



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de Lorena – EEL

“LOB1053 - FÍSICA III”

Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior

Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)

Escola de Engenharia de Lorena (EEL)

Universidade de São Paulo (USP)

Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970

durval@demar.eel.usp.br

Rodovia Itajubá-Lorena, Km 74,5 - Caixa Postal 116
CEP 12600-970 - Lorena - SP
Fax (12) 3153-3133
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

USP Lorena
www.eel.usp.br

Polo Urbo-Industrial Gleba AI-6 - Caixa Postal 116
CEP 12600-970 - Lorena - SP
Fax (12) 3153-3006
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

UNIDADE 4 –

**O POTENCIAL
ELÉTRICO**

A energia potencial elétrica

Analogia gravitacional

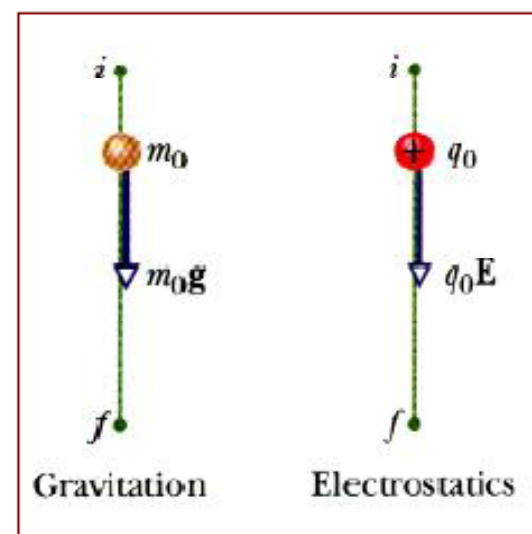
$$U_f - U_i = -W = -\int_i^f m\vec{g} \cdot d\vec{l} = -mgh$$

onde U é a energia potencial associada ao campo da força **gravitacional**.

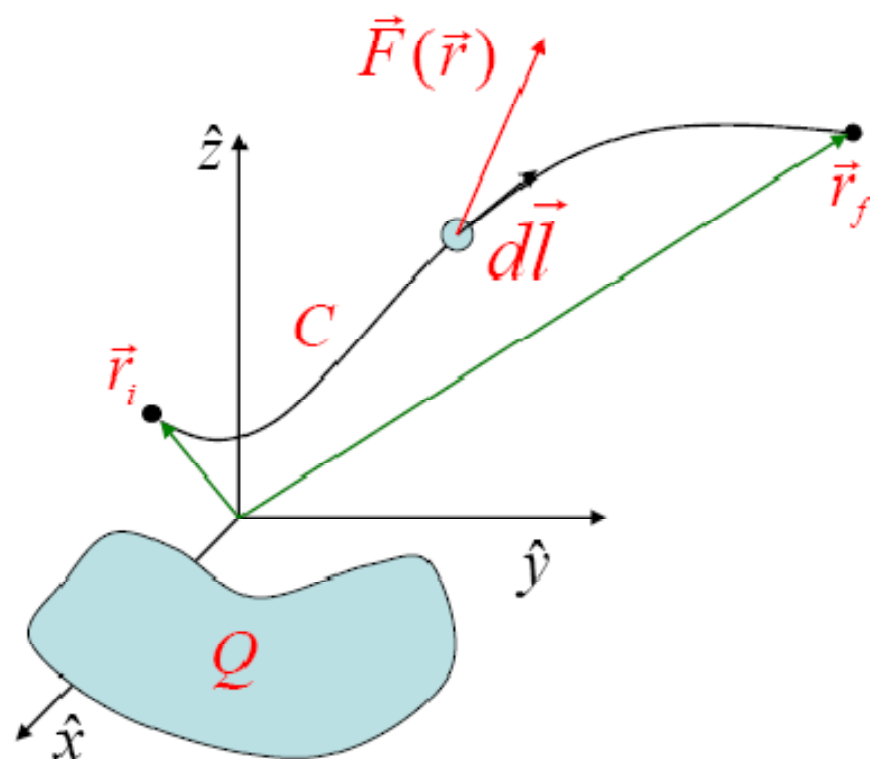
No caso eletrostático, como $\vec{F} = q_0\vec{E}$:

$$U_f - U_i = -W = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

No caso de *forças conservativas (como o nosso)*, o resultado desta integral não depende do caminho de integração, mas apenas dos **pontos inicial e final**.



A energia potencial elétrica



Se a força é devida a uma distribuição finita de cargas, convém tomar $|\vec{r}_i| \rightarrow \infty$ como a configuração de referência tal que

$$U_i = 0$$

Com isto podemos definir *a função energia potencial* $U(\vec{r})$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ou seja,

$U(\vec{r})$ é o *negativo* do trabalho realizado pela *força do campo elétrico* para trazer a partícula com carga q_0 desde o infinito até $\vec{r}$.

O potencial elétrico

É a energia potencial por unidade de carga:

$$V \equiv \frac{U}{q} \longrightarrow \Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q}$$

Note que o potencial elétrico só depende do campo elétrico da distribuição de cargas.

Unidade: *volt = joule/coulomb = J/C*

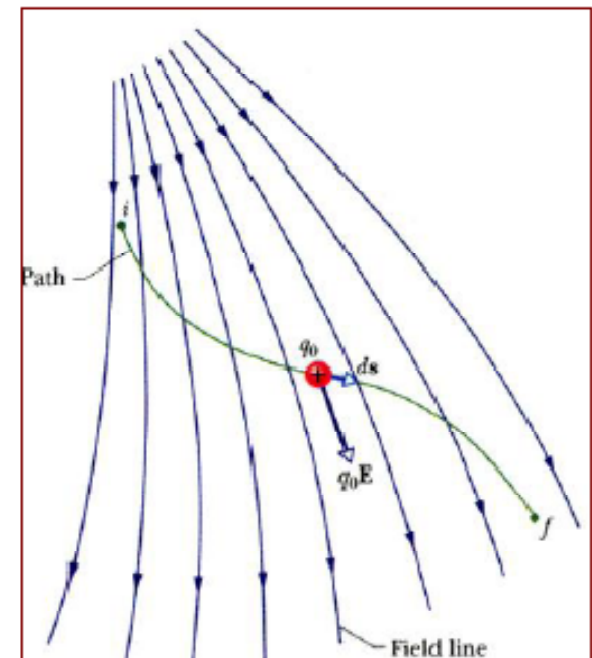
Unidade de energia conveniente para cargas elementares: *1eV = elétron-volt = 1,6 x 10⁻¹⁹ J*

Potencial em função do campo:

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Se escolhermos o infinito como referência:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

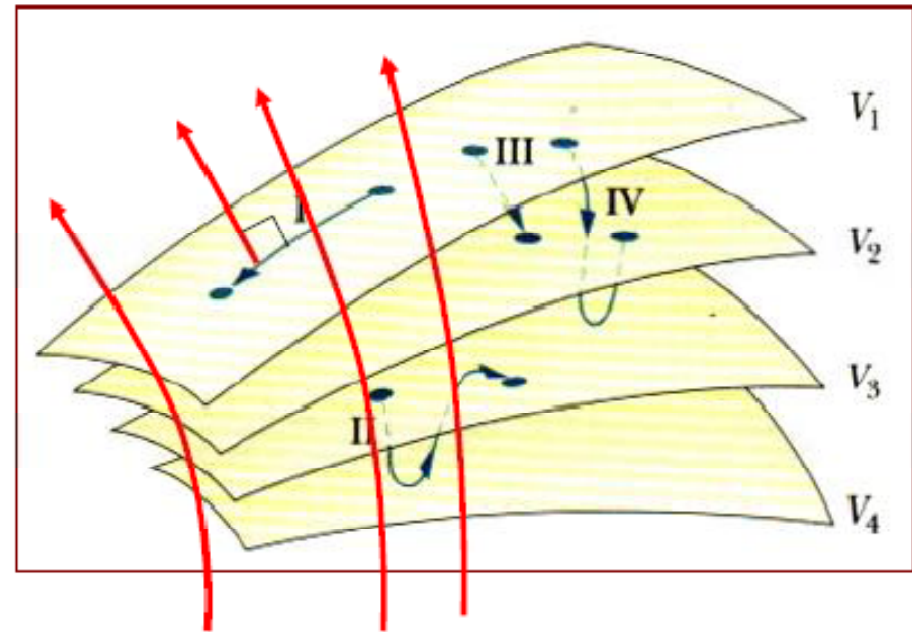


O potencial elétrico

Superfícies equipotenciais

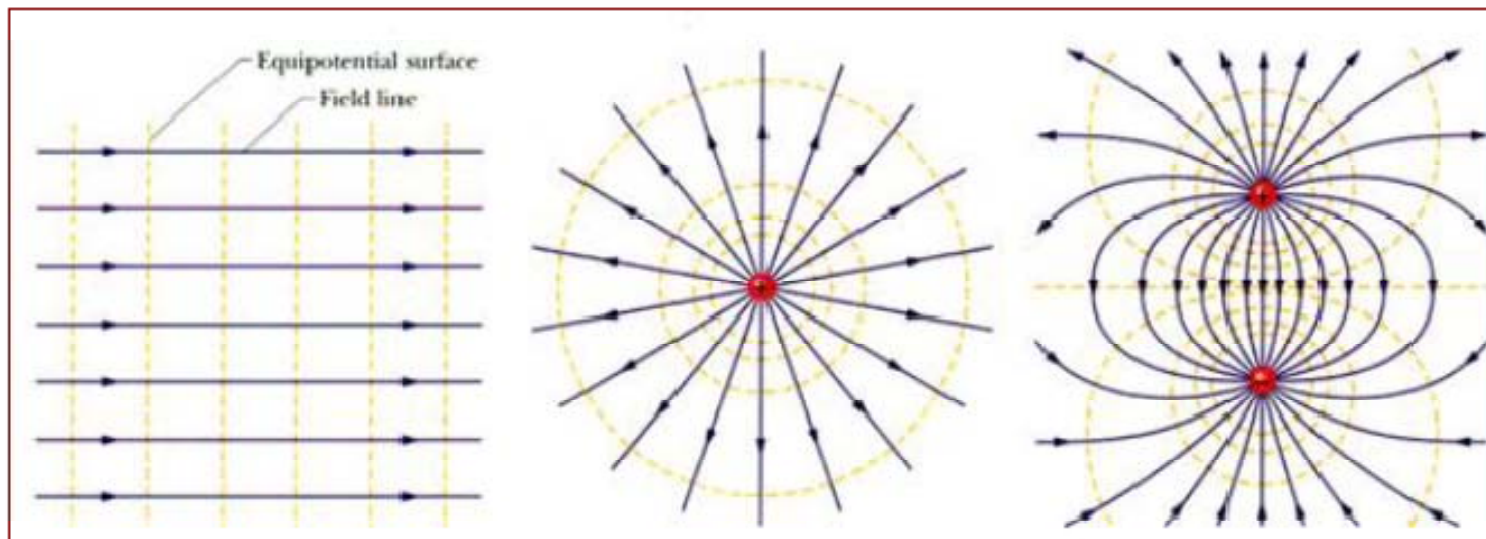
São superfícies em que todos os pontos têm o mesmo potencial.

$$W_I, W_{II}, W_{III} \text{ e } W_{IV} = ?$$



As linhas de $\vec{E}$ são perpendiculares às superfícies equipotenciais.

Por quê?



O potencial elétrico

V de um campo uniforme

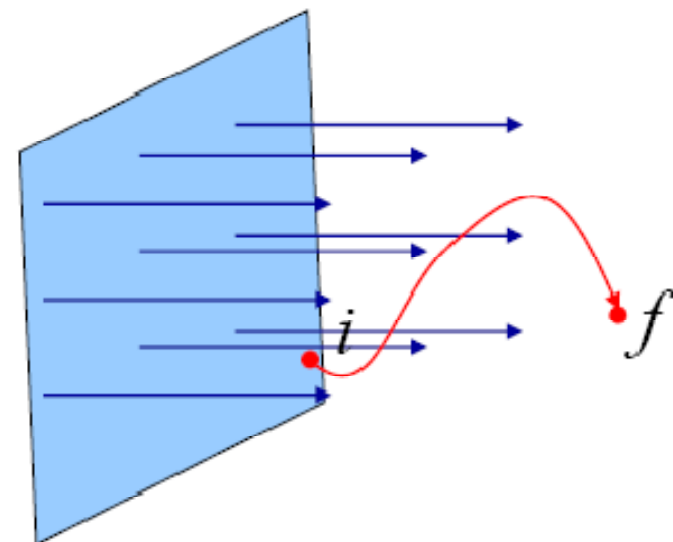
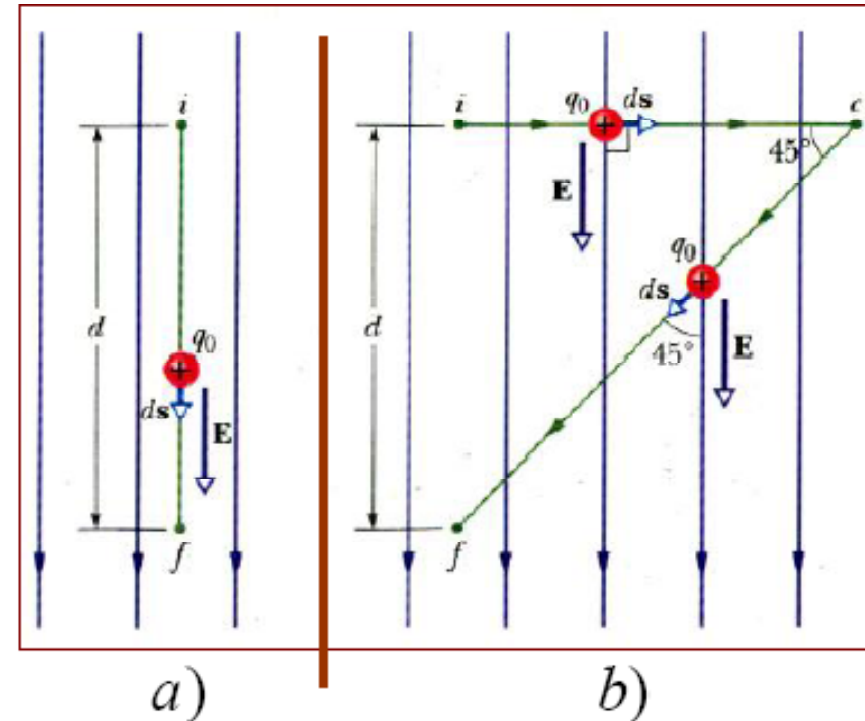
$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

a) $V_f - V_i = -Ed$

b) $V_f - V_i = -Ed$

Vemos que o resultado não depende do caminho da integração.

Portanto, para se calcular V, pode-se sempre escolher o caminho mais simples.



O potencial elétrico

O potencial de uma carga puntiforme

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

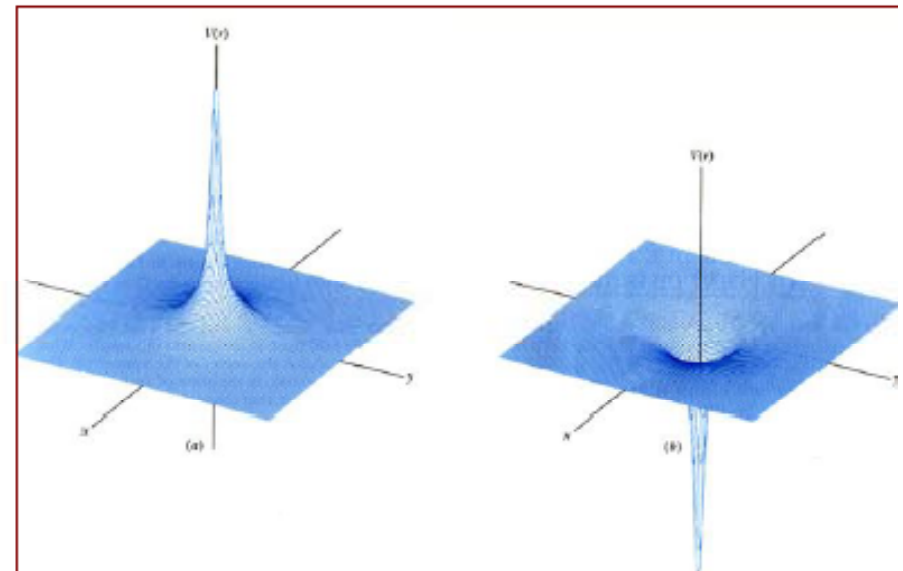
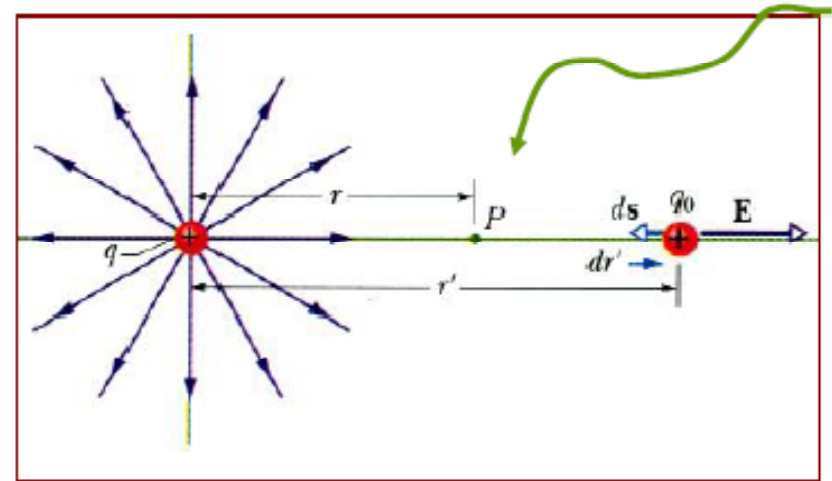
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \longrightarrow \quad V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} E(\vec{r}) dr = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

(Novamente, escolhemos

$V_i = 0$ para $r \rightarrow \infty$)

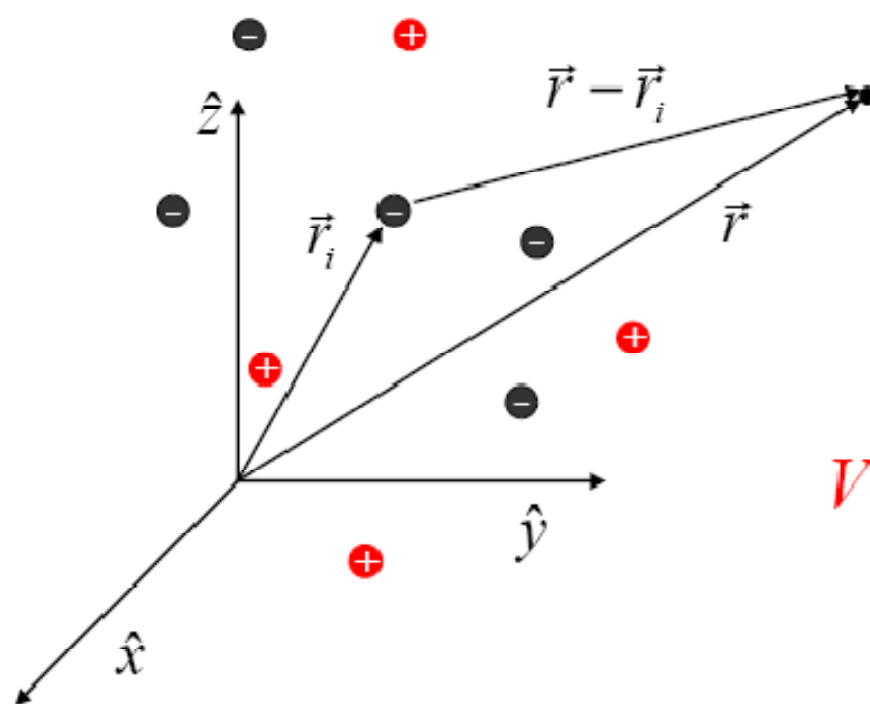
Com isto:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



O potencial elétrico

O potencial de um sistema de cargas puntiformes



$$V_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

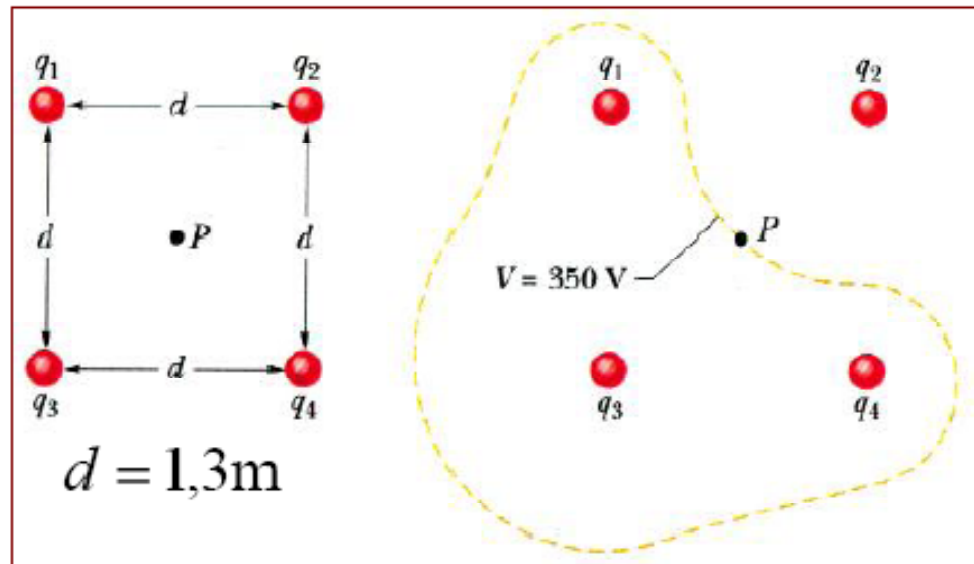


$$V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

(soma escalar!)

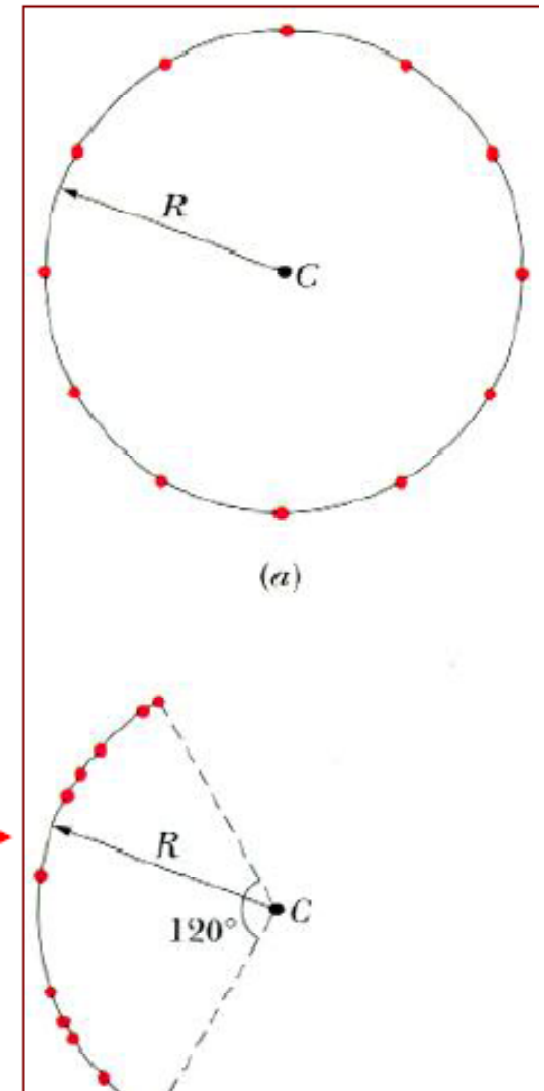
O potencial elétrico

O potencial de um sistema de cargas puntiformes (exemplo)



$q_1 = 12\text{ nC}$
 $q_2 = -24\text{ nC}$
 $q_3 = 31\text{ nC}$
 $q_4 = 17\text{ nC}$
 $V_P = ?$

$q = 12 \times e$
 $V_C = ?$
 $\vec{E}_C = ?$



O potencial elétrico

O potencial de um dipolo elétrico

$$V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{(+)}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{(-)}}$$

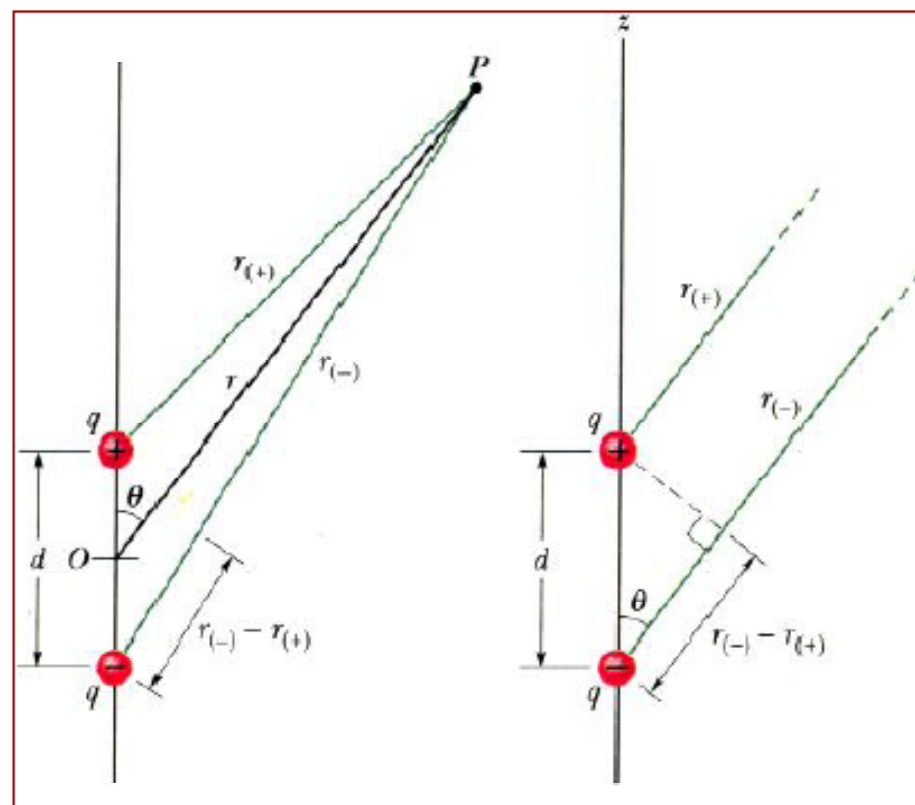
$$\begin{cases} r_{(-)} - r_{(+)} \approx d \cos \theta \\ r_{(-)} r_{(+)} \approx r^2 \end{cases}$$



$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ou:

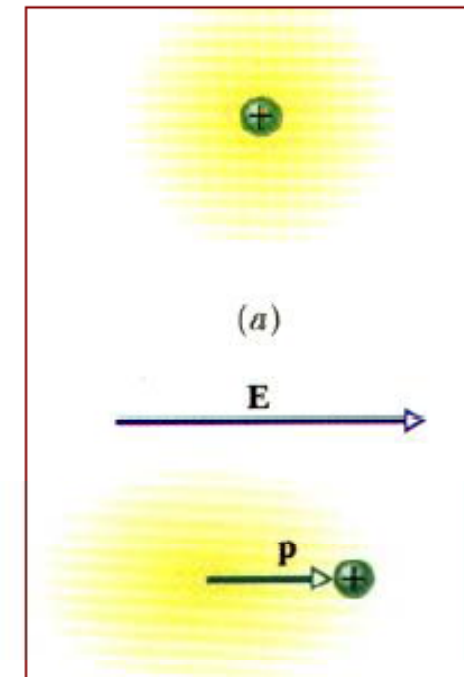
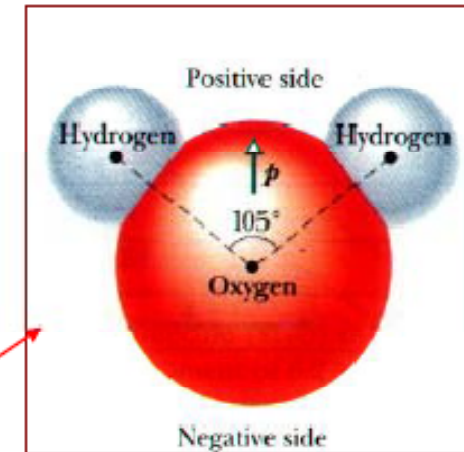
$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



O potencial elétrico

O potencial de um dipolo elétrico

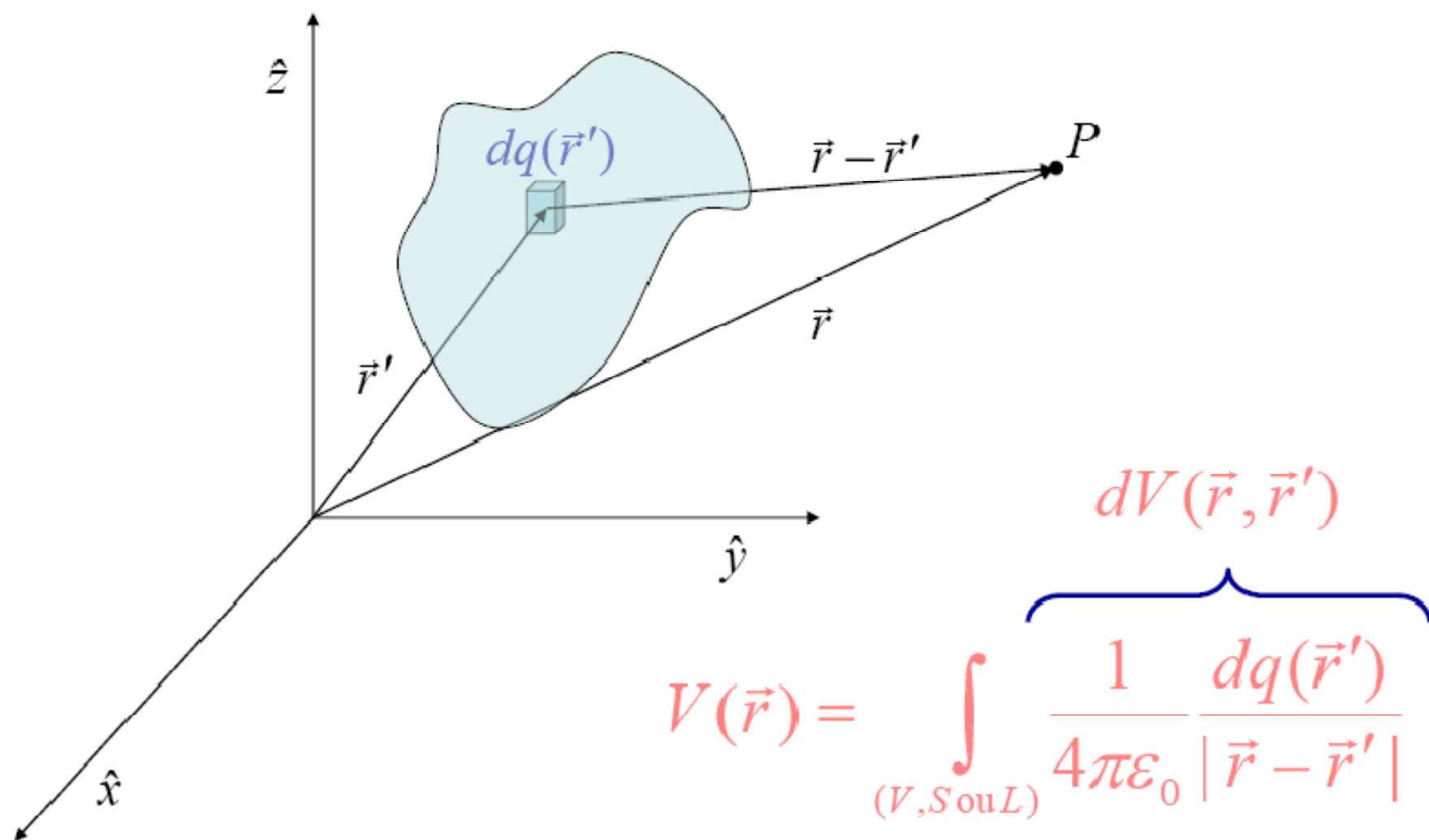
O dipolo elétrico pode ser *permanente* ou *induzido* por um campo externo que separa o centro de cargas positivas do das negativas.



Exercícios sugeridos

- 1) N° 17, p. 85, Halliday, Física vol. 3 (4ª edição). **
- 2) N° 18, p. 85, Halliday, Física vol. 3 (4ª edição). **

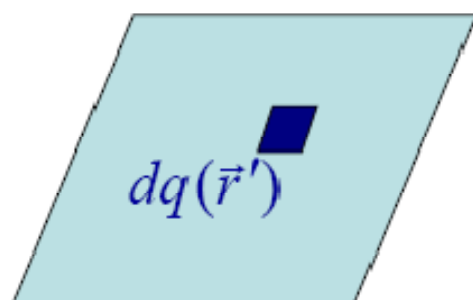
Distribuição contínua de cargas



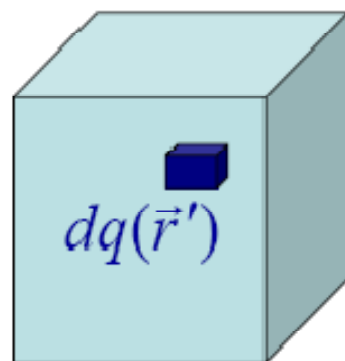
Distribuição contínua de cargas



linear : $dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl(\vec{r}')$



superficial : $dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') dA(\vec{r}')$



volumétrica : $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dV(\vec{r}')$

Distribuição contínua de cargas

O potencial de um disco carregado

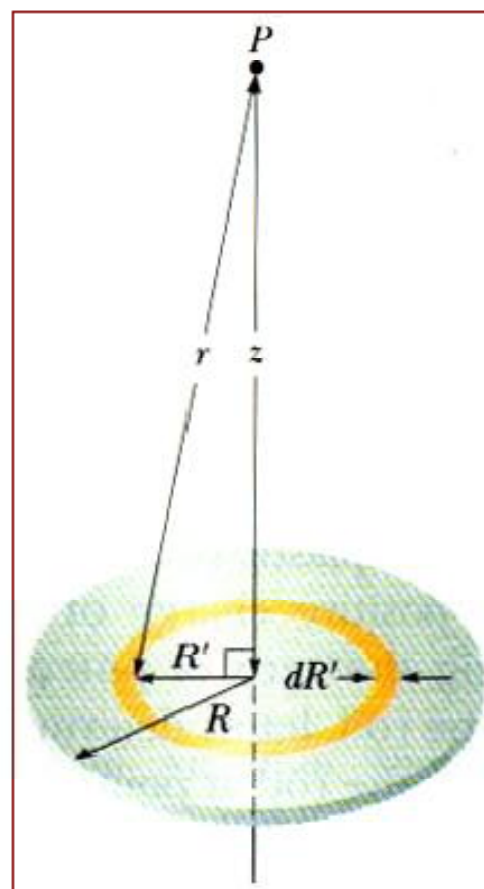
$$dq = 2\pi\sigma R'dR'$$

$$V(\vec{r}) = \int_{(V, \text{Source})} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$V(z) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R'dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$



$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)$$



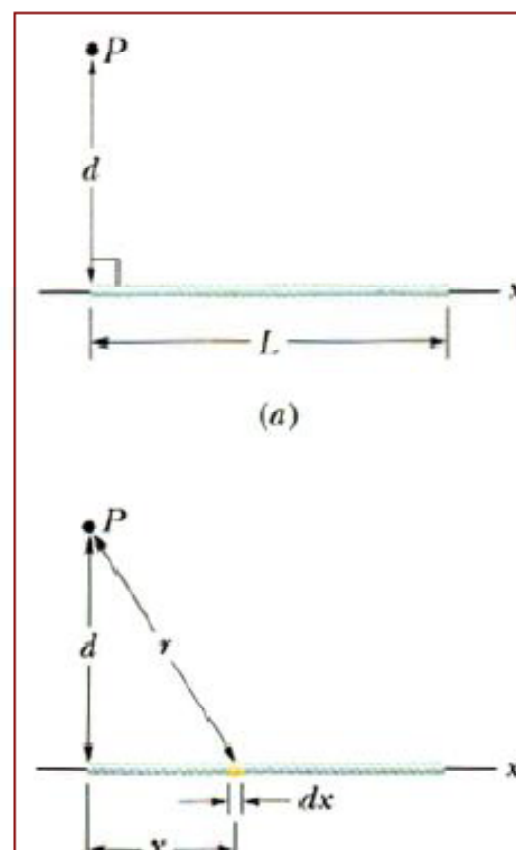
Distribuição contínua de cargas

O potencial de uma linha finita de carga ($dq = \lambda dx$)

$$V(\vec{r}) = \int_{(V, S \text{ ou } L)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$V = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d} \right]$$



Distribuições contínuas de cargas

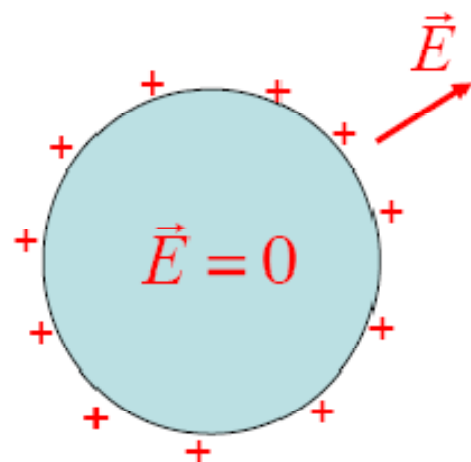
Achar o Potencial Elétrico para as distribuições de cargas dos exemplos das Unidades anteriores utilizando a equação

$$V_B - V_A = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 1) Anel carregado com carga q e raio a
- 2) Casca esférica condutora de raio R e carga Q
- 3) Disco com densidade de cargas σ
- 4) Linha de carga com densidade λ
- 5) Distribuição esférica de cargas (ou num isolante)

Potencial de um condutor carregado isolado

Condutor esférico



Dentro: $r < R$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

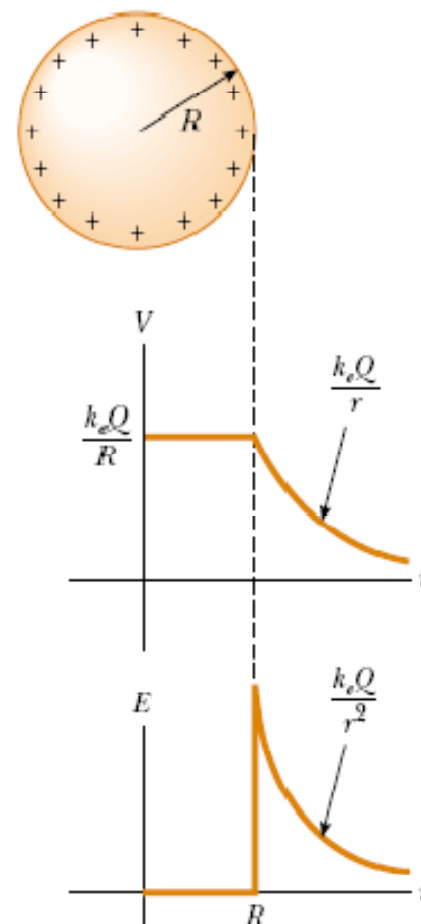
$$V_f - V_i = - \int_{r_i}^{r_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

ou

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Fora: $r > R$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



O campo elétrico

Obtenção do campo a partir do potencial elétrico

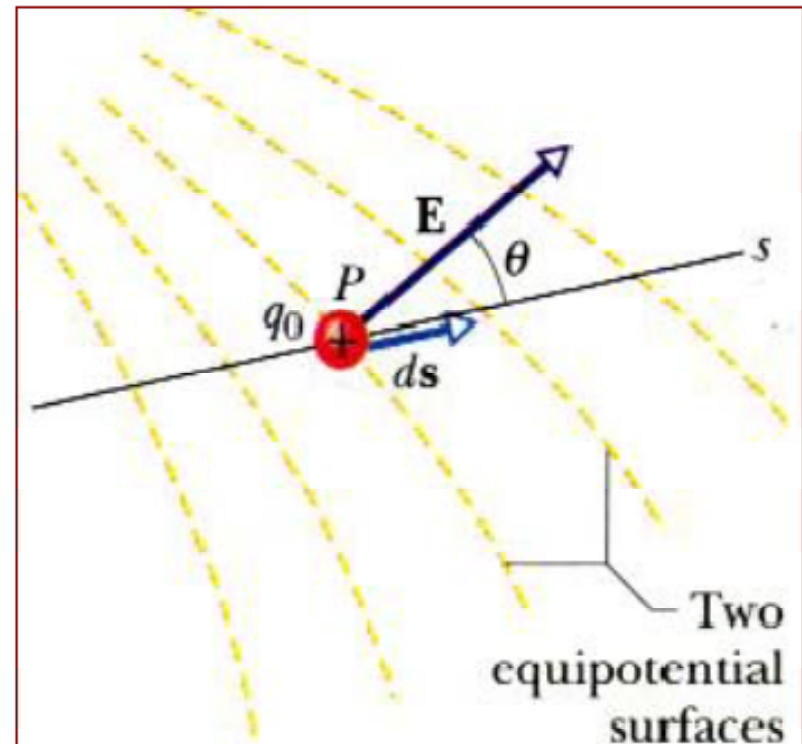
$$dV = -E \cos \theta ds \quad -\frac{dV}{ds} = E \cos \theta$$

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\vec{\nabla} V \cdot \hat{s} ,$$

que é a **derivada direcional** do campo elétrico na direção do deslocamento



$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$



Dedução alternativa

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \longrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

Sejam, em coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \\ V = V(x, y, z) \end{cases}$$

$$\text{Então: } \begin{cases} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \\ dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \end{cases}$$

Por (1):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Ou seja:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

O campo elétrico

Campo de um disco uniformemente carregado

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Vimos:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)$$

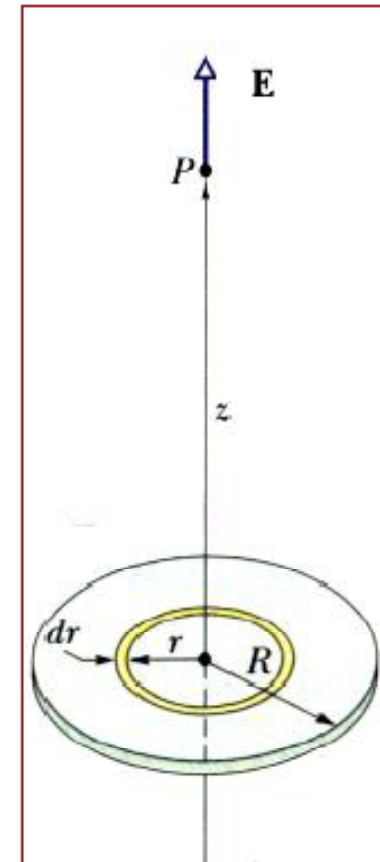
Neste caso, $V = V(z)$ somente. Então:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Ou, derivando:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z}$$

(resultado já conhecido)



A energia potencial elétrica de um sistema de cargas

É o *trabalho executado* por um *agente externo* para trazer todas as cargas do infinito até a configuração desejada. Dada a energia potencial elétrica entre cada par de cargas

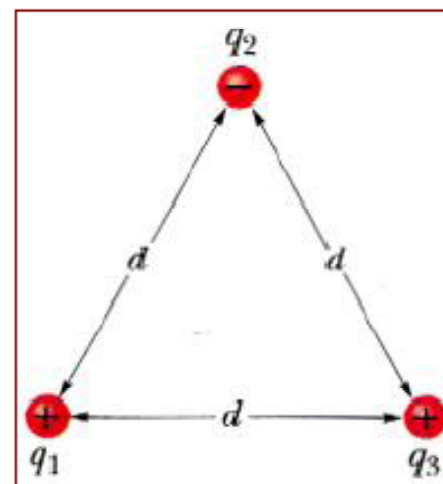
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \text{ temos que:}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i),$$

onde $V(\vec{r}_i)$ é o potencial na posição da carga i .

A generalização para uma distribuição contínua de cargas com densidade ρ é:

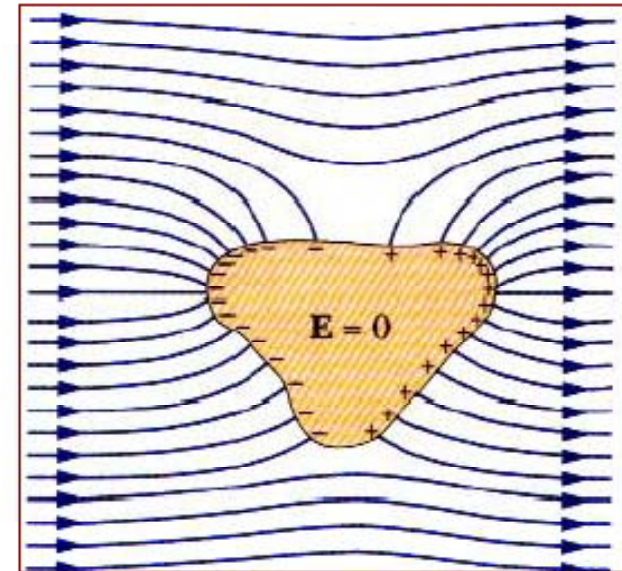
$$U = \frac{1}{2} \int \rho \overleftarrow{V} \overleftarrow{d}v$$



$$\begin{aligned} q_1 &= q \\ q_2 &= -4q \\ q_3 &= 2q \end{aligned} \quad W = ?$$

Potencial de um condutor carregado isolado

Exemplos



A superfície de um condutor isolado, carregado ou não, é uma equipotencial.

Exercícios sugeridos

- 1) N° , p. , Halliday, Física vol. 3 (4ª edição). **
- 2) N° , p. , Halliday, Física vol. 3 (4ª edição). **

