



# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## Escola de Engenharia de Lorena – EEL

### *“LOB1053 - FÍSICA III”*

*Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior*

*Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)*

*Escola de Engenharia de Lorena (EEL)*

*Universidade de São Paulo (USP)*

*Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970*

*[durval@demar.eel.usp.br](mailto:durval@demar.eel.usp.br)*

Rodovia Itajubá-Lorena, Km 74,5 - Caixa Postal 116  
CEP 12600-970 - Lorena - SP  
Fax (12) 3153-3133  
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

**USP Lorena**  
**[www.eel.usp.br](http://www.eel.usp.br)**

Polo Urbo-Industrial Gleba AI-6 - Caixa Postal 116  
CEP 12600-970 - Lorena - SP  
Fax (12) 3153-3006  
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

**UNIDADE 7 –**

**O CAMPO  
MAGNÉTICO**

# Campo magnético

## Introdução:

Há mais de 2000 anos, os gregos sabiam da existência de um certo tipo de pedra (hoje chamada de **magnetita**) **que atraía pedaços de ferro (limalhas)** .

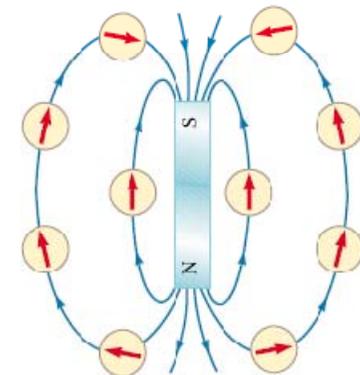
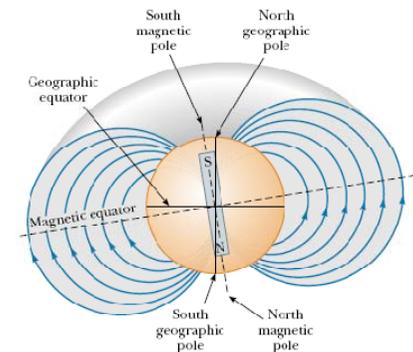
Em 1269, Pierre de Maricourt descobriu que uma agulha liberada em vários pontos sobre um ímã natural esférico orientava-se ao longo de linhas que passavam através de pontos nas extremidades diametralmente opostas da esfera. Ele chamou esses pontos de **pólos do ímã**.

Em seguida, vários experimentos verificaram que todos os ímãs de qualquer forma possuíam **dois pólos**, chamados de pólos **norte e sul**. Foi observado também que **pólos iguais** de dois ímãs **se repelem** e **pólos diferentes se atraem mutuamente**.

# Campo magnético

Em 1600, William Gilbert descobriu que a **Terra era um ímã natural** com **pólos magnéticos próximos aos pólos norte e sul geográficos**. Uma vez que o pólo norte de uma agulha imantada de uma bússola aponta na direção do pólo sul de um ímã, o que é denominado **pólo norte da Terra**, é na realidade, **um pólo sul magnético**.

Embora as cargas elétricas e os pólos magnéticos sejam similares em vários aspectos, existe uma importante diferença entre eles: **os pólos magnéticos sempre ocorrem aos pares**. Quando um ímã é dividido ao meio, **pólos iguais e opostos aparecem em cada lado do ponto de quebra**. Isso resulta em dois ímãs, cada um com um pólo norte e um pólo sul.



# Força exercida por um campo magnético

## Definição do vetor indução magnética $\vec{B}$ :

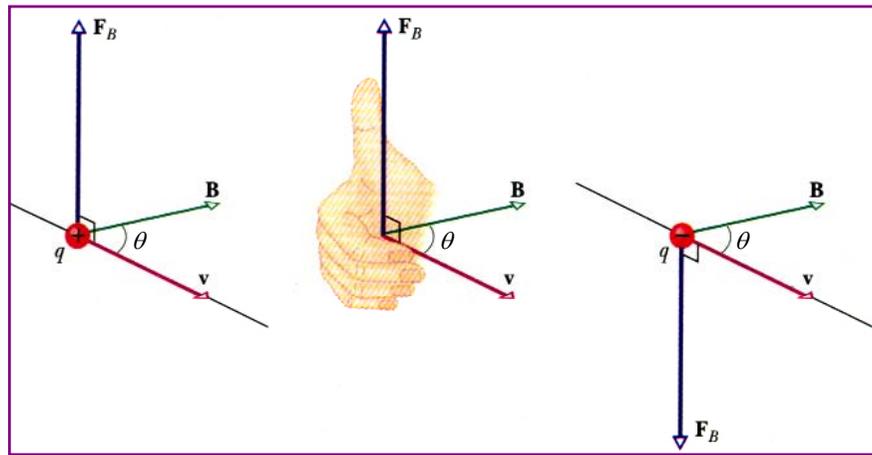
A existência de um campo magnético em uma dada região pode ser demonstrada com uma agulha de bússola. Esta se alinhará na direção do campo. Por outro lado, quando uma partícula carregada com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$  entra em uma região onde existe um campo magnético  $\vec{B}$ , esta partícula é desviada transversalmente de sua trajetória sob ação de uma força magnética que é proporcional à carga da partícula, à velocidade, à intensidade do campo magnético e ao seno do ângulo entre a velocidade e a direção do campo.

Surpreendente ainda é o fato de que esta força é perpendicular tanto à velocidade quanto ao campo magnético.

# Força exercida por um campo magnético

A força de Lorentz:

$$F = qvB \sin \theta \Rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

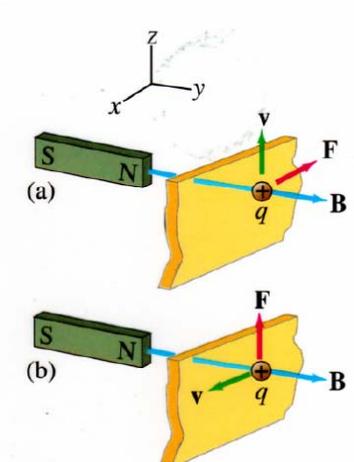


A partir da equação (1), define-se o *vetor Indução Magnética*  $\vec{B}$ :

$$B = \frac{F_{mag}}{|q| v \sin \theta} \Rightarrow \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{1\text{N}}{\text{A.m}} \equiv \text{T (Tesla)},$$

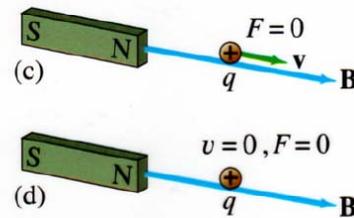
**Unidade de uso freqüente : gauss (G) ;  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$**

# Força exercida por um campo magnético

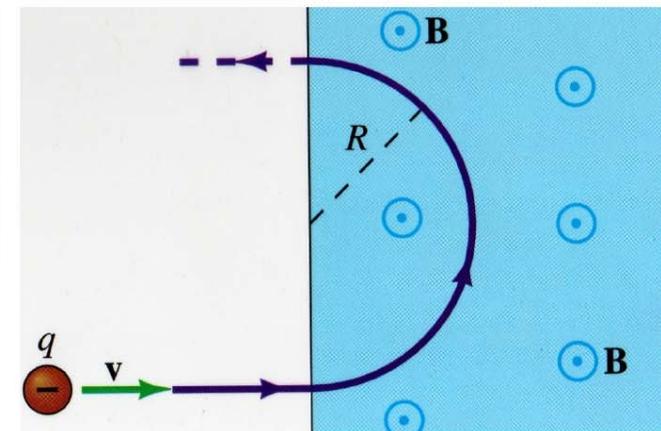
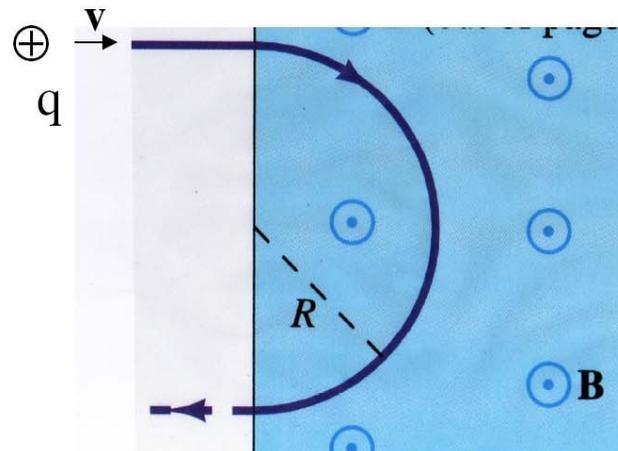
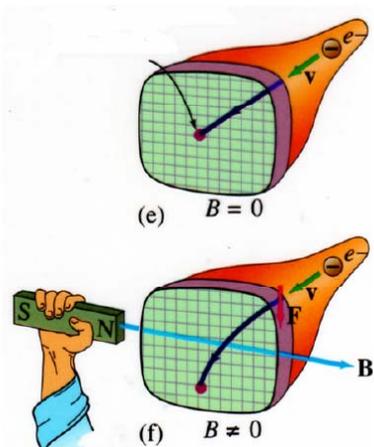


⊗ **B** entrando  
 ⊙ **B** saindo

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F = |q| v B \sin \theta = |q| v B$$

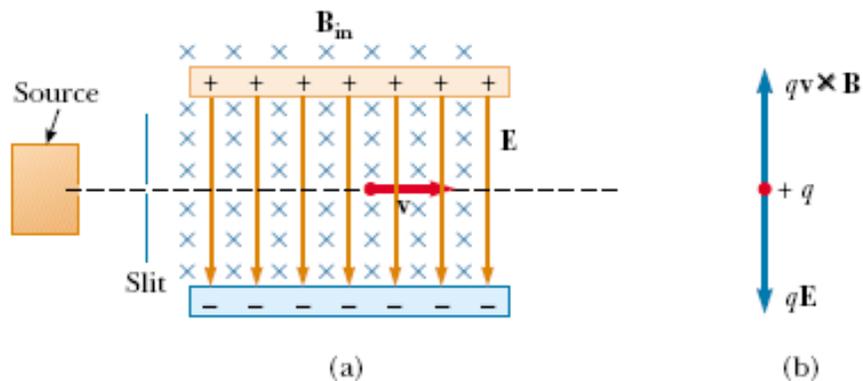


$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F = |q| v B \sin \theta = 0$$



# Movimento de uma partícula carregada em um campo magnético

## Filtro de velocidades/Campos cruzados



Uma partícula de carga  $q > 0$  entra numa região do espaço entre as placas de um capacitor onde existem um campo elétrico e um campo magnético perpendicular (como o produzido por um ímã). A força total sobre a partícula é:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se a carga da partícula é negativa, as forças elétrica e magnética são invertidas. As duas forças se equilibram (e, portanto, a partícula não sofre desvio) se  $qE = qvB$ , ou:

$$v = \frac{E}{B} \quad (\text{filtro de velocidades})$$

# Efeito Hall

Um condutor achatado conduz uma corrente na direção  $x$  e um campo magnético é aplicado na direção  $y$ . A corrente pode ser devida tanto a portadores **positivos** movendo-se para **direita** como portadores **negativos** movendo-se para a **esquerda**.

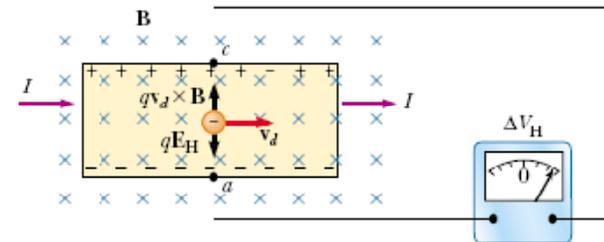
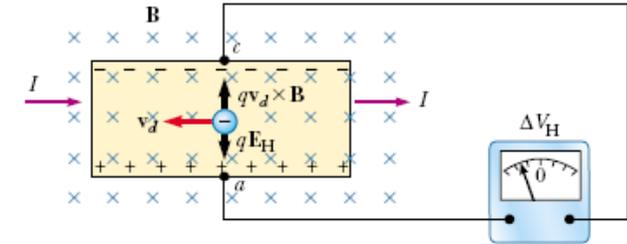
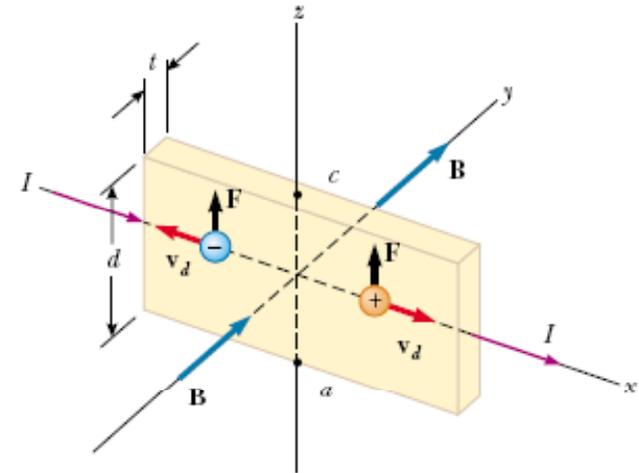
Medindo-se a **ddp de Hall** entre os pontos  $a$  e  $c$ , pode-se determinar o **sinal** e a **densidade volumétrica** ( $n$ ) dos portadores.

$$F_B = qv_d B = qE_H \Rightarrow E_H = v_d B$$

$$v_d = \frac{E_H}{B} = \frac{J}{nq} = \frac{i}{nqA} \Rightarrow$$

$$n = \frac{iB}{E_H qA} = \frac{iB}{E_H qtd} = \frac{iB}{V_H qt}$$

$A = td$ , onde  $t$  é a espessura do condutor.



# Exemplo

Por uma placa de prata com espessura de 1mm passa uma corrente de  $2,5 \text{ A}$  em uma região na qual existe campo magnético uniforme de módulo  $1,25 \text{ T}$  perpendicular à placa. A **tensão Hall** é medida como  $0,334 \mu\text{V}$ . Calcule:

- a) a densidade de portadores;
- b) compare a resposta anterior com a densidade dos átomos na prata, que possui uma massa específica  $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$  e massa molar  $M = 107,9 \text{ g/mol}$ .

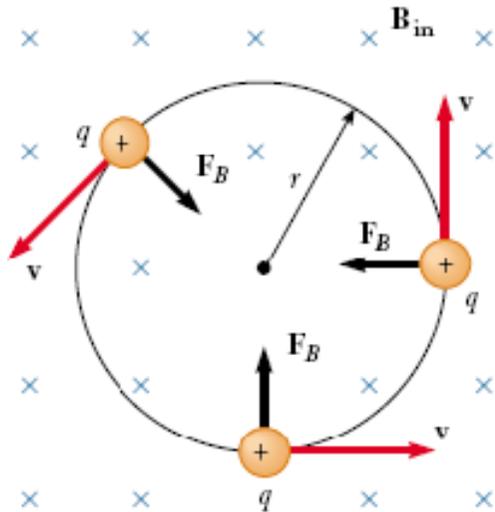
Solução:

$$\text{a) } n = \frac{iB}{qV_H t} = \frac{(2,5\text{A})(1,25\text{T})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3,34 \times 10^{-7} \text{ V})(0,001\text{m})} = 5,85 \times 10^{28} \text{ elétrons/m}^3$$

$$\text{b) } n_a = \rho \frac{N_A}{M} = (10,5\text{g/cm}^3) \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{107 \text{ g/mol}} = 5,86 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

Esses resultados indicam que o número de portadores de carga na prata é muito próximo de um por átomo.

# Movimento de uma partícula carregada em um campo magnético



$$F_B = ma \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{r} \quad \text{ou} \quad r = \frac{mv}{qB}$$

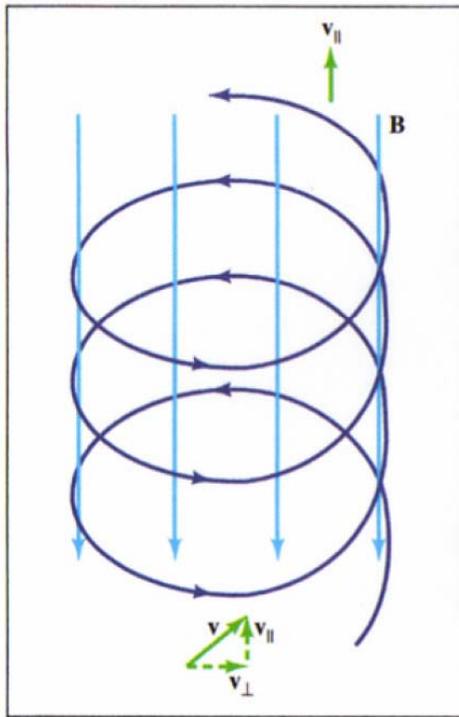
O período do movimento circular é o tempo que a partícula leva para se deslocar uma vez ao longo do perímetro do círculo.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m v}{v q B} = \frac{2\pi m}{q B}$$

A frequência do movimento circular, chamada de *frequência de ciclotron*, é o inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{qB}{m}$$

# Movimento de uma partícula carregada em um campo magnético



(a)

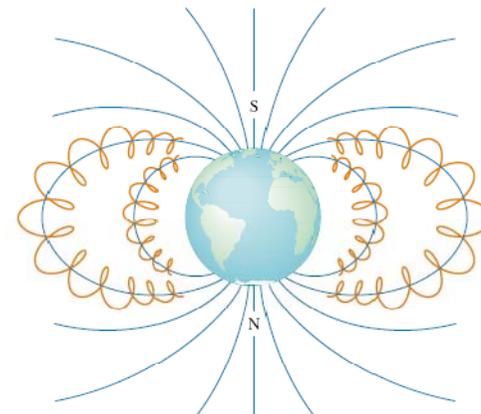
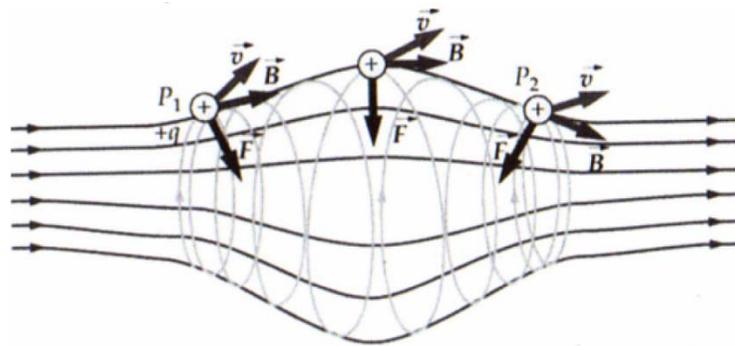
Suponha, agora, que uma partícula carregada entra em um campo magnético com uma **velocidade que não é perpendicular a  $\vec{B}$** . Não existe componente de força na direção paralela a  $\vec{B}$ , e, portanto, **componente da velocidade nesta direção permanece constante**. A força magnética sobre a partícula **é perpendicular a  $\vec{B}$** , então a variação no movimento da partícula devida a essa força é a mesma discutida antes. Resulta que a trajetória da partícula é **helicoidal**, como mostrada na figura.

# Movimento de uma partícula carregada em um campo magnético

## Garrafa Magnética:

Quando uma partícula carregada se move em um campo magnético não uniforme, que é forte em ambas as extremidades e fraco no meio, ela fica aprisionada e se desloca para frente e para trás em uma trajetória espiral em torno das linhas de campo.

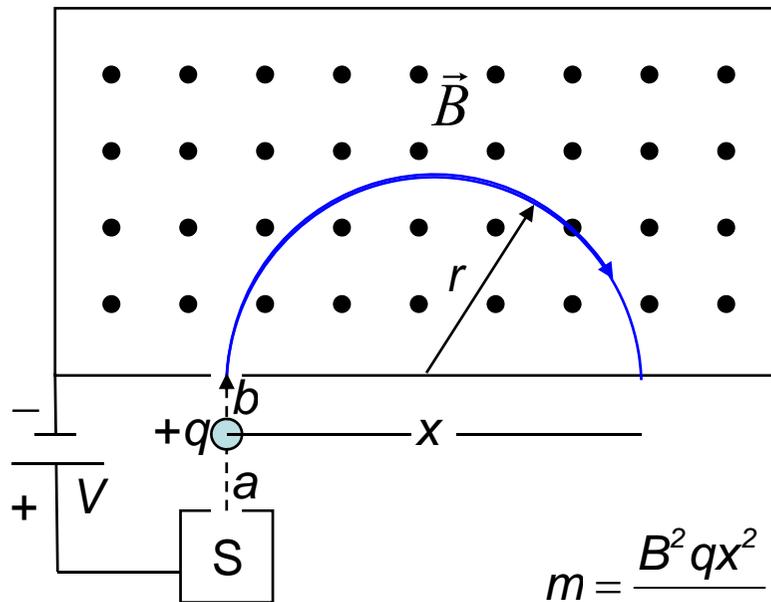
Desta maneira, elétrons e prótons ficam aprisionados pelo campo magnético terrestre não-uniforme, formando *os cinturões de radiação de Van Allen*.



# Espectrômetro de massa

Ex. 44, pg. 191, Halliday  
Física 3 (4ª Ed.).

A figura mostra o esboço de um espectrômetro de massa, que serve para medir a massa de um íon. Este, de massa  $m$  e carga  $q$ , é produzido na fonte  $S$  e acelerado pelo campo elétrico devido a uma diferença de potencial  $V$ . O íon entra em uma câmara separadora na qual existe um campo  $\vec{B}$  uniforme e perpendicular à trajetória do íon. Suponha:  $B = 80\text{mT}$ ,  $V = 1000\text{V}$  e que os íons de carga  $q = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$  atinjam a placa fotográfica, na câmara, em  $x = 1,625\text{m}$ . Qual a massa  $m$  dos íons?



$$U_a + K_a = U_b + K_b \Rightarrow K_a = 0, U_b = 0$$

$$U_a = K_b \Rightarrow qV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (1)$$

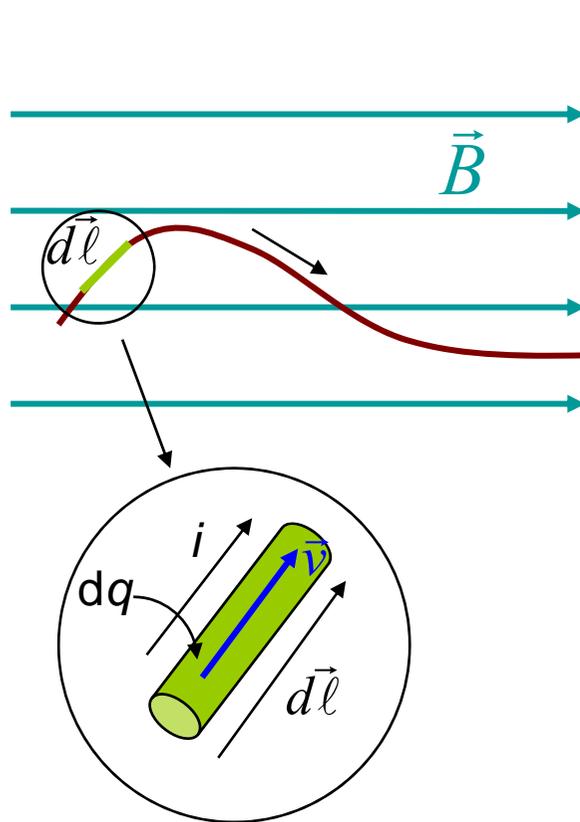
$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

$$x = 2r = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

$$m = \frac{B^2 qx^2}{8V} = \frac{(0,080\text{T})(1,6 \times 10^{-19}\text{C})(1,625\text{m})^2}{8(1000\text{V})} = 3,38 \times 10^{-25}\text{kg}.$$

$$1u = 1,66 \times 10^{-27}\text{kg} \Rightarrow m = 203,9u$$

# Força magnética sobre um fio com corrente



$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = (idt) \left( \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right) \Rightarrow d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

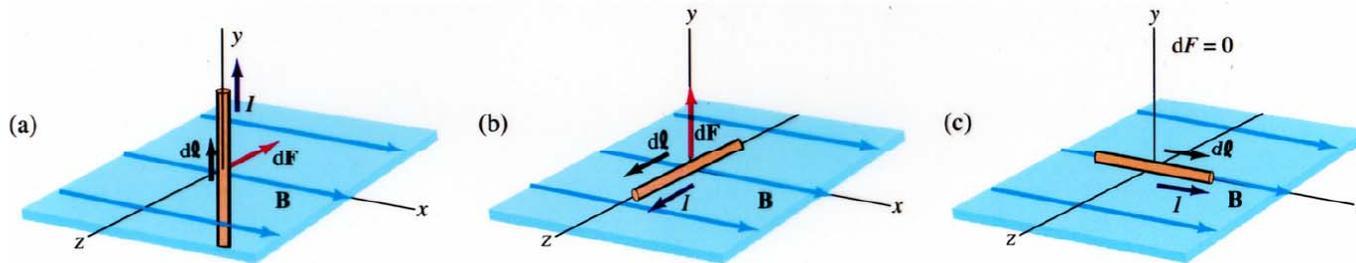
A força infinitesimal pode ser escrita como:

$$dF = i dl B \sin \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção do segmento do fio ( direção da corrente) e a direção do campo magnético. A força sobre o fio é:

$$\vec{F} = \int_{\text{fio}} d\vec{F} = \int_{\text{fio}} i d\vec{l} \times \vec{B}$$

As figuras abaixo mostram três configurações de fios conduzindo correntes.



Para fios finitos devemos ter:

$$\vec{F} = i \vec{L} \times \vec{B}$$

# Exemplos

Ex. 1) Ex. 2, pg. 169, Halliday, Física 3, 4ª edição.

Ex. 2) Balança Magnética, pg. 170-171, Halliday, Física 3, 4ª Edição.

Ex. 3) Ex. 15, pg. 188, Halliday, Física 3, 4ª edição.

Ex. 4) Ex. 17, pg. 188, Halliday, Física 3, 4ª edição.

Ex. 5) Ex. 18, pg. 188, Halliday, Física 3, 4ª edição.

# Exemplo

Um fio curvo na forma de uma espira semicircular de raio  $R$  está em repouso no plano  $xy$ . Por ele passa uma corrente  $I$  de um ponto  $a$  até um ponto  $b$ , como mostra a figura. Existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{k}$  perpendicular ao plano da espira. Encontre a força que atua sobre a parte do fio na forma de espira semicircular.

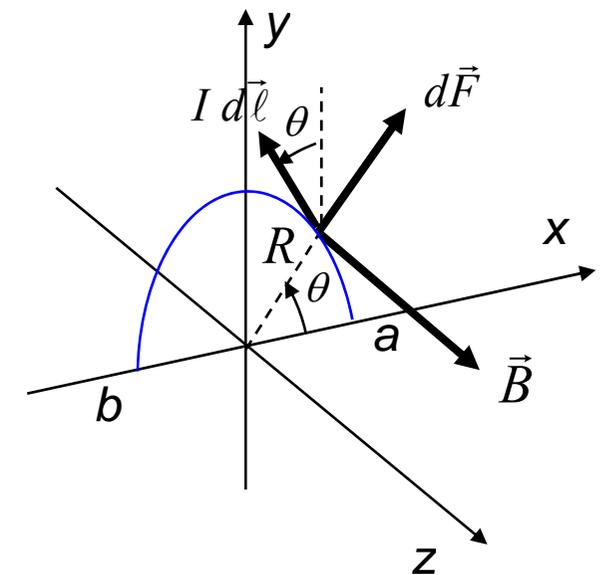
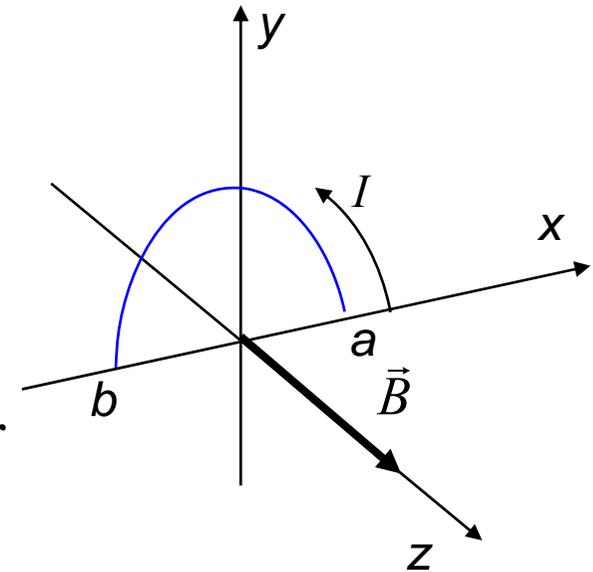
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{l} = -dl \sin \theta \hat{i} + dl \cos \theta \hat{j}, \quad dl = R d\theta$$

$$d\vec{F} = I(-dl \sin \theta \hat{i} + dl \cos \theta \hat{j}) \times B\hat{k}$$

$$d\vec{F} = IRB \sin \theta d\theta \hat{j} + IRB \cos \theta d\theta \hat{i}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = IRB\hat{i} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + IRB\hat{j} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$\vec{F} = IRB(0)\hat{i} + IRB(2)\hat{j} = 2IRB\hat{j}$$



# Exercício - 01

**Questão 1.** Um feixe de elétrons cuja energia cinética é  $K$  emerge de uma estreita janela em forma de lâmina na extremidade de um tubo acelerador. Existe uma placa metálica a uma distância  $d$  desta janela e perpendicular à direção do feixe emergente. Mostre que podemos evitar que o feixe colida contra a placa se aplicarmos um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  de tal forma que

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2 d^2}}$$

Onde  $m$  e  $e$  são a massa e a carga do elétron. Como  $\mathbf{B}$  deveria ser orientado?

## Exercício - 02

**Questão 2.** Um elétron possui velocidade inicial de  $(12,0 \mathbf{j} + 15,0 \mathbf{k})$  km/s e uma aceleração constante de  $(2,0 \times 10^{12} \text{ m/s}^2) \mathbf{i}$  em uma região na qual estão presentes um campo elétrico e um campo magnético uniformes. Se  $\mathbf{B} = (400 \mu\text{T}) \mathbf{i}$ , determine o campo elétrico

## Exercício - 03

**Questão 3.** Um disco uniforme de massa  $m$ , raio  $R$  e densidade de carga superficial  $\sigma$  gira em torno do seu eixo com velocidade angular  $\omega$ . Um campo magnético uniforme de módulo  $B$  atravessa o disco, fazendo um ângulo  $\theta$  com relação ao eixo de rotação do disco. Calcule:

- (a) Calcule o momento de dipolo magnético do disco girante;
- (b) O torque líquido sobre o disco.

## Exercício - 04

**Questão 4.** Uma barra de metal de massa  $m$  se desloca sobre um par de guias condutoras longas e horizontais separadas por uma distância  $L$  e conectados a um dispositivo que fornece uma corrente  $i$  constante para o circuito, conforme figura. Existe um campo magnético  $\mathbf{B}$ , entrando na página.

- (a) Se não há atrito e a barra inicia do repouso em  $t=0$ , mostre que no instante  $t$  a barra tem uma velocidade  $v = (Bil/m) t$ ;
- (b) Em qual sentido a barra vai se mover?
- (c) Se o coeficiente de atrito estático é  $\mu_e$ , encontre o mínimo campo  $\mathbf{B}$  necessário para iniciar o movimento da barra.

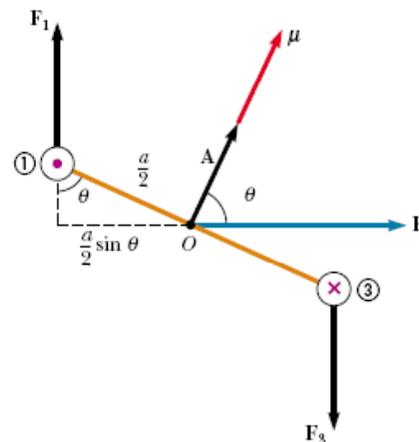
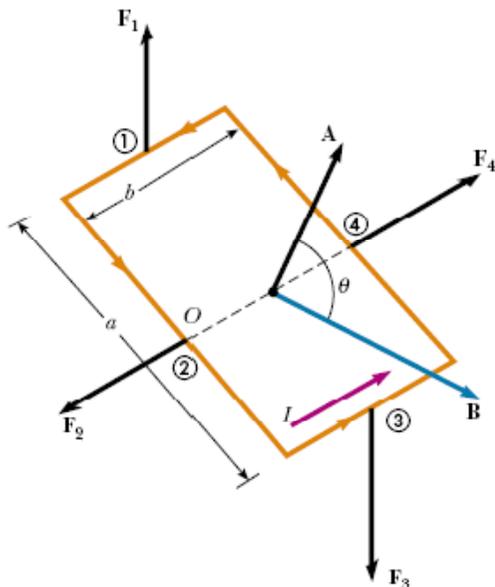
## Exercício - 05

**Questão 5.** Uma espira circular de raio  $R$ , massa  $m$  e corrente  $i$  repousa sobre uma superfície horizontal. Existe um campo magnético horizontal  $\mathbf{B}$ . Qual a máxima corrente  $i$  antes de uma das extremidade ser elevada da superfície?



# Torque em espira com corrente

Uma espira transportando uma corrente **não sofre força líquida** em um **campo magnético uniforme**, mas sim um **torque** que tende a girá-la. Como já vimos antes, a orientação da superfície da espira pode ser descrita convenientemente por um vetor unitário  $\hat{n}$  que é **perpendicular ao plano da espira**. As figuras abaixo mostram as forças exercidas por um campo magnético uniforme sobre uma espira retangular cujo vetor unitário  $\hat{n}$  faz um ângulo  $\theta$  com o vetor indução magnética  $\vec{B}$ . **A força líquida sobre a espira é nula**. As forças  $F_1$  e  $F_3$  possuem mesmo módulo. Estas formam um **binário**, de tal modo que **o torque é o mesmo em torno de qualquer ponto**. Temos:  $F_1 = F_3 = ibB$



**Torque em relação ao ponto O:**

$$\tau = 2F_1 \frac{a}{2} \sin \theta = iaBb \sin \theta = iAB \sin \theta$$

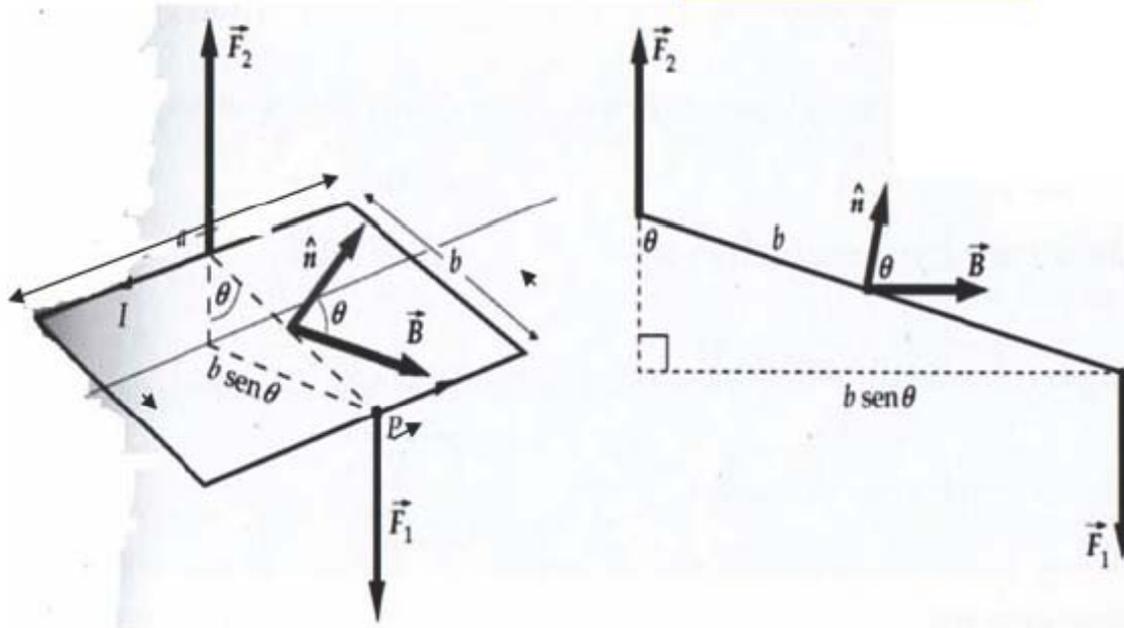
$$A = ab \Rightarrow \tau = NiAB \sin \theta$$

$$\vec{\mu} = NiA\hat{n} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$\vec{\mu}$  → **vetor momento de dipolo magnético da espira**

# Torque em espira com corrente

$$F_1 = F_2 = iaB$$



Torque em relação ao ponto P:

$$\tau = F_2 b \sin \theta = iaBb \sin \theta = iAB \sin \theta$$

$$A = ab \Rightarrow \tau = NiAB \sin \theta$$

vetor momento de dipolo magnético da espira  $\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} = NiA \hat{n} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

# Energia potencial de um dipolo magnético em um campo magnético

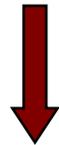
Quando um **dipolo magnético** gira de um ângulo  $d\theta$  a partir de uma dada orientação num campo magnético, um trabalho  $dW$  é realizado sobre o dipolo pelo campo magnético:

$$dW = -\tau d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta$$

$$dU = -dW = +\mu B \sin \theta d\theta$$

$$U = -\mu B \cos \theta + U_0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow U_0 = 0$$



$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

## Exemplo 3

Em um enrolamento quadrado de 12 voltas, de lado igual a **40cm**, passa uma **corrente de 3A**. Ele repousa no *plano xy* na presença de um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 0,3T\hat{i} + 0,4T\hat{k}$

Encontre:

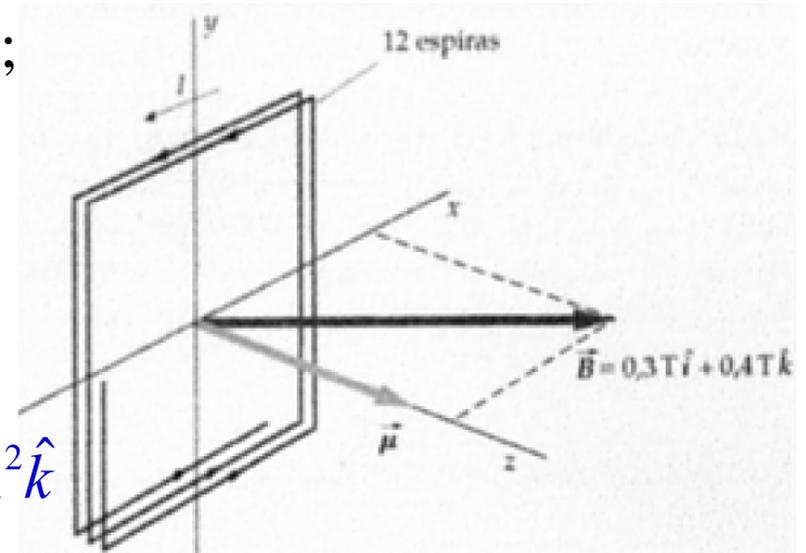
- O momento dipolo magnético do enrolamento;
- O torque exercido sobre o enrolamento;
- A energia potencial do enrolamento.

Solução:

$$a) \vec{\mu} = NiA\hat{k} = (12)(3A)(0,40m^2)\hat{k} = 5,76A.m^2\hat{k}$$

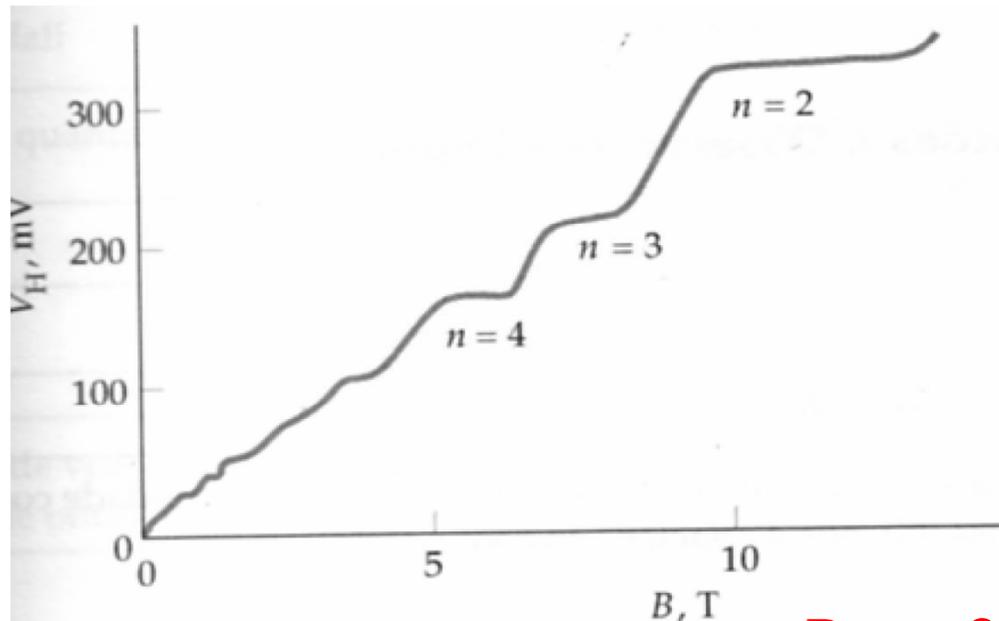
$$b) \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (5,76A.m^2\hat{k}) \times (0,3T\hat{i} + 0,4T\hat{k}) = 1,73N.m\hat{j}$$

$$c) U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -(5,76A.m^2\hat{k}) \cdot (0,3T\hat{i} + 0,4T\hat{k}) = -2,30J$$



# Efeito Hall quântico

O **efeito Hall quântico** (Prêmio Nobel de 1985) é observado em **estruturas semicondutoras especiais**, geralmente com **altos valores de mobilidade e a baixas temperaturas**. No **efeito Hall clássico** a variação da tensão Hall ( $V_H$ ) com o campo magnético é **linear**, enquanto que no **quântico** esta variação resulta numa **série de patamares** como ilustra a figura abaixo.



Na teoria do efeito Hall quântico, a resistência  $R_H$  é definida como:

$$R_H = \frac{V_H}{i} = \frac{R_K}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$R_K = 25.812,807 \Omega.$$

Constante de von Klitzing