



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

“LOB1021 - FÍSICA IV”

Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior

Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)

Escola de Engenharia de Lorena (EEL)

Universidade de São Paulo (USP)

Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970

durval@demar.eel.usp.br

www.demar.eel.usp.br/docentes ou www.eel.usp.br (Página dos professores)

Rodovia Itajubá-Lorena, Km 74,5 - Caixa Postal 116
CEP 12600-970 - Lorena - SP
Fax (12) 3153-3133
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

USP Lorena
www.eel.usp.br

Polo Urbo-Industrial Gleba AI-6 - Caixa Postal 116
CEP 12600-970 - Lorena - SP
Fax (12) 3153-3006
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

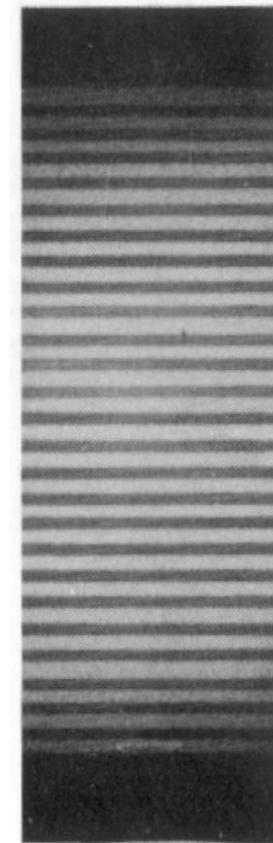
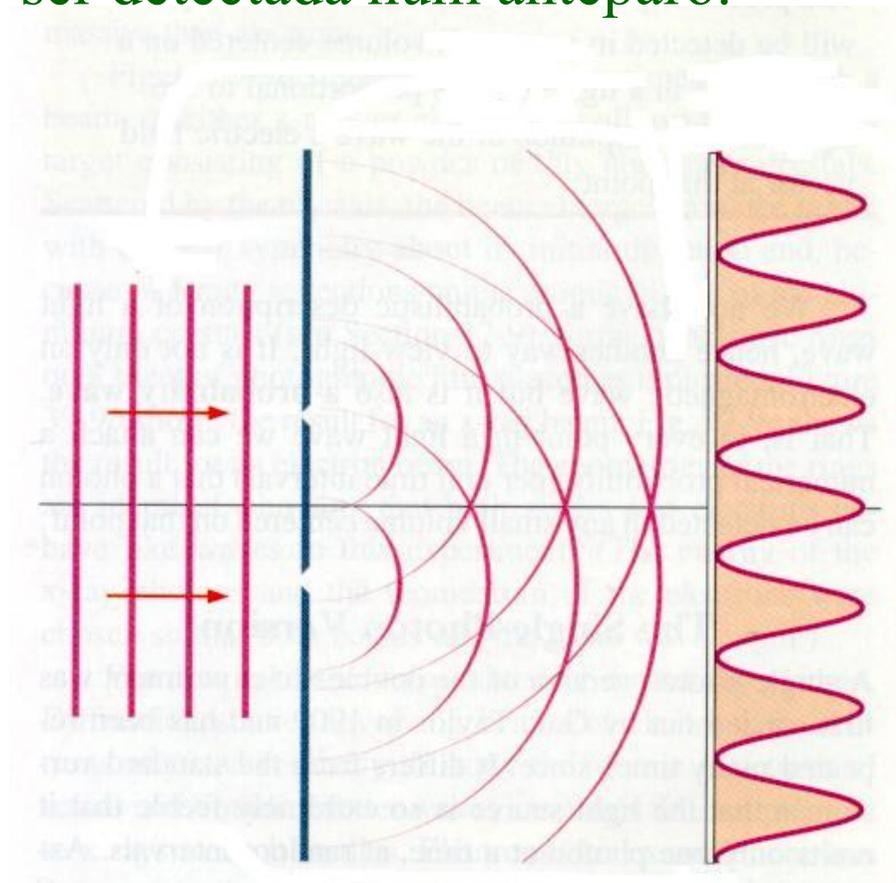
UNIDADE 8b -

Fótons e

Ondas de Matéria II

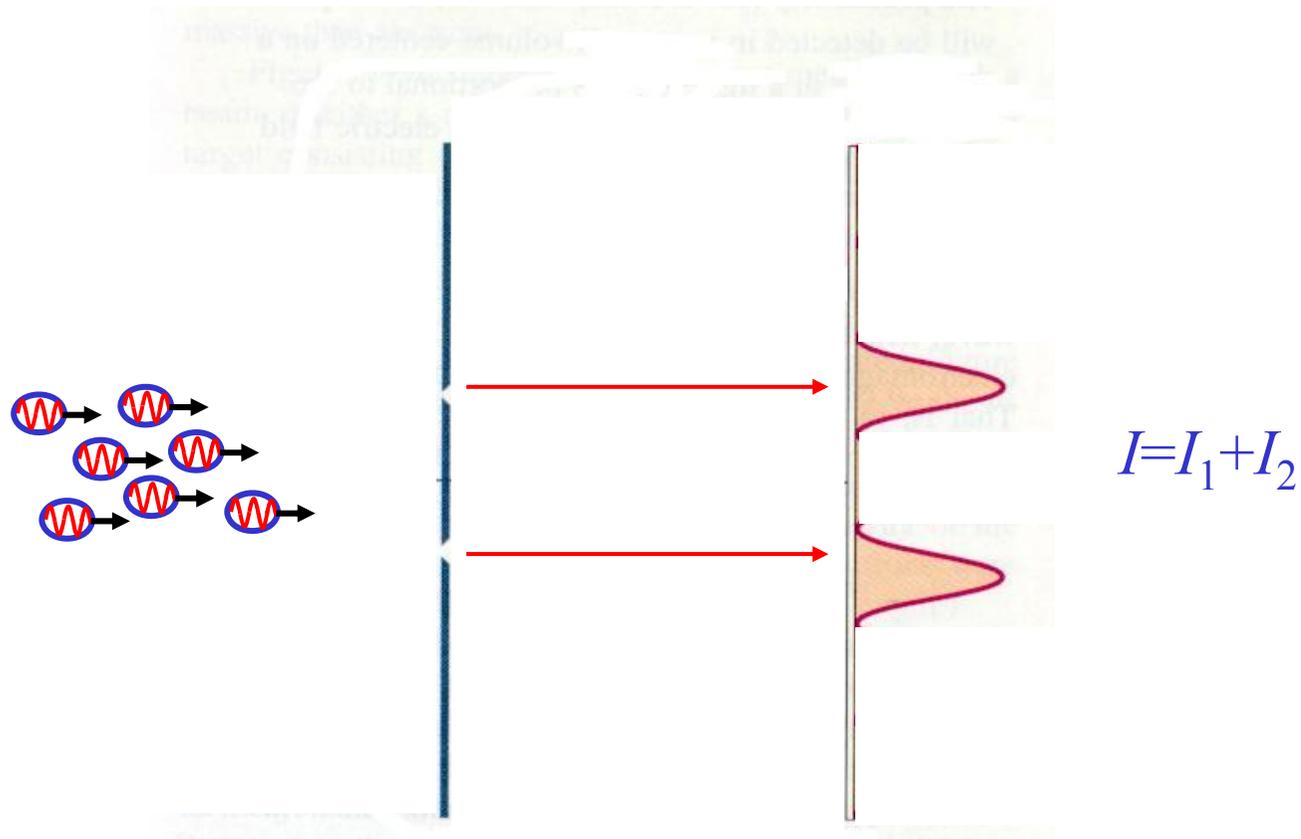
A experiência de Young

A teoria ondulatória da radiação eletromagnética nos ensinou que depois de passar por duas fendas ela apresenta uma **figura de interferência** ao ser detectada num anteparo.



A experiência de Young

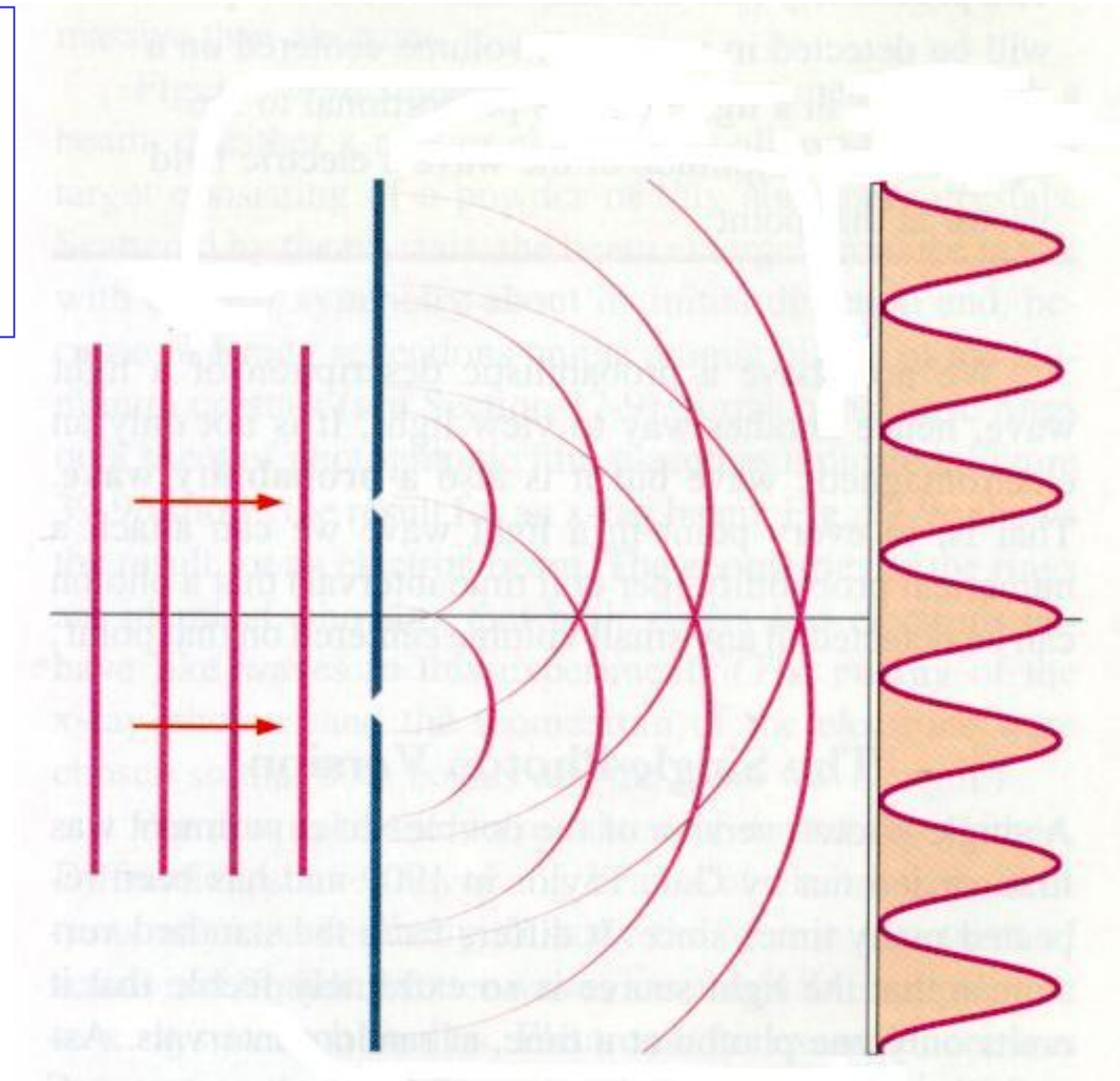
Por outro lado, corpúsculos clássicos apresentariam uma figura da forma:



Como conciliar a teoria ondulatória com a corpuscular ?

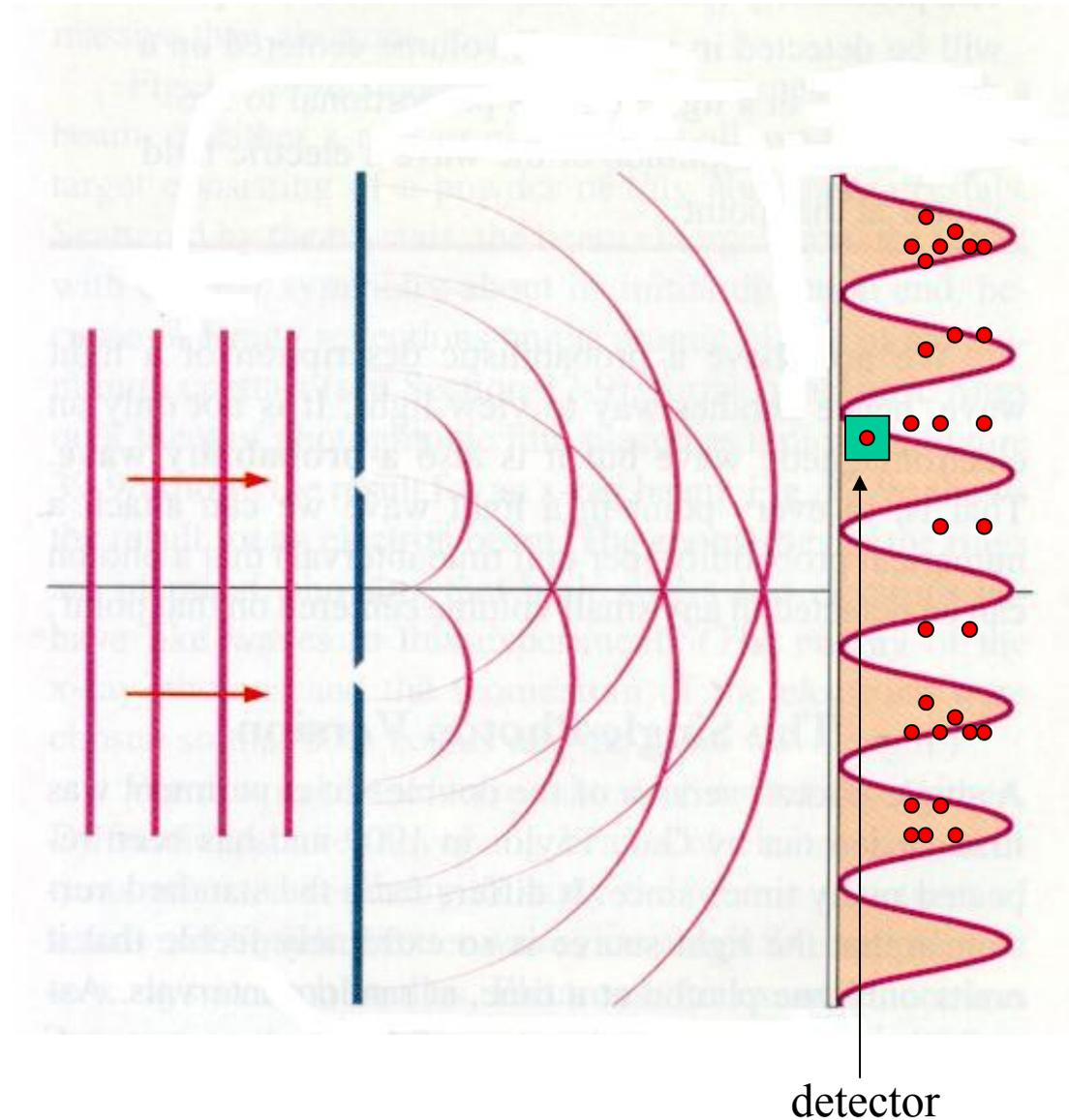
A experiência de Young

1- feixe de luz **intenso**:
figura de **interferência** na
medida de intensidade no
anteparo



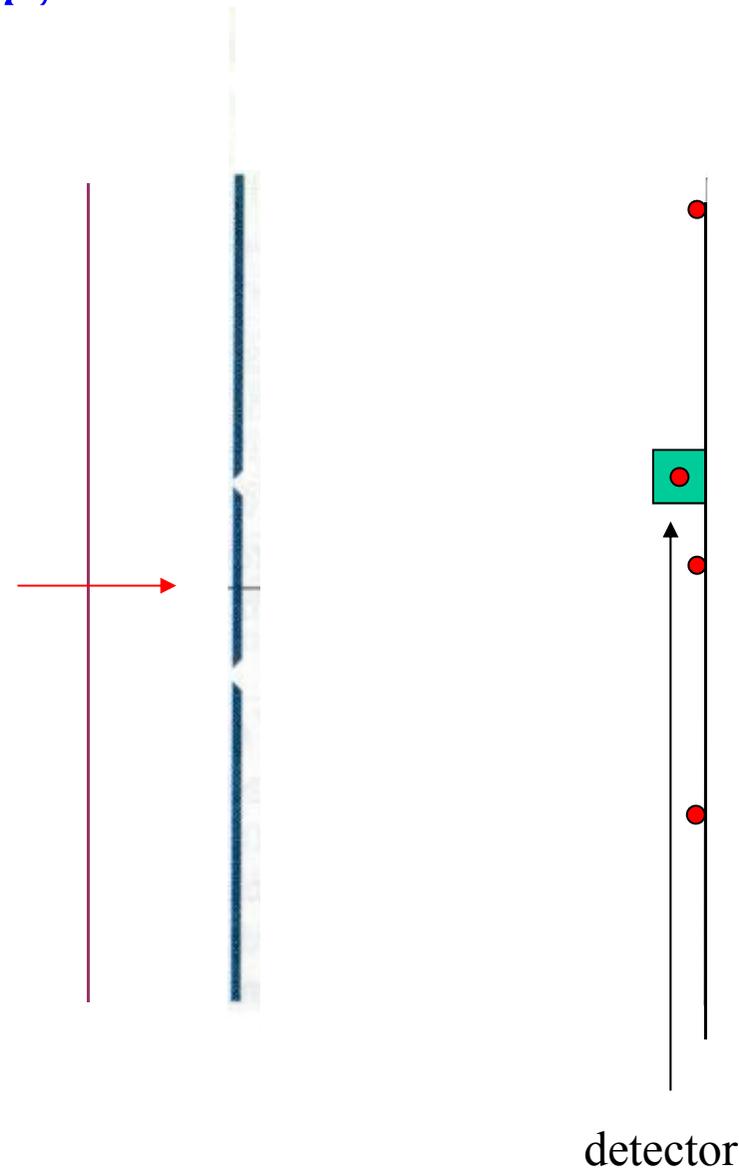
A experiência de Young

2- feixe de luz **intenso** + **detector** no anteparo: **figura de interferência** na medida de intensidade no anteparo, mas... **contagem discreta** da chegada dos fótons; apesar de muitos por segundo



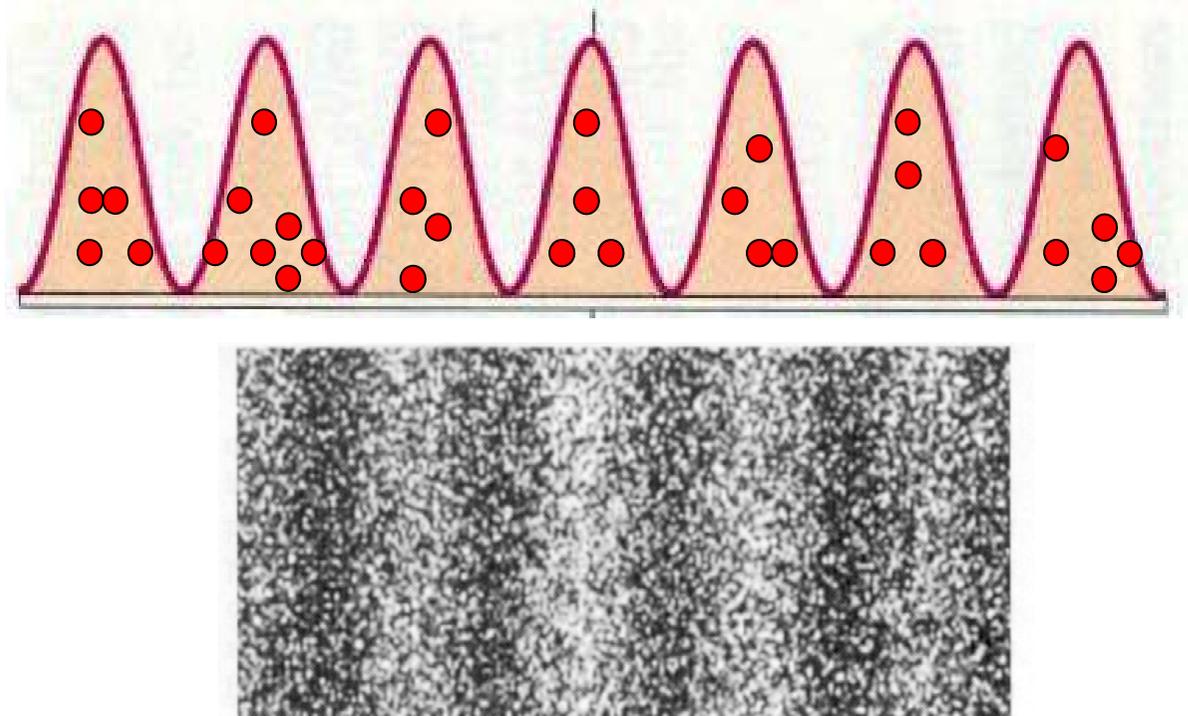
A experiência de Young

3- feixe de luz **não intenso**
+ **detector** no anteparo:
1 fóton por segundo
atravessa uma das fendas
e **1 fóton por segundo** é
registrado em **algum ponto**
do anteparo. (*Experiência
de 1 fóton*)



A experiência de Young

Mas, no decorrer de um intervalo de tempo **muito longo**:
o histograma apresenta um perfil de interferência...

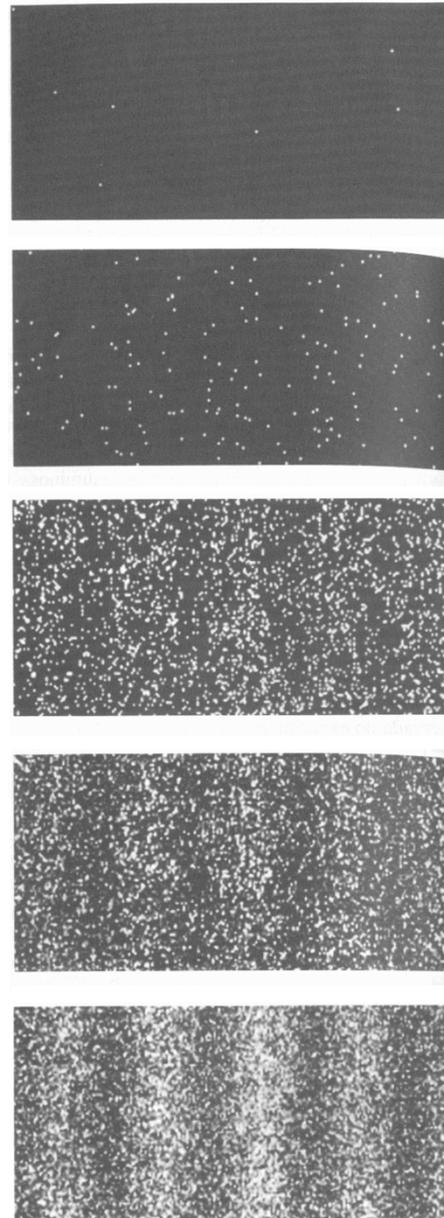


... compatível com a sobreposição dos resultados de $N \gg 1$
experiências envolvendo **apenas 1 fóton!**

A experiência de Young

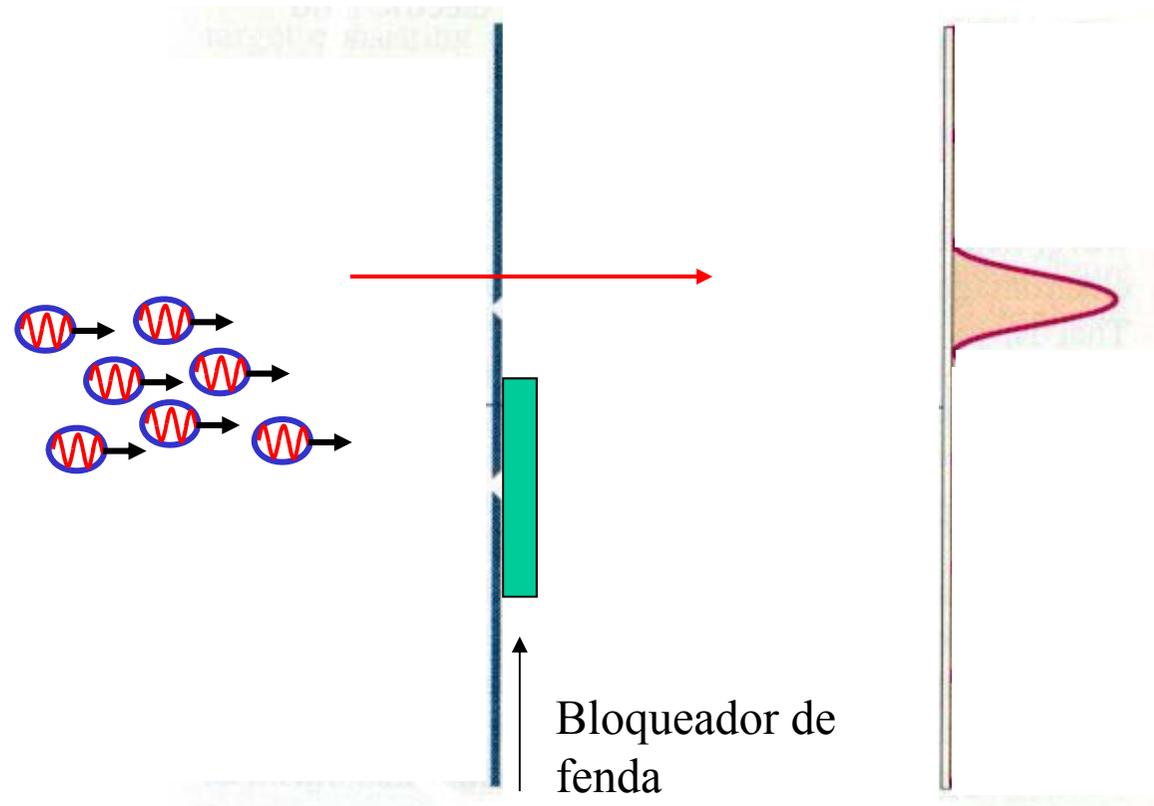
Intensidade do
feixe de
elétrons

[wavemechanics-duality](#)



A experiência de Young

Por onde passou o fóton?



Esta informação destrói a figura de interferência!

A experiência de Young

Quem sofre interferência?

Um raciocínio apenas qualitativo:

Intensidade no anteparo é dada por: $I(\vec{r}) = c \varepsilon_0 \overline{E^2(\vec{r}, t)}$

Em termos do número de fótons: $I(\vec{r}) = \frac{\Delta N(\vec{r})}{\Delta A \Delta t} h \nu$

onde $\Delta N(\vec{r})$ é o número de fótons que atinge a placa, numa área ΔA , em Δt segundos.

→ $\frac{\Delta N(\vec{r})}{c \Delta A \Delta t} = \varepsilon_0 \frac{\overline{E^2(\vec{r})}}{h \nu} \equiv \rho(\vec{r})$ que dá o número de fótons por unidade de volume

A experiência de Young

Para compatibilizar essa grandeza com a “experiência de 1 fóton” devemos interpretá-la como uma **densidade de probabilidade** de se encontrar um fóton em torno de \vec{r} !

$$\int_V \rho(\vec{r}) d^3r = 1$$

Nesse caso $\vec{E}(\vec{r})$ seria o campo elétrico “associado” à existência de **1 único fóton!** Mas, devemos interpretar este “campo” com muito cuidado, já que a **visão clássica** a ele associada é exatamente o que **os resultados experimentais** contradizem.

Outro ingrediente a ser introduzido: *princípio de superposição* (ignorando o caráter vetorial do campo elétrico):

$$E(\vec{r}) = E_1(\vec{r}) + E_2(\vec{r})$$

A experiência de Young

Se definirmos uma função complexa

$$\psi(\vec{r}) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{h\nu}} E(\vec{r}), \text{ teremos } |\psi(\vec{r})|^2 = \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{h\nu} |E(\vec{r})|^2$$

Daí: $\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$



$$|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 + 2 \operatorname{Re} \psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r}) =$$

$$\frac{\epsilon_0}{h\nu} \left[|E_1(\vec{r})|^2 + |E_2(\vec{r})|^2 + \underbrace{2 \operatorname{Re} E_1^*(\vec{r})E_2(\vec{r})}_{\text{Termo de interferência}} \right]$$

Termo de interferência

A experiência de Young

O objeto principal da teoria é a função de onda, ou *amplitude de probabilidade* $\psi(\vec{r}, t)$, cujo módulo quadrado é a *densidade de probabilidade* de se encontrar um fóton no ponto \vec{r} :

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$$

No caso de fótons, não podemos somar as probabilidades dele ser oriundo de uma fenda ou outra. Devemos somar as amplitudes de probabilidade (superposição) para depois tomar o seu módulo quadrado (intensidade) !

No caso de N fótons:

$$\psi(\vec{r}) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{Nh\nu}} E(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad |\psi(\vec{r})|^2 = \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{Nh\nu} |E(\vec{r})|^2$$

Aqui, $E(\vec{r})$ é o campo “associado” à presença de N fótons.

A experiência de Young

Convém enfatizar que a proporcionalidade entre $\psi(\vec{r}, t)$ e $E(\vec{r}, t)$ é apenas de **caráter formal**. $E(\vec{r}, t)$ é o campo elétrico, uma variável clássica cuja dinâmica é regida pelas equações de Maxwell. Já $\psi(\vec{r}, t)$ é uma **função criada** para explicar os resultados da experiência da fenda dupla no caso de poucos fótons. A sua **interpretação é probabilística** e poderíamos **postulá-la** sem qualquer menção ao campo elétrico. Os dois pontos fundamentais são:

- *Princípio da superposição*: $\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$
- *Interpretação probabilística*: $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ onde

$$\int_V \rho(\vec{r}, t) d^3 r = 1$$

A hipótese de de Broglie

- Baseado no fato da radiação eletromagnética (EM) propagar-se como onda e, ao interagir com a matéria, apresentar características corpusculares, Louis de Broglie (1924) considerou a possibilidade de corpúsculos apresentarem comportamento ondulatório, em determinadas circunstâncias.

- Mesmo argumentando que era irrelevante questionar se a radiação EM é uma onda, que ao interagir com a matéria manifesta um comportamento ondulatório, ou um conjunto de partículas, cujo movimento é governado por ondas, de Broglie adotou o segundo ponto de vista para determinar as características ondulatórias da matéria.



A hipótese de de Broglie

Usando as relações de Planck – Einstein:

$$\vec{p} = \frac{hf}{c} = \hbar \vec{k}$$

$$E = hf = \left(\frac{h}{2\pi} \right) (2\pi f) = \hbar \omega$$

de Broglie associou um comprimento de onda λ e uma frequência f a uma partícula de momento p e energia E , através das relações:

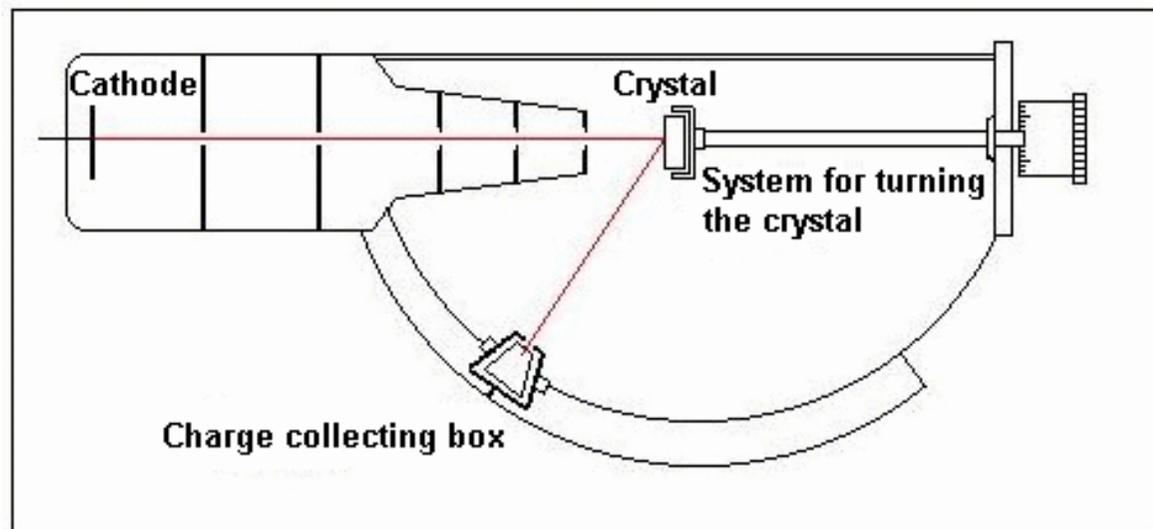
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$f = \frac{E}{h}$$

Louis de Broglie recebeu o prêmio Nobel em 1929

Difração eletrônica

- A confirmação da hipótese de de Broglie veio através das observações de **Davisson e Germer (1927)** e **Thomson (1928)**, que fizeram experimentos com feixes de elétrons incidindo sobre **amostras cristalinas de níquel (os dois primeiros)** ou **pó de alumínio (o segundo)**.



The diagram of the Davisson-Germer experiment.



Difração eletrônica (Experimento de Davisson-Germer)

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

Difração de Bragg: $\lambda = d \sin \phi$

$$d = 2.15 \text{ \AA} \quad \phi = 50^\circ \quad \lambda = 1.65 \text{ \AA}$$

Usando a relação de Broglie para elétrons acelerados:

$$V = 54 \text{ V}$$

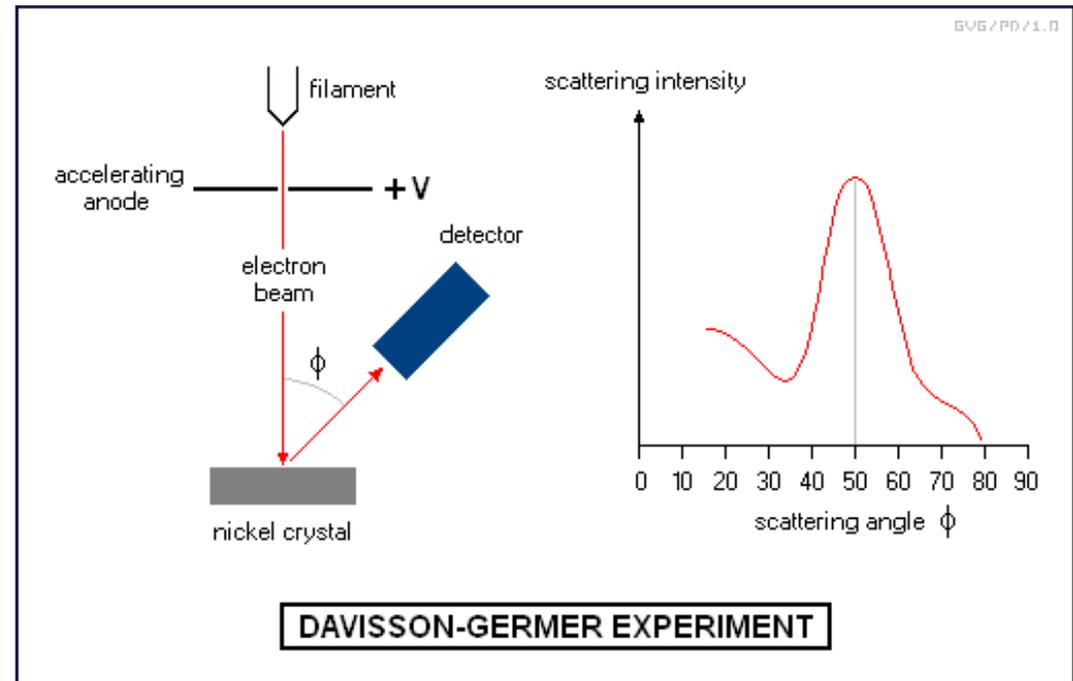
$$E = 54 \text{ eV} = 54 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

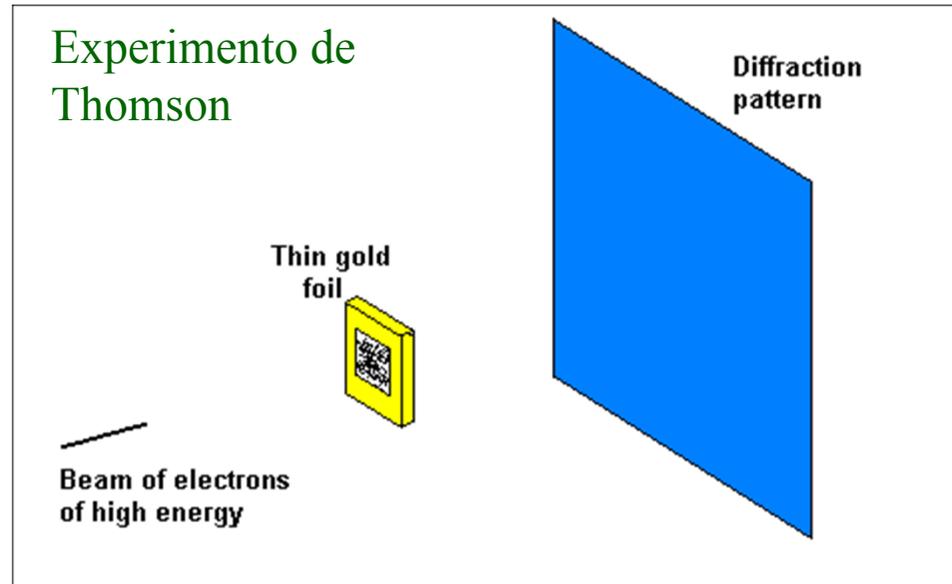
$$\lambda = 1,67 \text{ \AA}$$

que é muito próximo do valor obtido por difração e mostra o comportamento ondulatório dos elétrons



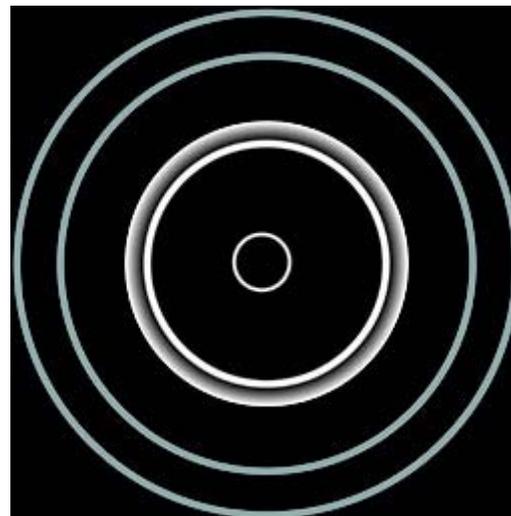
Difração eletrônica

Davisson e Thomson
receberam o prêmio
Nobel em 1937

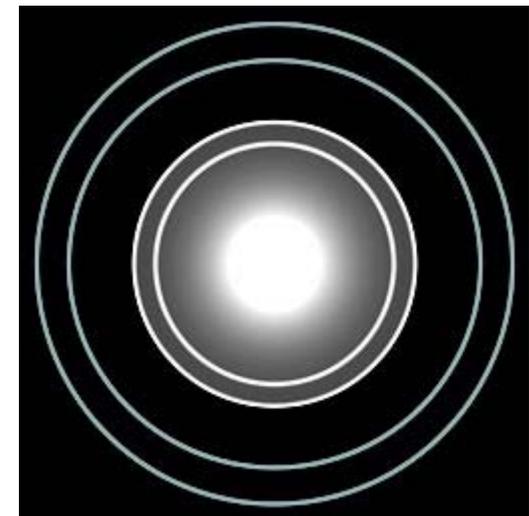


The beam of electrons of high energy causes the creation of the diffraction pattern on the screen when passing through the thin foil.

raios – X



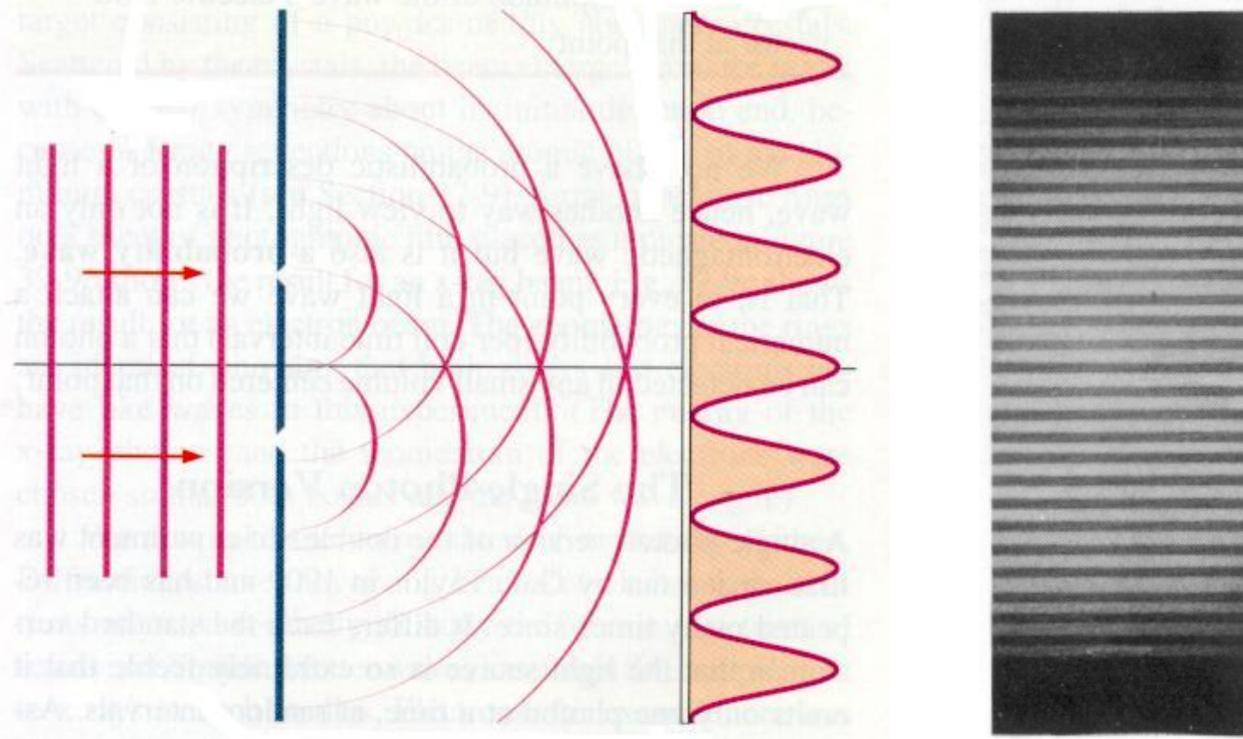
elétrons



- Os resultados aqui apresentados para elétrons são compatíveis com os dos fótons através da fenda dupla

A experiência de Young

- Os experimentos de difração eletrônica indicam que, depois de passar por duas fendas, partículas suficientemente pequenas (elétrons, por exemplo) apresentam uma **figura de interferência** ao serem detectadas num anteparo.



Prob. 4:

Se o comprimento de onda de de Broglie de um próton é 100 fm,

a) qual é a velocidade do próton?

b) A que diferença de potencial deve ser submetido o próton para chegar a esta velocidade?

$$\text{a) } p = m_p v = \frac{h}{\lambda} \quad \rightarrow \quad v = \frac{h}{m_p \lambda}$$

$$v = \frac{h}{m_p \lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{(1.675 \times 10^{-27} \text{ kg})(0.100 \times 10^{-12} \text{ m})} = 3.96 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } eV = \frac{m_p v^2}{2} \quad \rightarrow \quad V = \frac{m_p v^2}{2e}$$

$$V = \frac{m_p v^2}{2e} = \frac{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3.96 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})} = 8.18 \times 10^4 \text{ V} = 81.8 \text{ kV}$$

A função de onda

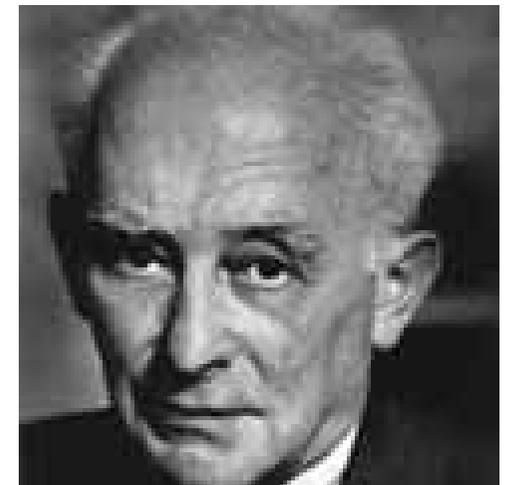
A nossa conclusão sobre tudo o que foi dito até agora é que, dada uma partícula atômica ou um fóton, este objeto pode ser descrito pela chamada *amplitude de probabilidade* $\psi(\vec{r}, t)$, ou *função de onda*, à qual podemos aplicar:

- *Princípio da superposição*: $\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$

- *Interpretação probabilística*: $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
(Max Born)

$$\int_V \rho(\vec{r}, t) d^3 r = 1$$

A função de onda carrega a informação máxima que podemos ter sobre o sistema em questão.



Dualidade e complementaridade

Assim, as propriedades ondulatórias e corpusculares coexistem.

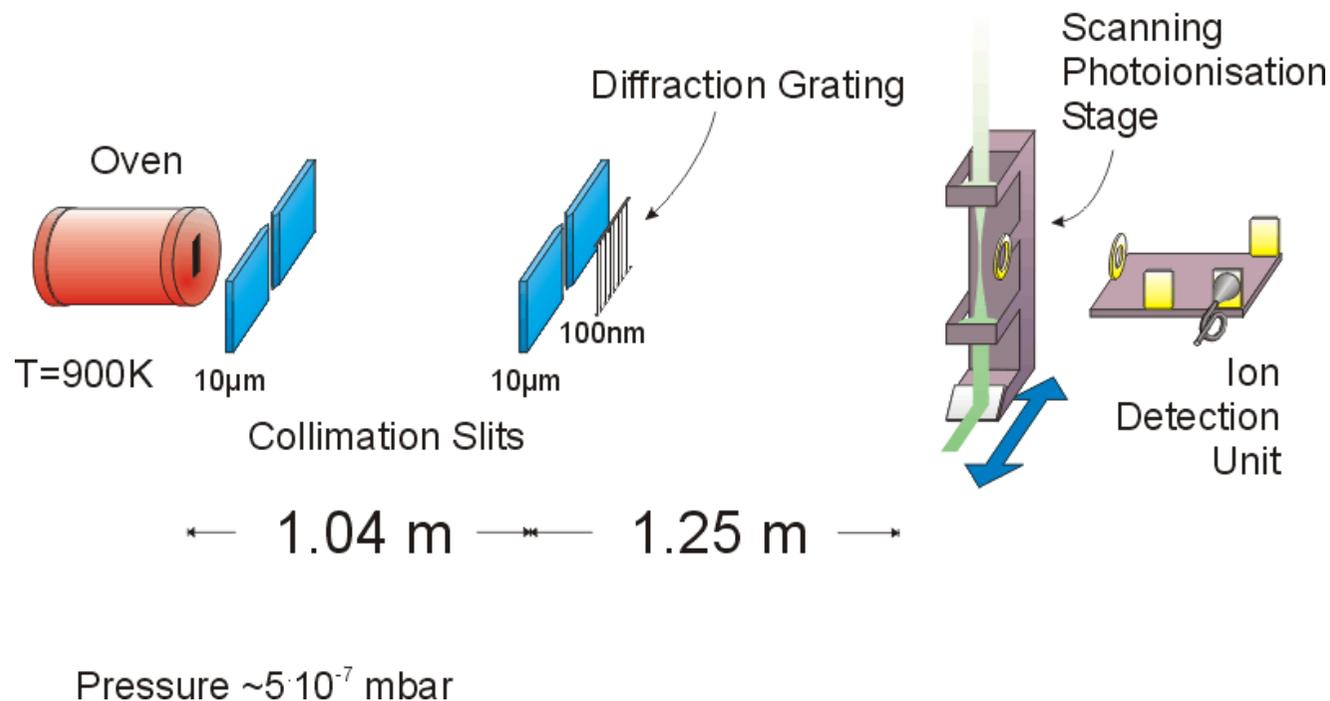
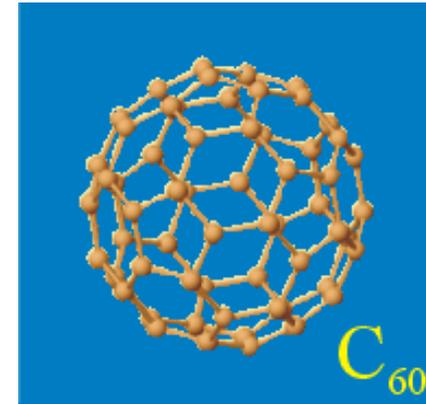
Esta é a chamada dualidade onda-partícula.

Entretanto, não há nenhuma forma destas duas propriedades serem testadas simultaneamente. Ou fazemos um esquema de medida onde o aspecto corpuscular seja evidenciado ou um que revele o caráter ondulatório do sistema em questão.

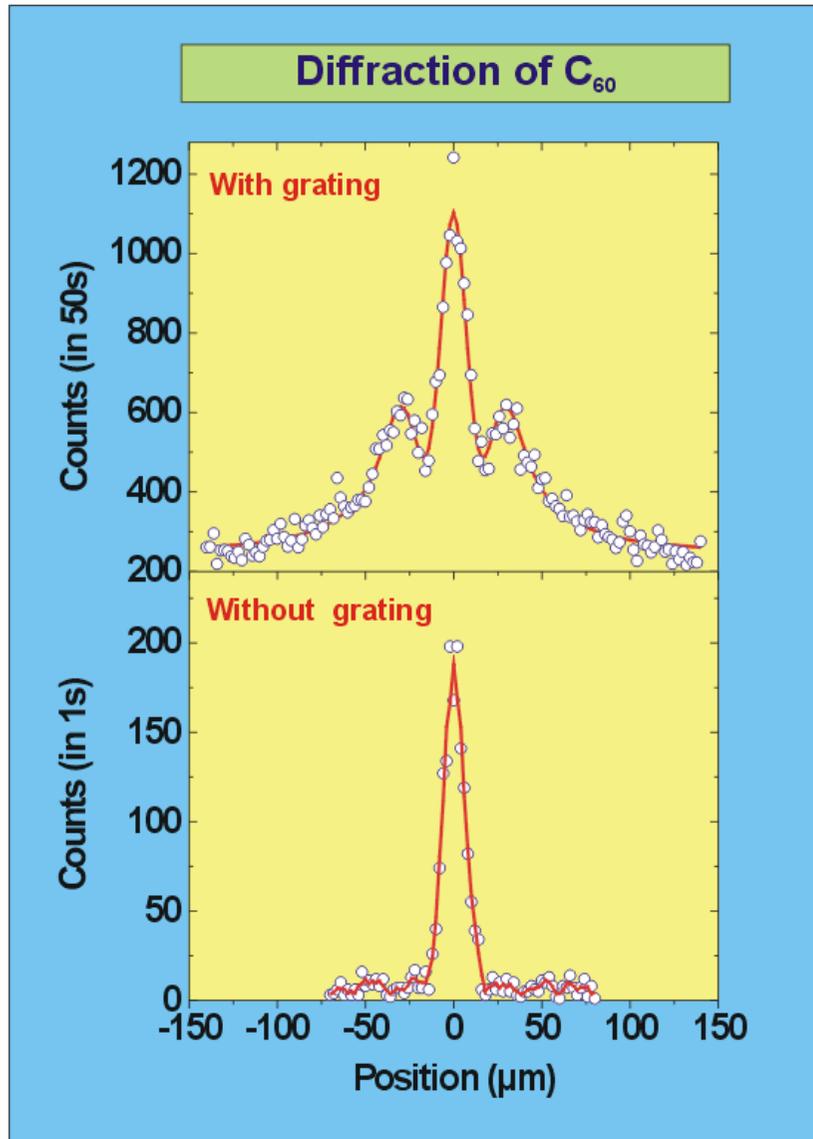
Este é o *princípio da complementaridade*, que ficou bem claro na experiência de Young que analisamos.

Interferência de objetos complexos

Recentemente (1999), foi mostrado que moléculas com um grande número de átomos também podem apresentar uma figura de interferência.



Interferência de objetos complexos



Nature 401 (1999) 1131