



# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## Escola de Engenharia de Lorena – EEL

***“LOB1053 - FÍSICA III”***

***Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior***

***Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)***

***Escola de Engenharia de Lorena (EEL)***

***Universidade de São Paulo (USP)***

***Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970***

***[durval@demar.eel.usp.br](mailto:durval@demar.eel.usp.br)***

Rodovia Itajubá-Lorena, Km 74,5 - Caixa Postal 116  
CEP 12600-970 - Lorena - SP  
Fax (12) 3153-3133  
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

**USP Lorena**  
**[www.eel.usp.br](http://www.eel.usp.br)**

Polo Urbo-Industrial Gleba AI-6 - Caixa Postal 116  
CEP 12600-970 - Lorena - SP  
Fax (12) 3153-3006  
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

**UNIDADE 2 –**

**O CAMPO ELÉTRICO**

# O campo elétrico

Pelo **princípio da superposição**, vimos que a força que um conjunto de cargas puntiformes  $q_1, q_2, \dots, q_n$  exerce sobre uma carga de prova  $q_0$  é dada por:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n},$$

que pela lei de Coulomb se escreve como  $\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$ ,

onde  $\hat{r}_{0i} = \frac{\vec{r}_{0i}}{|\vec{r}_{0i}|} \equiv \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|}$

Assim, podemos definir uma grandeza  $\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$ ,

que só depende da distribuição das cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e das suas distâncias ao ponto onde  $q_0$  se encontra.

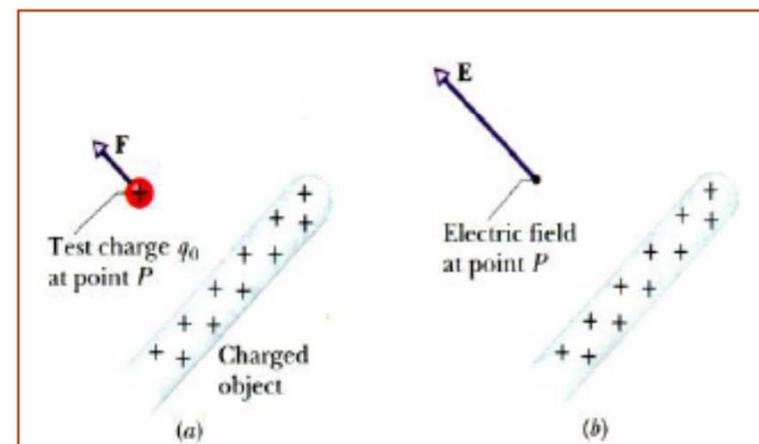
# O campo elétrico

Portanto, o *campo elétrico* devido à distribuição de cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  em um dado ponto  $\vec{r}_0$  é dado por:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$$

Para medir o campo devido à distribuição de cargas devemos medir a *força* exercida por esse conjunto de cargas numa carga teste  $q_0$  e dividir pelo próprio valor de  $q_0$ . Para que não haja influência da carga teste sobre o conjunto inicial, podemos definir o campo como

$$\vec{E} \equiv \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$



# Exemplos

Exemplo 1) Exemplo 1, pg. 20, Halliday, Física, 4ª edição.

Exemplo 2) Exemplo 20.4, pg. 603, Tipler (2ª edição).

Exemplo 3) Exemplo 20.5, pg. 603, Tipler (2ª edição).

Exemplo 4) Encontrar o campo elétrico dentro e fora de uma distribuição esferossimétrica de cargas positivas. Supor  $R$  o raio da esfera e  $Q$  a sua carga total.

# Linhas de força

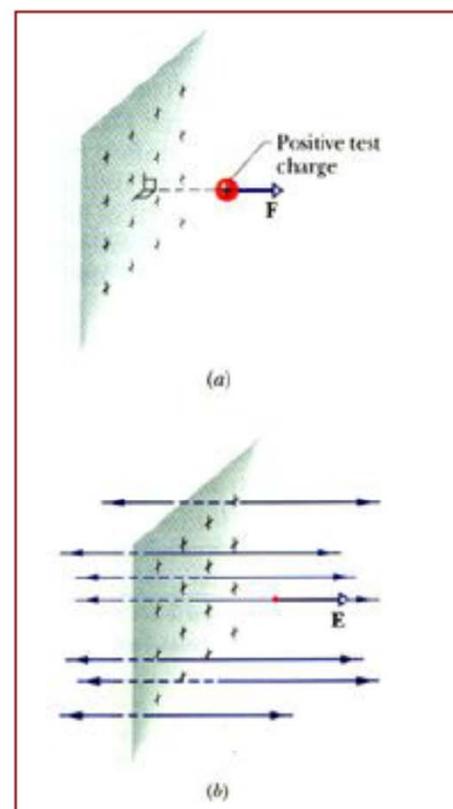
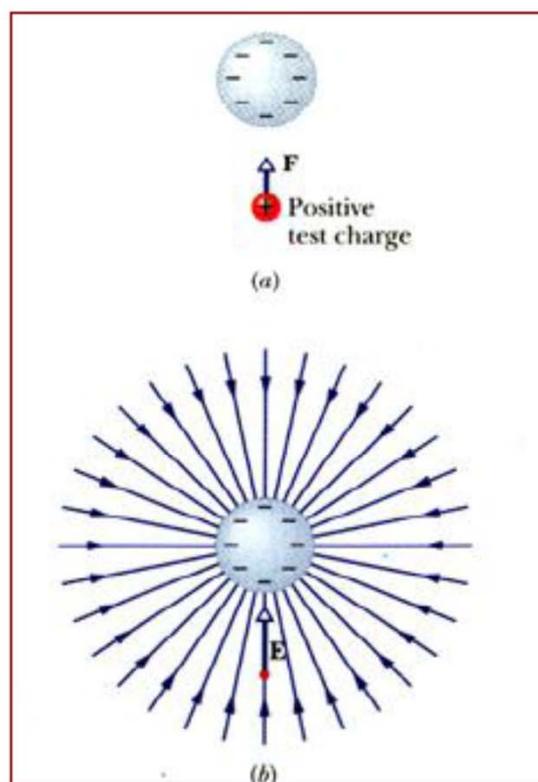
As *linhas de força* são linhas a partir das quais pode-se visualizar a configuração do campo elétrico de uma dada distribuição de cargas no espaço. Elas são traçadas de forma que:

a) A **tangente** a cada ponto da linha é a **direção do campo elétrico**;

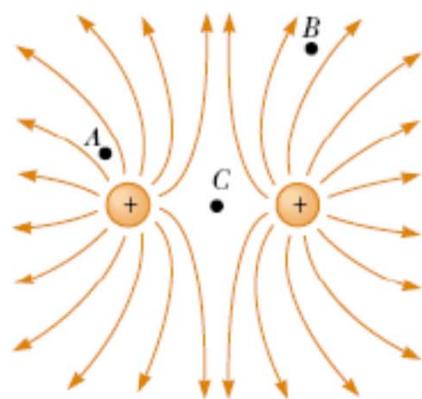
b) O **número de linhas por unidade de área** de uma superfície perpendicular à direção das linhas é proporcional ao **módulo do campo**;

c) As linhas **saem das cargas positivas** e **chegam nas cargas negativas**.

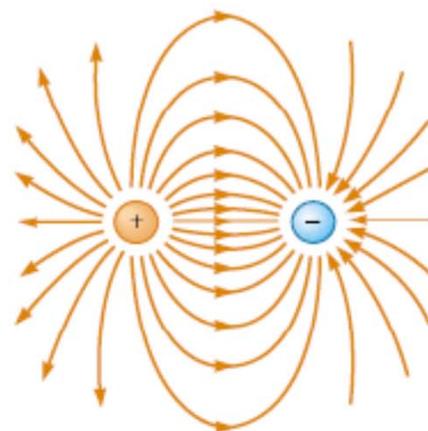
**Duas linhas de campo nunca se cruzam.**



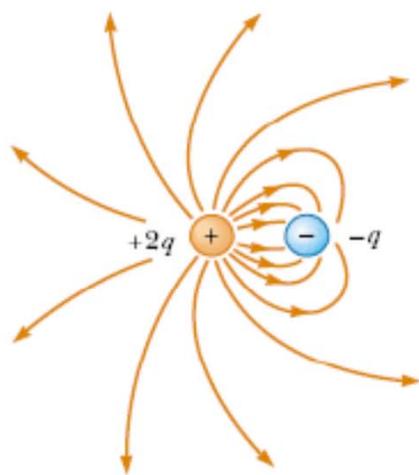
# Linhas de força



Duas cargas iguais



Dipolo elétrico



Cargas  $+2q$  e  $-q$

Dada uma distribuição de cargas, o campo elétrico criado pela distribuição em qualquer ponto do espaço é dado por:

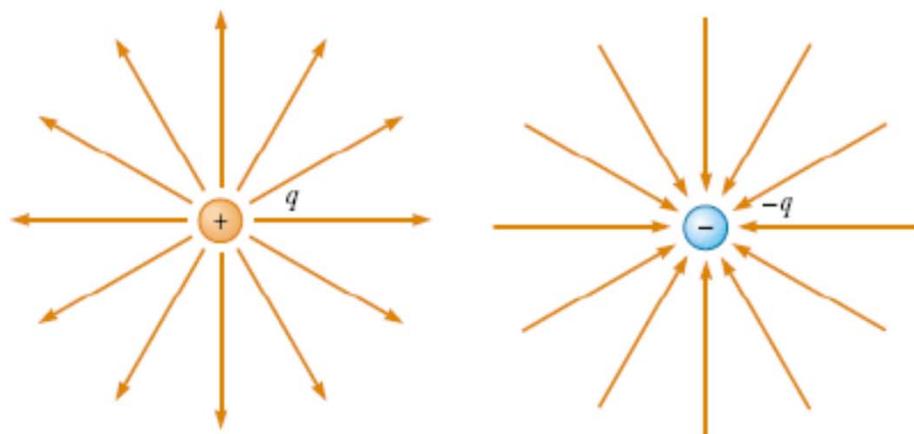
$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02} + \dots + \vec{E}_{0n}$$

(princípio da superposição)

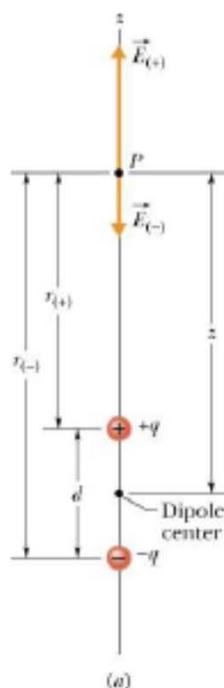
# Alguns campos elétricos importantes

## Carga puntiforme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



## Dipolo elétrico



Ao longo da linha que une as cargas e para  $z \gg d$ :

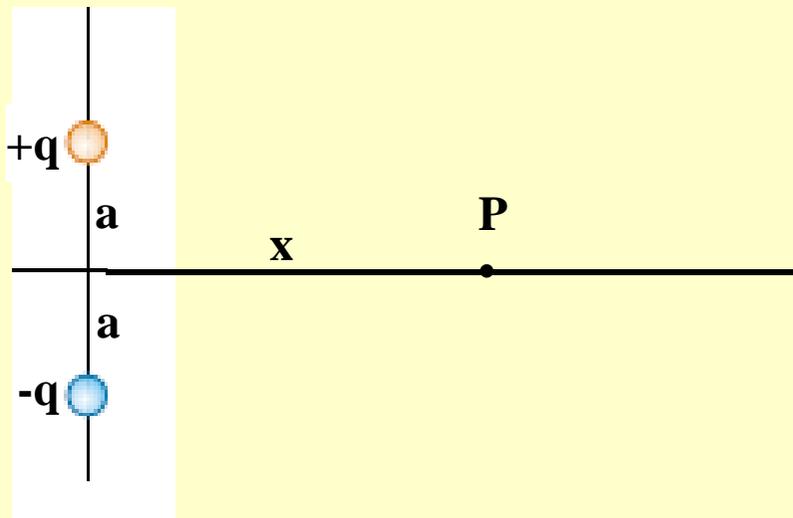
$$E = E_{(+)} - E_{(-)} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3},$$

onde  $p$  é o módulo do momento de dipolo elétrico dado por:

$$\vec{p} \equiv q \vec{d}$$

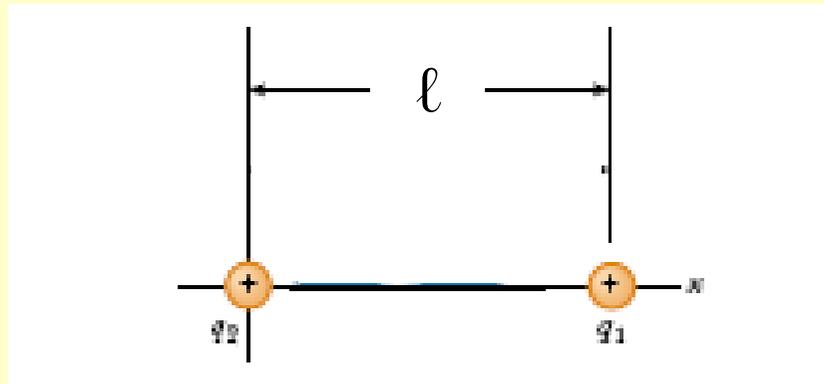
# Exemplos

Exemplo 5) Um Dipolo Elétrico. A Figura abaixo mostra duas cargas de módulo  $q$  e sinais opostos colocadas a uma distância  $2a$ , formando o que chamamos de dipolo elétrico. Qual é o valor do campo  $\vec{E}$  produzido por estas cargas num ponto P, a uma distância  $x$ , medida sobre a mediatriz do segmento que une as cargas? Supor  $x \gg a$ .



# Exemplos

Exemplo 6) A Figura abaixo mostra duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  separadas por uma distância  $\ell=10$  cm. Sabemos que  $q_1 = +1,0 \times 10^{-6}$  C e  $q_2 = +2,0 \times 10^{-6}$  C. Em que ponto da reta que une as duas cargas é nula a intensidade do campo elétrico?



# Exercícios sugeridos

- 1) N° 9E, p. 33, Halliday, Fund. de Física (4ª edição). \*\*
- 2) N° 11E, p. 34, Halliday, Fund. de Física (4ª edição). \*\*
- 3) N° 22P, p. 35, Halliday, Fund. de Física (4ª edição). \*\*
- 4) N° 9, p. 623, Tipler (2ª edição).
- 5) N° 10, p. 623, Tipler (2ª edição).
- 6) N° 11, p. 623, Tipler (2ª edição). \*\*

# Exercício 01

01. Coloca-se um elétron em cada uma das posições dos números do mostrador de um relógio de ponteiros.

(a) Qual o campo elétrico  $E$  no centro do mostrador?

(b) Qual o novo campo elétrico  $E$  se retirarmos um elétron?

## Exercício 02

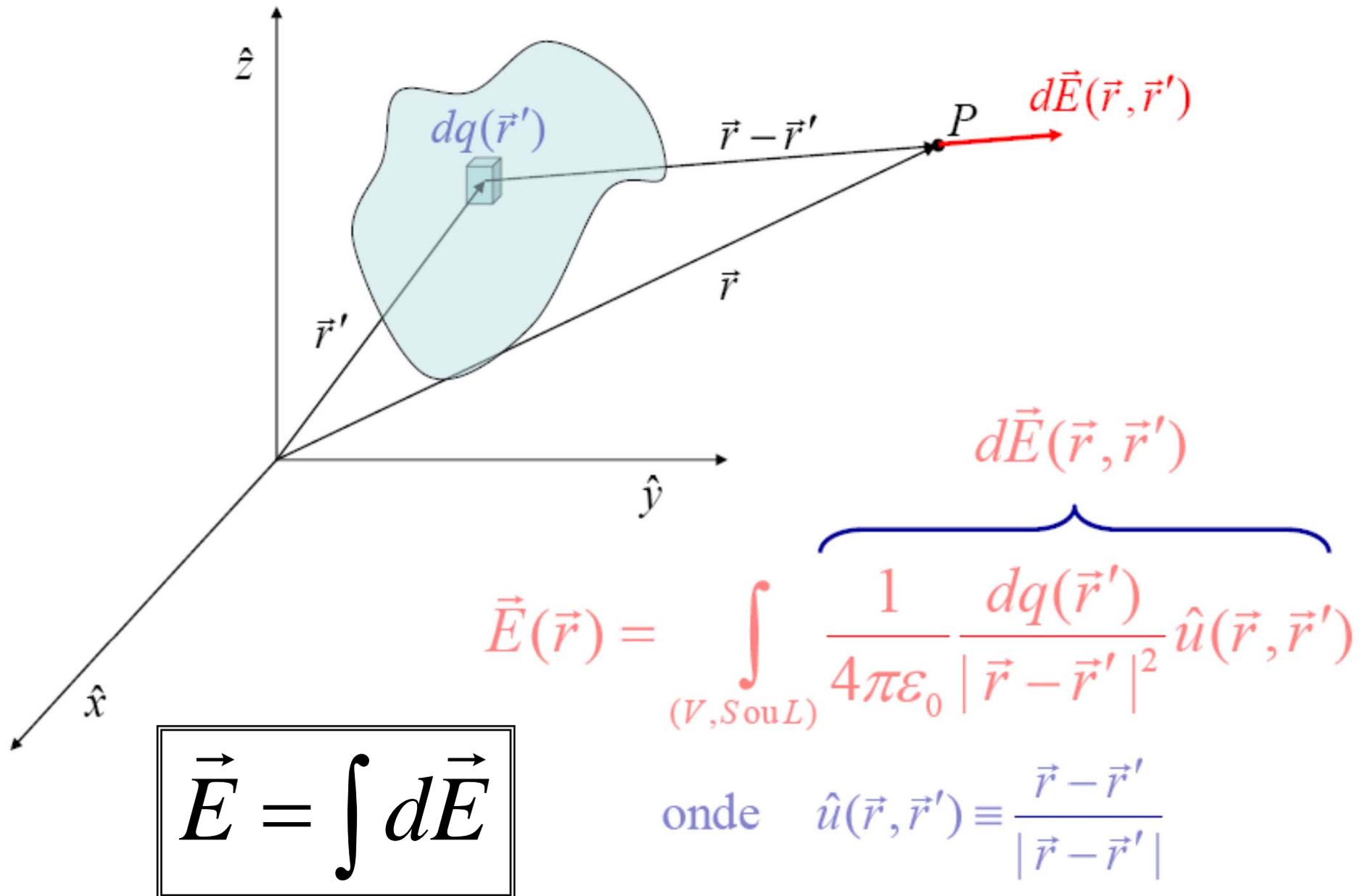
02. O mostrador de um relógio possui cargas negativas pontuais  $-q$ ,  $-2q$ ,  $-3q$ , ...,  $-12q$  mantidas fixas nas posições dos números correspondentes. Os ponteiros do relógio não afetam o campo produzido pelas cargas pontuais. A que horas o ponteiro das horas aponta na mesma direção que o vetor campo elétrico no centro do mostrador?





## **II.4. Distribuições contínuas de cargas**

# Distribuição contínua de cargas

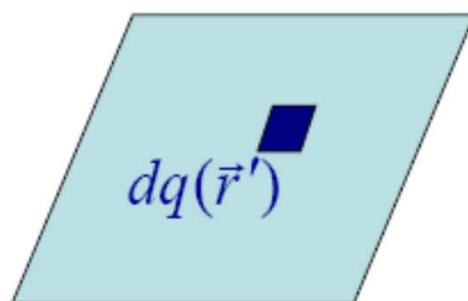


## Distribuição contínua de cargas



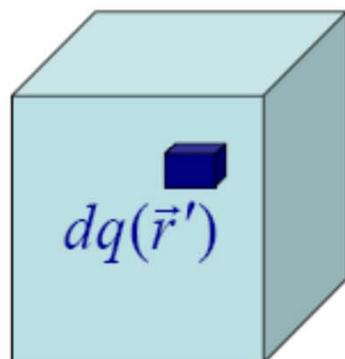
$$\text{linear} : \lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\text{ou} : dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl(\vec{r}')$$



$$\text{superficial} : \sigma = \frac{dq}{dA}$$

$$\text{ou} : dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') dA(\vec{r}')$$



$$\text{volumétrica} : \rho = \frac{dq}{dV}$$

$$\text{ou} : dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dV(\vec{r}')$$

# Distribuição contínua de cargas

Campo devido a um anel uniformemente carregado com carga  $q$

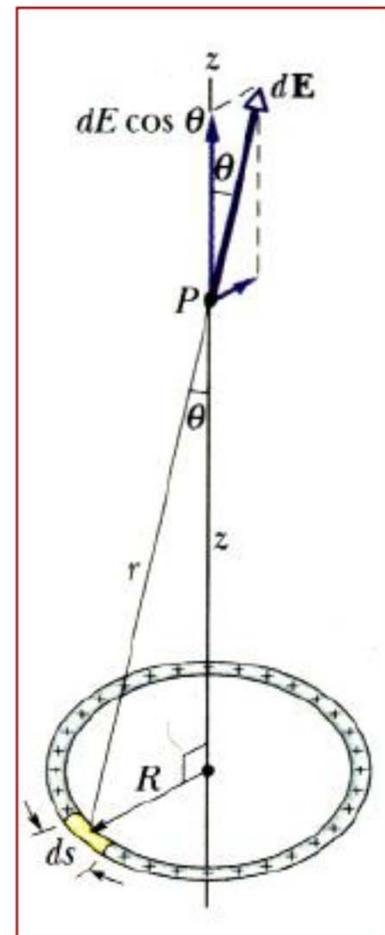
Ao longo do eixo perpendicular ao plano do anel e que passa pelo seu centro o campo é dado por:

$$\vec{E} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Note que em pontos bem longe do anel ( $z \gg R$ ):

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}$$

(campo semelhante ao de uma carga puntiforme)



# Distribuição contínua de cargas

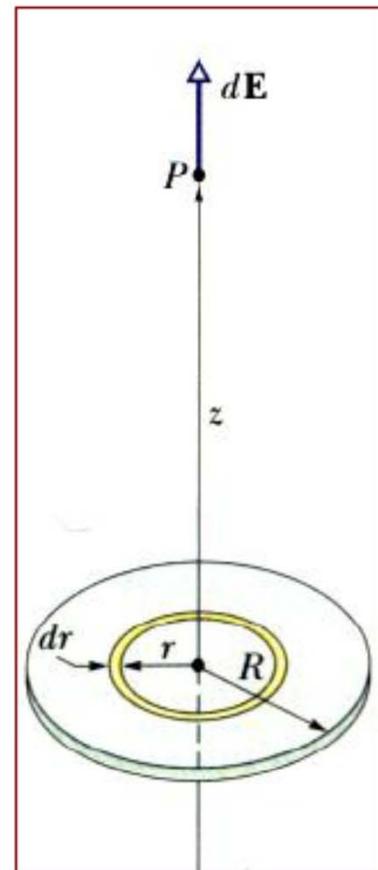
Campo devido a um disco de raio  $R$   
uniformemente carregado com densidade  
superficial de carga  $\sigma$

Ao longo do eixo perpendicular ao plano do  
disco e que passa pelo seu centro o campo é dado  
por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \hat{z}$$

Note que se  $R \gg z$  (ou plano infinito)

$$\vec{E} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}$$



## Campo de um fio infinito carregado com densidade linear de carga $\lambda$ uniforme

Contribuição  $dE$  devida ao elemento de carga  $dq (= \lambda dz)$ :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{z^2 + x^2}$$

As componentes  $dE_z$  cancelam-se por simetria e

$$dE_x = dE \cos\theta$$

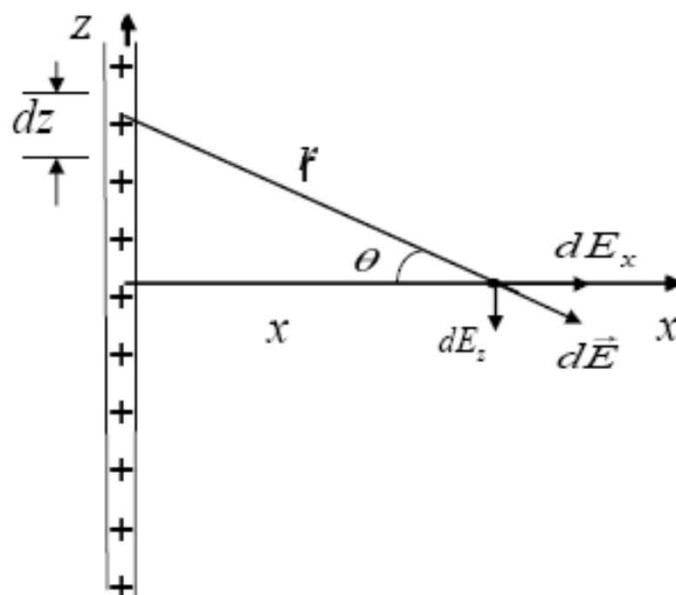
$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dE \cos\theta = \\ &= 2 \int_0^{\infty} dE \cos\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 + x^2} \cos\theta \end{aligned}$$

Faz-se:  $z = x \operatorname{tg}\theta \therefore dz = x \sec^2\theta d\theta$

e  $x^2 + z^2 = x^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = x^2 \sec^2\theta$

Substituindo estas duas relações no integrando, tem-se:

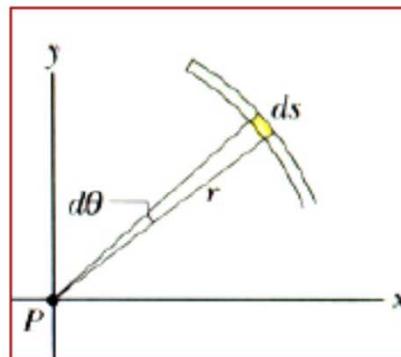
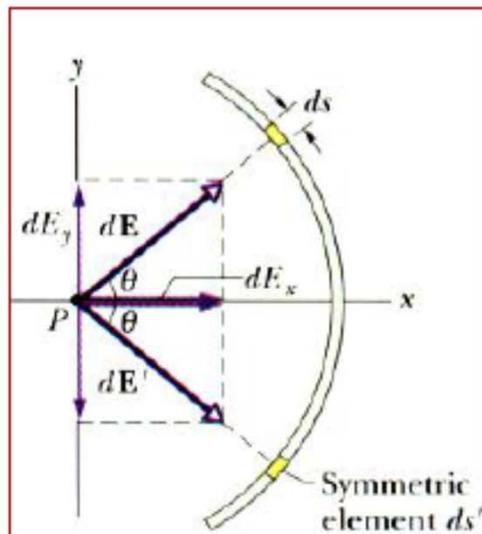
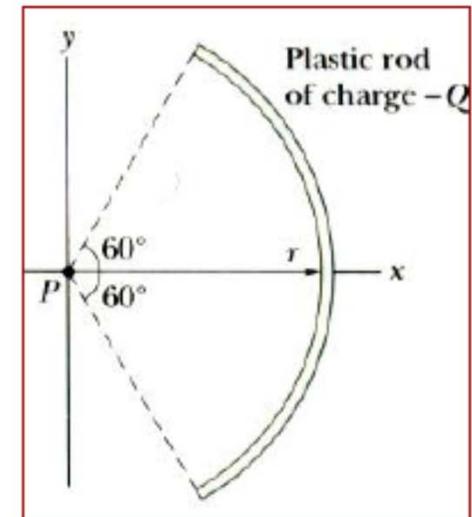
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} [\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$



# Distribuição contínua de cargas

Campo devido a uma haste isolante em forma de arco circular uniformemente carregada de carga  $-Q$

No centro do arco circular de raio  $r$  o campo é dado por:

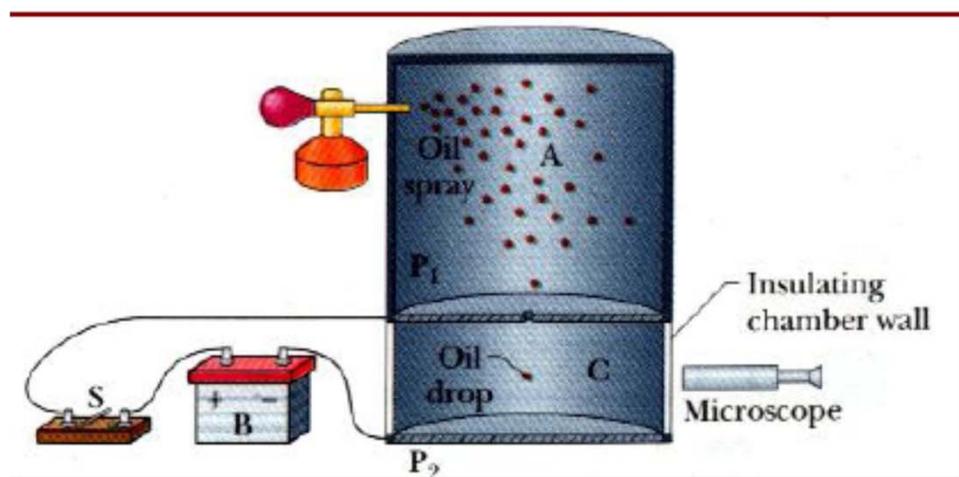


$$\vec{E} \approx \frac{0,83Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{x}$$

# Movimento de uma carga no campo elétrico

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}$$

## Experiência de Millikan



Em uma gotícula carregada, o seu peso pode ser equilibrado pela ação de um campo elétrico. A condição de equilíbrio é:

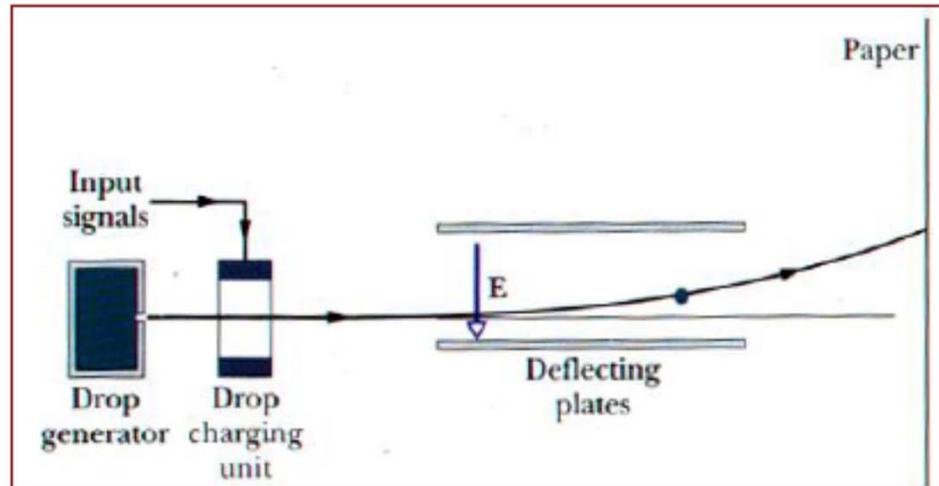
$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g = qE$$

$$q = ne, \text{ onde } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

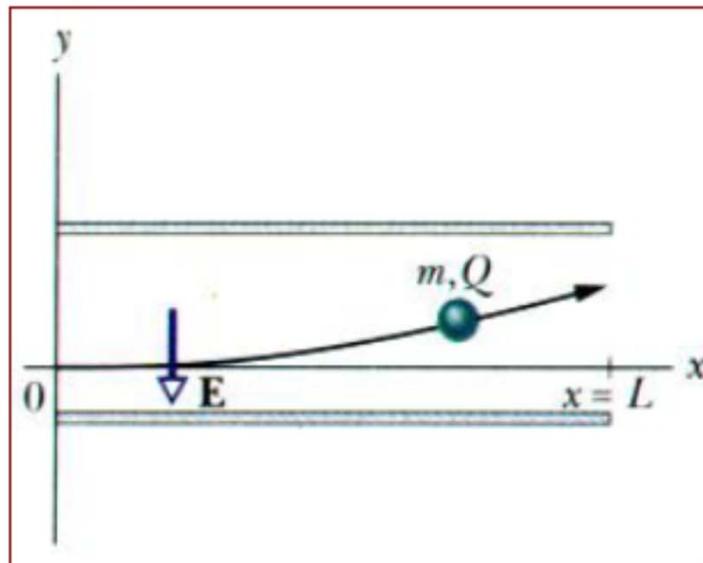
$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

# Movimento de uma carga no campo elétrico

## Impressora de jato de tinta



Mantém-se o campo elétrico fixo e varia-se a carga da gota de tinta



$$y = \frac{QEL^2}{2mv_x^2}$$

# Exercícios sugeridos

- 7) Encontrar  $\vec{E}$  para linha de carga com comprimento finito total  $L$ .  
(N° 33P, p. 36, Halliday, Fund. da Física, 4ª edição).
- 8) N° 17, p. 624, Tipler (2ª edição).
- 9) N° 19, p. 624, Tipler (2ª edição).
- 10) N° 26, p. 625, Tipler (2ª edição).

## Exercício 03

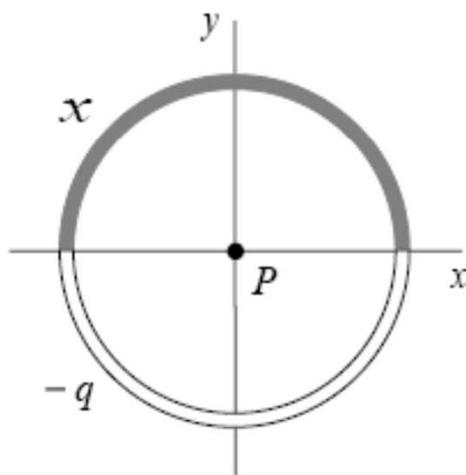
03. O movimento de um elétron se limita ao eixo central de um anel de raio  $R$  com uma distribuição de cargas uniforme. Mostre que a força eletrostática a que o elétron é submetido faz com que a partícula oscile em torno do centro do anel com uma frequência angular dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

onde  $q$  é a carga do anel e  $m$  é a massa do elétron.

## Exercício 04

04. Duas barras curvas de plástico, uma de carga  $+q$  e outra de carga  $-q$ , formam uma circunferência de raio  $R$  em um plano  $xy$ . O eixo  $x$  passa pelos dois pontos de ligação entre os arcos e a carga está distribuída uniformemente nos dois arcos. Quais a intensidade, a direção e o sentido do campo elétrico produzido em  $P$ , o centro do círculo?



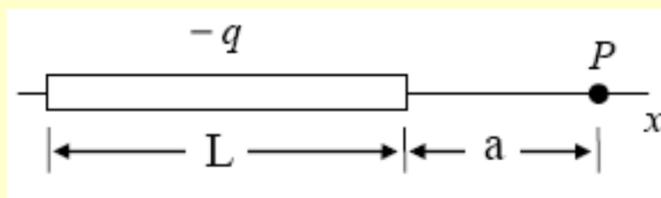
## Exercício 05

05. Uma barra não-condutora de comprimento  $L$  possui uma carga  $-q$  uniformemente distribuída ao longo do seu comprimento.

(a) Qual a densidade linear de carga da barra?

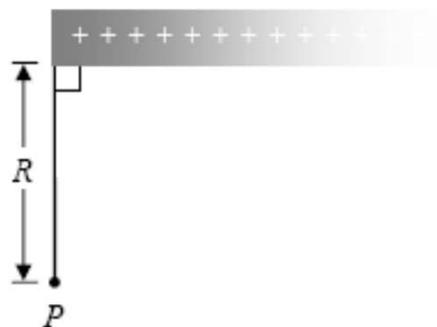
(b) Qual o campo elétrico no ponto  $P$ , a uma distância  $a$  da extremidade da barra?

(c) Se  $P$  estivesse a uma distância muito grande da barra comparada com  $L$ , a haste se pareceria com uma carga pontual. Mostre que sua resposta ao item (b) se reduz ao campo elétrico de uma carga pontual para  $a \gg L$ .



## Exercício 06

06. Uma barra não-condutora “semi-infinita” (ou seja, infinita apenas em um sentido) possui uma densidade linear de carga uniforme  $\lambda$ . Mostre que o campo elétrico no ponto  $P$  faz um ângulo de  $45^\circ$  com a barra e que este resultado independe da distância  $R$ . (Dica: Encontre separadamente as componentes paralela e perpendicular (à haste) do campo elétrico em  $P$ , e depois compare essas componentes).



# Dipolo no campo elétrico

## Torque

$$\tau = Fd \sin \theta = qEd \sin \theta = pE \sin \theta$$

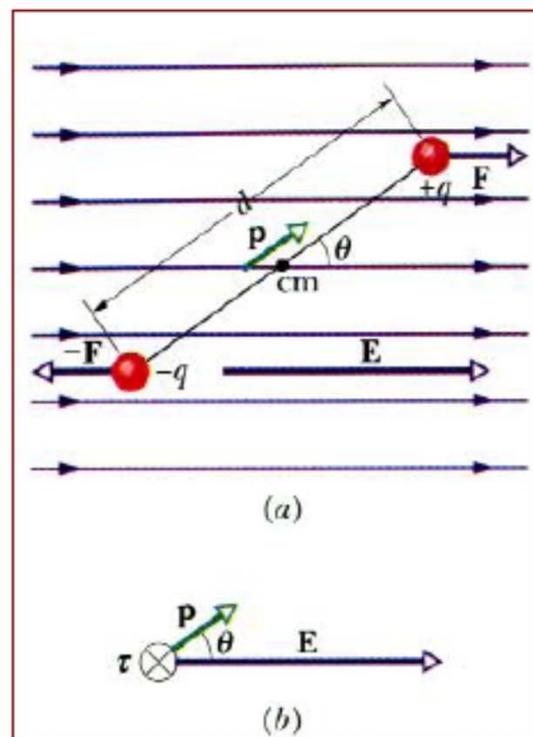
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

## Energia potencial

$$U(\theta) - U(\theta_0) = -W = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = -pE (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Se escolhermos  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  :

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



# Dipolo no campo elétrico

## Forno de micro-ondas

