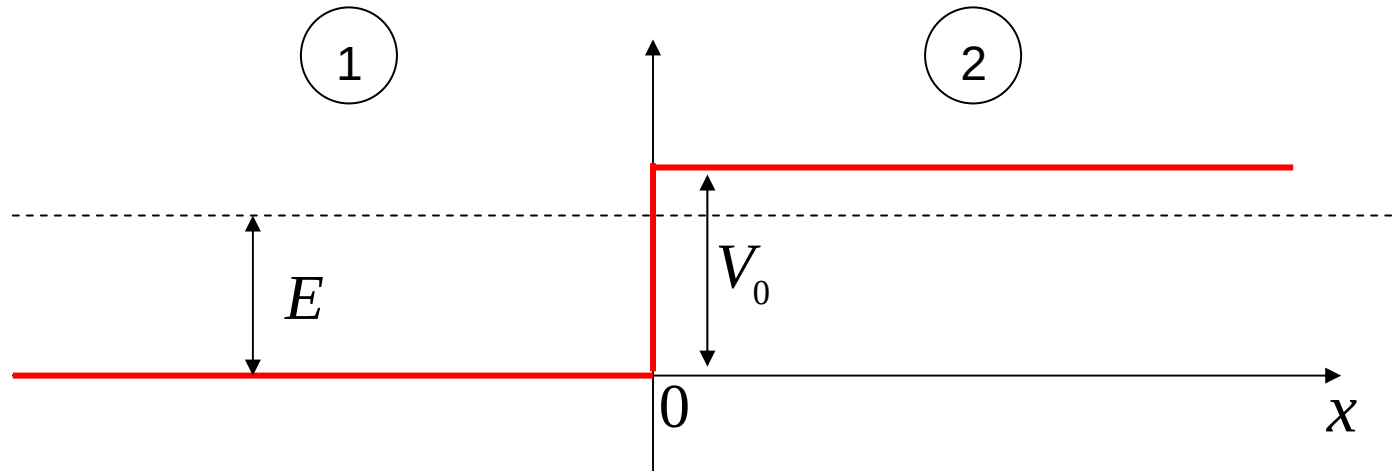
Como ψ e $\frac{d\psi}{dx}$ são funções contínuas $\rightarrow \begin{cases} \psi|_{x \rightarrow 0^+} = \psi|_{x \rightarrow 0^-} \\ \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0^+} = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0^-} \end{cases}$

daí: $\begin{cases} \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} & ; \text{amplitude de reflexão} \\ \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} & ; \text{amplitude de transmissão} \end{cases}$

$$J_{\text{inc}} = |A|^2 v_1, \quad J_{\text{ref}} = -|B|^2 v_1, \quad J_{\text{trans}} = |C|^2 v_2 \quad \text{onde } v_i = \frac{\hbar k_i}{m}$$

$$\left. \begin{aligned} R &= -\frac{J_{\text{ref}}}{J_{\text{inc}}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \\ T &= \frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{R + T = 1}$$

2) O potencial degrau



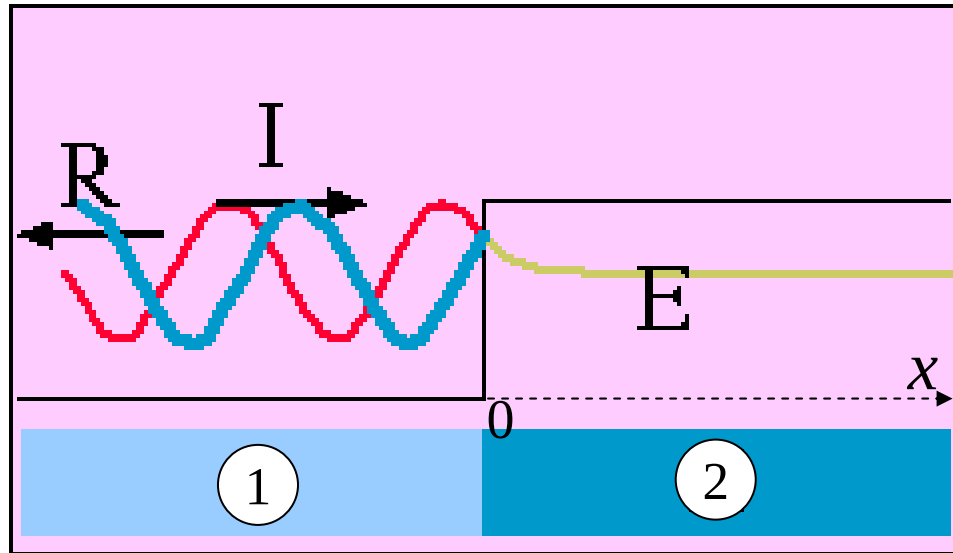
II) $E < V_0$:

① se $x < 0$; $\frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} + k_1^2 \varphi_1(x) = 0$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② se $x > 0$; $\frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} - \kappa_2^2 \varphi_2(x) = 0$; onde $\kappa_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

2) O potencial degrau

$$E < V_0 :$$



① $x < 0 :$ $\varphi_1(x) = A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x)$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② $x > 0 :$ $\varphi_2(x) = C \exp(-\kappa_2 x) + D \exp(\kappa_2 x)$; onde: $\kappa_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

0

2) O potencial degrau

Como ψ e $\frac{d\psi}{dx}$ são funções contínuas $\rightarrow \begin{cases} \psi|_{x \rightarrow 0^+} = \psi|_{x \rightarrow 0^-} \\ \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0^+} = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0^-} \end{cases}$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - i\kappa_2}{k_1 + i\kappa_2} = \exp(-2i\eta) \quad , \quad \eta = \tan^{-1}\left(\frac{\kappa_2}{k_1}\right) ; \text{ amplitude de reflexão}$$

$$J_{\text{inc}} = |A|^2 v_1 \quad , \quad J_{\text{ref}} = -|B|^2 v_1 \quad , \quad \text{onde } v_i = \frac{\hbar k_i}{m}$$

$$R = -\frac{J_{\text{ref}}}{J_{\text{inc}}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1 \quad ; \quad T = 0$$

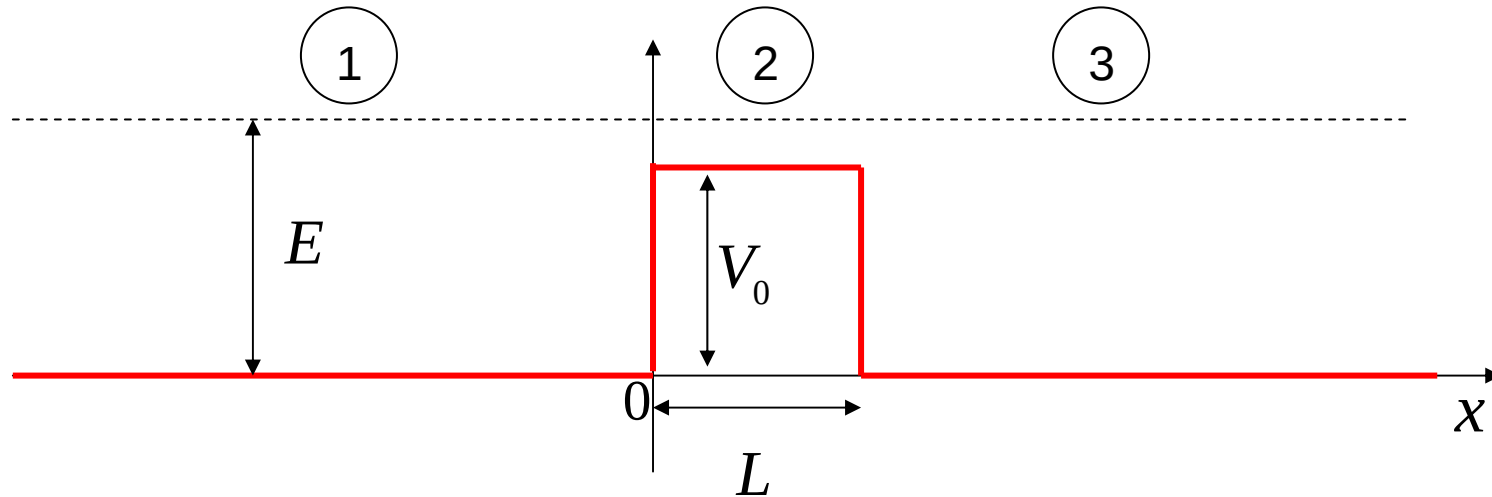
$$\varphi_2(x) = C \exp(-\kappa_2 x) \Rightarrow$$

$$\lambda = \kappa_2^{-1} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Comprimento de penetração

wavemechanics-step

3) A barreira de potencial



I) $E > V_0$:

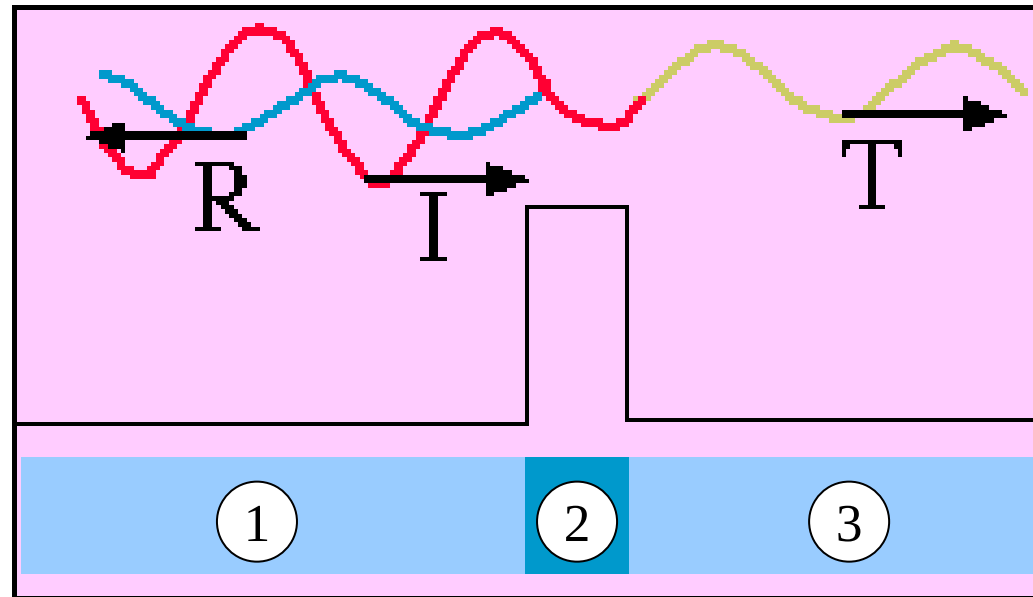
① se $x < 0$; $\frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} + k_1^2 \varphi_1(x) = 0$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② se $L > x > 0$; $\frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} + k_2^2 \varphi_2(x) = 0$; onde $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$

③ se $x > L$; $\frac{d^2 \varphi_3(x)}{dx^2} + k_3^2 \varphi_3(x) = 0$; onde $k_3^2 = k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

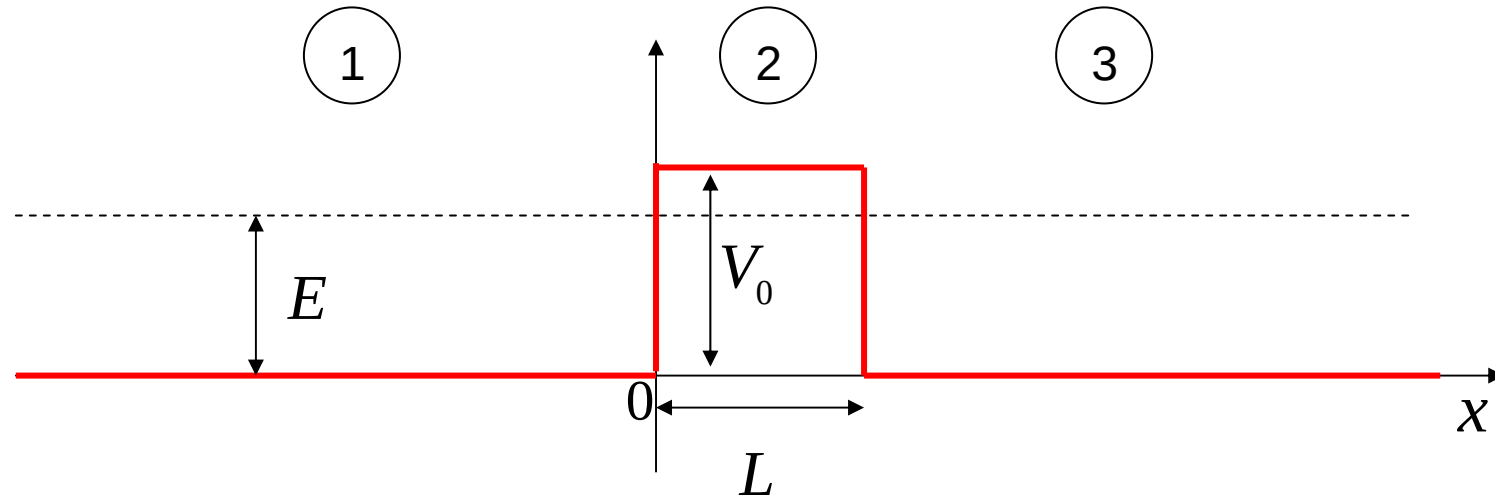
3) A barreira de potencial

$E > V_0 :$



- ① $\varphi_1(x) = A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x)$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
- ② $\varphi_2(x) = C \exp(ik_2 x) + D \exp(-ik_2 x)$; onde $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$
- ③ $\varphi_3(x) = E \exp(ik_3 x) + \cancel{F \exp(-ik_3 x)}$; onde $k_3^2 = k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
↓
0

3) A barreira de potencial



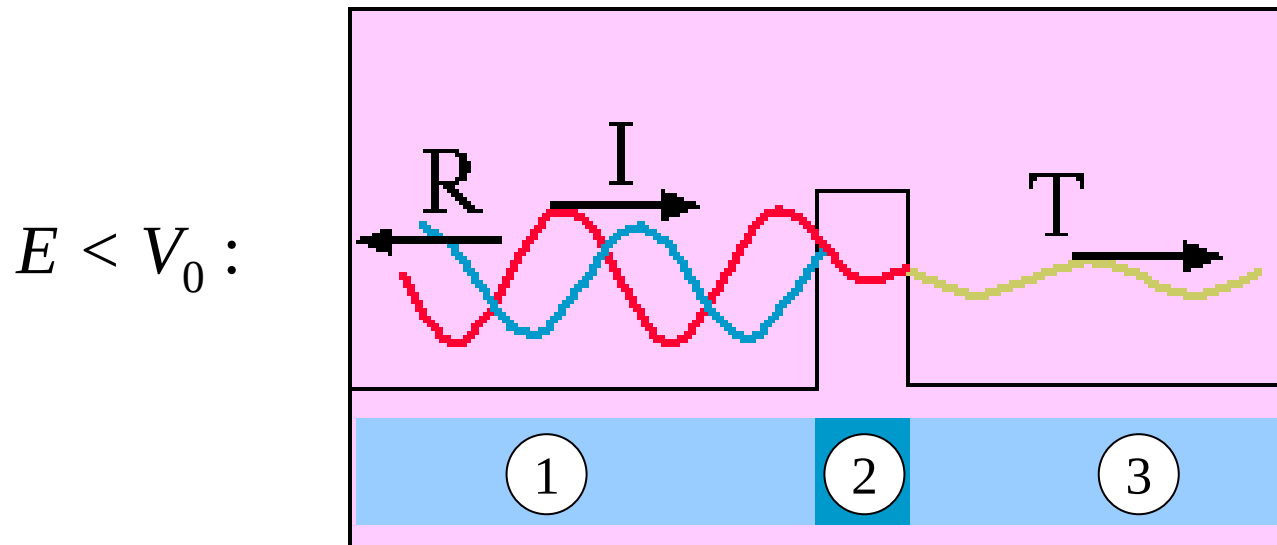
II) $E < V_0$:

① se $x < 0$; $\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + k_1^2\varphi_1(x) = 0$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② se $L > x > 0$; $\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} - \kappa_2^2\varphi_2(x) = 0$; onde $\kappa_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

③ se $x > L$; $\frac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2} + k_3^2\varphi_3(x) = 0$; onde $k_3^2 = k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

3) A barreira de potencial



① $\varphi_1(x) = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x)$; onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

② $\varphi_2(x) = C \exp(-\kappa_2x) + D \exp(\kappa_2x)$; onde $\kappa_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

③ $\varphi_3(x) = E \exp(ik_3x) + \cancel{F \exp(-ik_3x)}$; onde $k_3^2 = k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

0

3) A barreira de potencial

Como ψ e $\frac{d\psi}{dx}$ são funções contínuas $\rightarrow \begin{cases} \psi|_{x \rightarrow 0^+} = \psi|_{x \rightarrow 0^-} \\ \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0^+} = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0^-} \end{cases}$

Coeficiente de transmissão ou taxa de tunelamento:

$$T \approx \exp(-2\kappa L) \quad ; \quad \text{onde} \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$R = 1 - T = 1 - \exp(-2\kappa L)$$

Coeficiente de reflexão



Prob. 3:

- a)** Um feixe de prótons de 5,0 eV incide em uma barreira de energia potencial de 6,0 eV de altura e 0,70 nm de largura, com uma intensidade correspondente a uma corrente elétrica de 1000 A. Quanto tempo é preciso esperar (em média) para que um próton atravesse a barreira?
- b)** Quanto tempo é preciso esperar se o feixe contém elétrons em vez de prótons?

a) Taxa de incidência de prótons: $r = 1000(\text{C/s}) / 1,6 \times 10^{-19}(\text{C}) \approx 6,25 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}$

No tempo de espera t^* para 1 próton tunelar: $r t^* T = 1$; $T \approx \exp(-2\kappa L)$

$$t^* = \frac{1}{r} \exp\left(2L \sqrt{\frac{8\pi^2 m_p (V_b - E)}{h^2}}\right) = \frac{1}{6,25 \times 10^{23} (\text{s}^{-1})} \exp\left(\frac{2\pi (0,70 \text{ nm})}{1240 (\text{eV} \cdot \text{nm})} \sqrt{8 (938 \text{ MeV})(6 \text{ eV} - 5 \text{ eV})}\right)$$

$$t^* \approx 3,37 \times 10^{111} \text{ s} \approx 10^{104} \text{ anos} \quad (\text{maior que a idade do universo !})$$

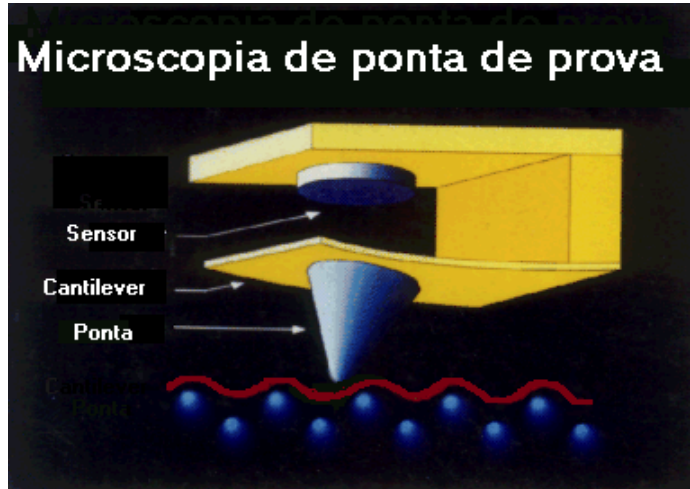
b) Feixe de elétrons: $m_e = 0.511 \text{ MeV} / c^2$

$$t_e^* = \frac{1}{6,25 \times 10^{23} (\text{s}^{-1})} \exp\left(\frac{2\pi (0,70 \text{ nm})}{1240 (\text{eV} \cdot \text{nm})} \sqrt{8 (0.511 \text{ MeV})(6 \text{ eV} - 5 \text{ eV})}\right)$$

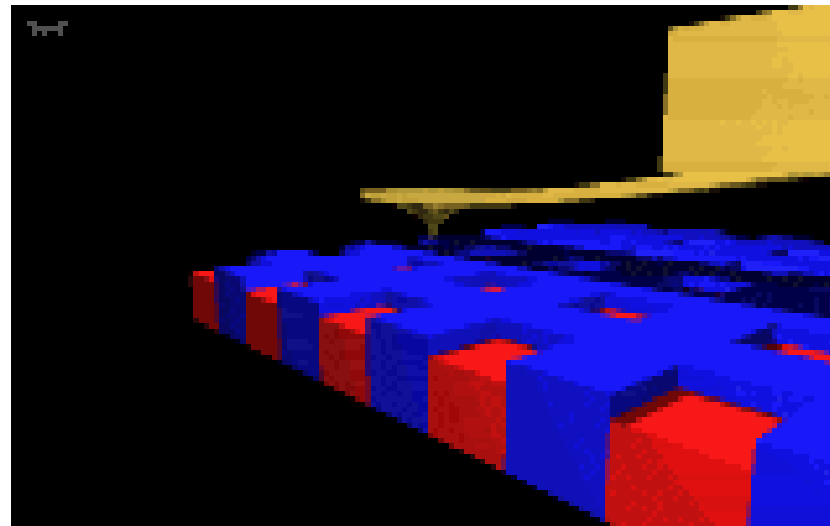
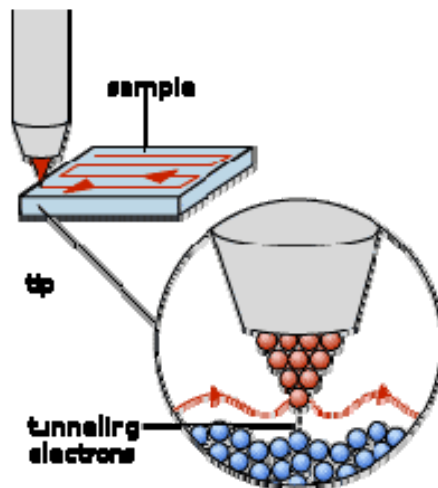
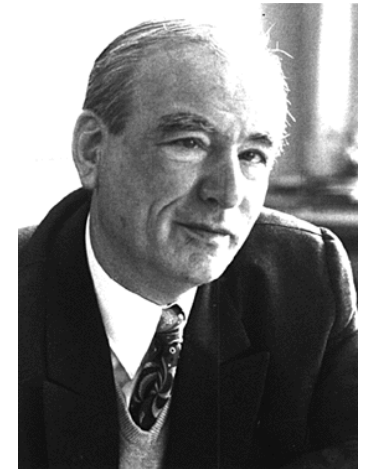
$$t_e^* \approx 2.1 \times 10^{-9} \text{ s} !$$

onde: $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$; $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$
 $hc = 1240 \text{ eV nm}$

O microscópio de varredura por tunelamento (STM)



Nobel Laureates 1986:
Heinrich Rohrer , Gerd
Binnig e Ernst Ruska



wavemechanics-stm