# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## Escola de Engenharia de Lorena – EEL

# *“LOB1021 - FÍSICA IV“*

***Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior***

***Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)***
***Escola de Engenharia de Lorena (EEL)***
***Universidade de São Paulo (USP)***
***Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970***
***durval@demar.eel.usp.br***
***www.demar.eel.usp.br/docentes ou www.eel.usp.br (Página dos professores)***

# UNIDADE 7 (Parte b) -

# Teoria da Relatividade Restrita II

# OPCIONAL

- ESTUDE SE TIVER INTERESSE NO ASSUNTO.
- NÃO SERÁ PEDIDO EM AVALIAÇÕES.

# As transformações de Lorentz

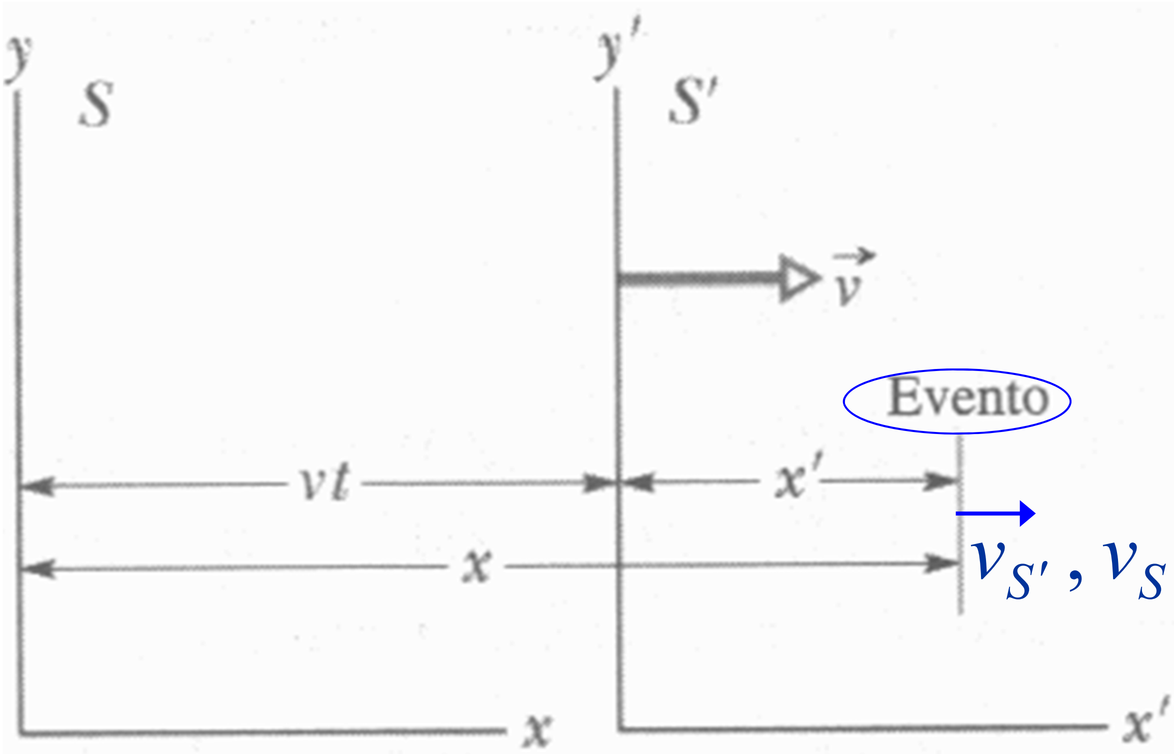
•Antes de *Einstein* os físicos supunham que as coordenadas espaciais e temporais estivessem relacionadas segundo a *transformação de Galileu*:

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

$$v_{S'} = v_S - v$$



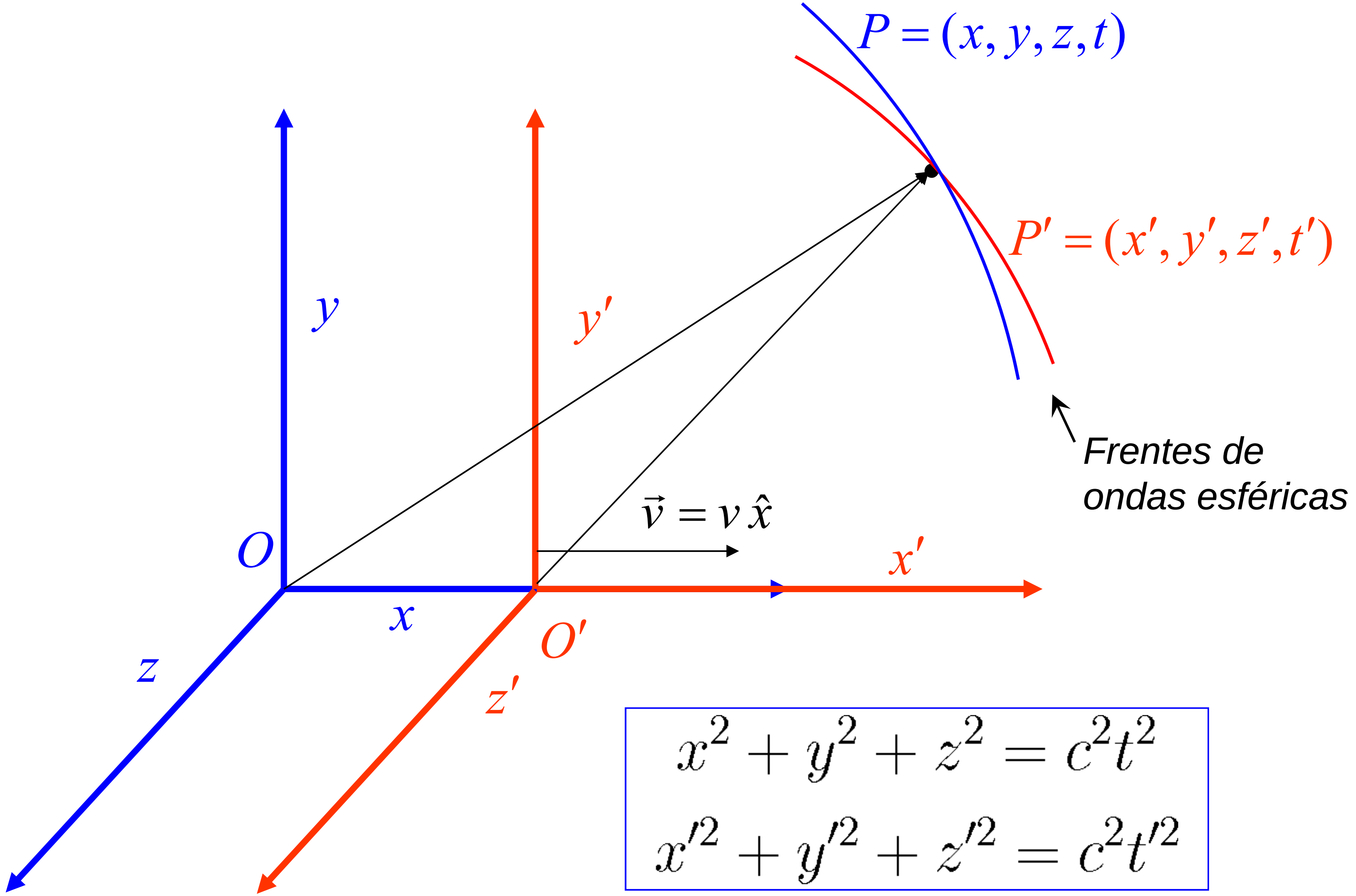
# As transformações de Lorentz

•O espaço e o tempo em diferentes referenciais devem sofrer modificações para que a luz se propague com a mesma velocidade, ***c*** **,** em todos eles.

•Se um sinal luminoso é emitido em $O$=$O'$=**0** em $t$=$t'$=0, a sua frente de onda deve se propagar com a mesma velocidade, ***c*** **,** em ambos os referenciais. Portanto, devemos ter:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \Longleftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

# As transformações de Lorentz




$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

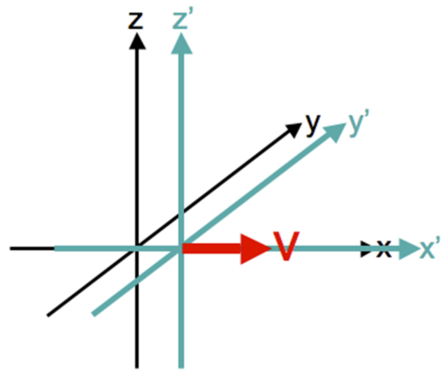
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

# As transformações de Lorentz

•Para que se tenha frentes de ondas esféricas, com velocidade $c$, nos dois sistemas de coordenadas, pode-se demonstrar que as medidas de tempo e espaço nos dois sistemas de coordenadas devem satisfazer as Transformações de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt)\,; \qquad y' = y\,; \qquad z' = z$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$



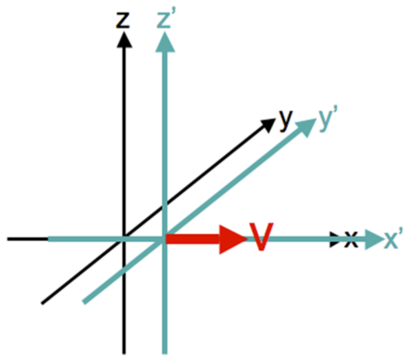

•Para $v << c$ temos $\gamma \approx 1$ e a *transformação de Lorentz* reduz-se à *transformação de Galileu*.

•A transformação pode ser invertida se trocarmos o sinal de ***v*** e os índices linha:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad ; \qquad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

# As transformações de Lorentz

•Se, no referencial ***S***, dois eventos estão separados por uma diferença de coordenada $\Delta x = x_2 - x_1$ ; e ocorrem em dois instantes de tempo separados por $\Delta t = t_2 - t_1$ , no referencial ***S'*** teremos:




$$\boxed{\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad ; \qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)}$$

•Vemos que as noções de espaço e tempo, como entes independentes, não têm mais sentido; o que temos é um ente único: o *espaço-tempo*.

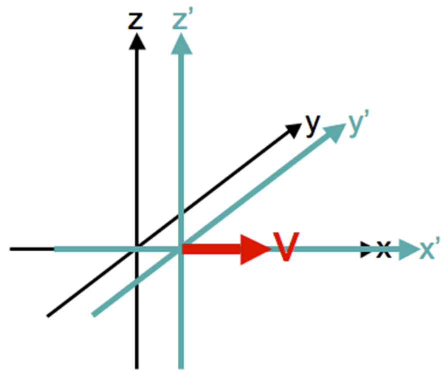
•Podemos também inverter as transformações acima:

$$\boxed{\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \quad ; \qquad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')}$$

# As transformações de Lorentz

## Simultaneidade

•Se dois eventos ocorrem no mesmo instante no sistema $S'$, mas em pontos distantes, temos:




$$S': \quad \boxed{\Delta t' = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\Delta x' \neq 0}$$

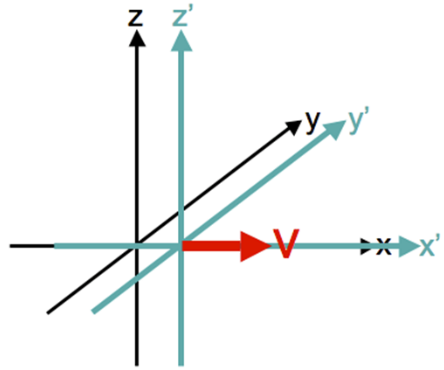
$$S: \quad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \Longrightarrow \Delta t = \gamma \frac{v}{c^2}\Delta x'$$

Eventos simultâneos em $S'$ não são simultâneos em $S$, se ocorrem em pontos distintos.

# As transformações de Lorentz

## Dilatação do tempo

•Vamos supor que dois eventos ocorram no mesmo local em *S'*, mas em tempos diferentes, então:




$S':$ $\boxed{\Delta x' = 0}$ e $\boxed{\Delta t' \neq 0}$

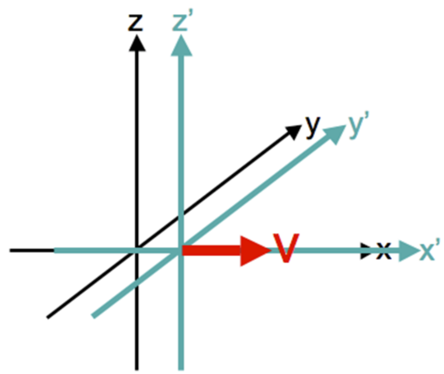
$$S: \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \Rightarrow \Delta t = \gamma\,\Delta t'$$

(Este é o exemplo do relógio de luz, onde $\Delta t' = \Delta t_0$ , o intervalo de tempo próprio.)

# As transformações de Lorentz

## Contração das distâncias

- Se uma régua está em repouso no sistema *S'* o seu comprimento próprio é $L_0 = \Delta x'$. No sistema *S* a régua passa com uma velocidade $v$ , e o seu comprimento $\Delta x$ é determinado pela posição dos seus dois extremos *num mesmo instante*, então:




$$\boxed{\Delta t = 0}$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \frac{L_0}{\gamma}$$

# As transformações de Lorentz

•Vimos, no exemplo dos múons, que estes chegam a Terra com $v \approx 0{,}998c$. Logo, no seu referencial, os *10,4 km* percorridos na atmosfera (no referencial da Terra) são vistos como:

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma}L_0 = \sqrt{1-(0,998)^2}\,10,4km = 0,66km.}$$

Esta é justamente a distância que o múon é capaz de percorrer, em seu referencial, antes de decair:

$$L = (0,998c)\,\Delta t_0 = (0,998c)\,2,200\mu s = 0,66km.$$

# As transformações de Lorentz

•Se, no referencial ***S***, dois eventos estão separados por uma diferença de coordenada $\Delta x = x_2 - x_1$ ; e ocorrem em dois instantes de tempo separados por $\Delta t = t_2 - t_1$ , no referencial ***S'*** teremos:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$$

•Vemos que as noções de espaço e tempo, como entes independentes, não têm mais sentido; o que temos é um ente único: o *espaço-tempo*.

•Podemos também inverter as transformações acima:

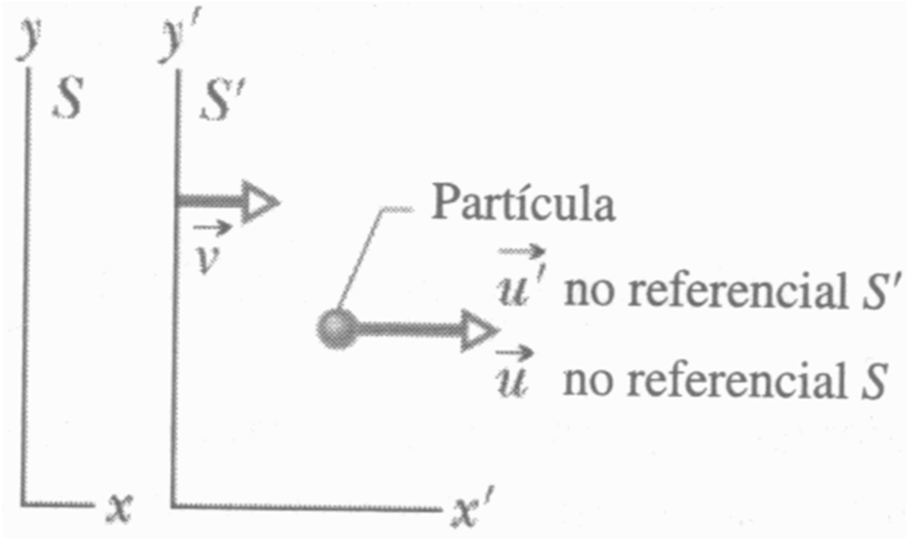
$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \qquad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$$

# A relatividade das velocidades

Vimos que: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ $\quad$ $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$

Portanto: $dx' = \gamma(dx - vdt)$ $\quad$ $dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)$

Logo: $\boxed{u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}}$




Na transformação clássica de Galileu teríamos ($v << c$) : $\boxed{u'_x = \frac{dx'}{dt'} = u_x - v}$

# A relatividade das velocidades

Podemos ainda deduzir expressões para as velocidades nos outros eixos:

$$\boxed{u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}\,u_y}{1-\dfrac{v\,u_x}{c^2}}} \qquad \boxed{u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}\,u_z}{1-\dfrac{v\,u_x}{c^2}}}$$

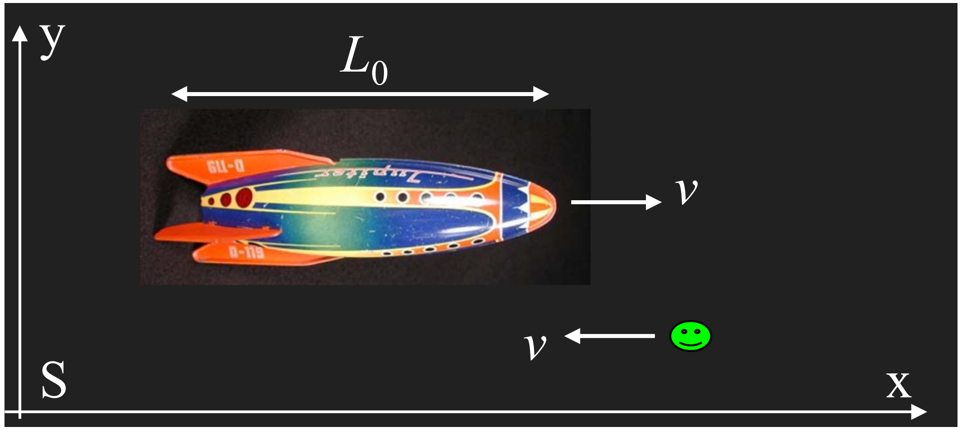
As transformações podem ser invertidas, trocando-se os índices linha e $v$ por $-v$. Então, se

$$\boxed{u'_x = c} \quad \text{teremos:} \quad \boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1+\dfrac{v\,u'_x}{c^2}} = c}$$

➢ A transformação estará coerente com o fato da velocidade da luz ser a mesma em todos os referenciais, e que nenhuma velocidade pode excedê-la.

Prob. 3: Uma espaçonave cujo comprimento próprio é 350 m está se movendo com uma velocidade de 0,82c em um certo referencial. Um micrometeorito, também com velocidade de 0,82c neste referencial, cruza com a espaçonave viajando na direção oposta. Quanto tempo o micrometeorito leva para passar pela espaçonave, do ponto de vista de um observador a bordo da espaçonave ?

$$\begin{aligned} L_0 &= 350 \text{ m} \\ v &= 0{,}82 \text{ c} \end{aligned}$$




Velocidade do meteorito em relação à nave:

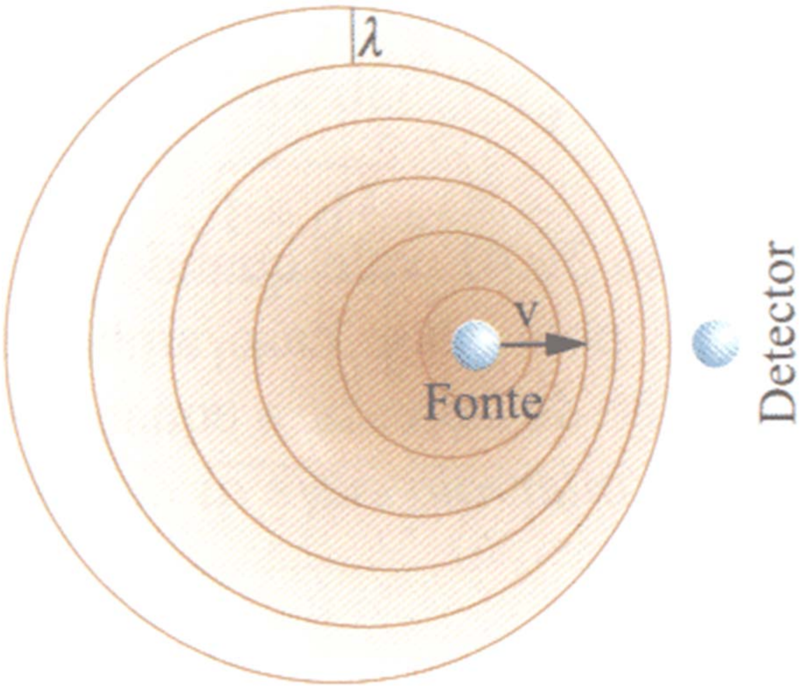
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{-v - v}{1 - \dfrac{v(-v)}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \dfrac{v^2}{c^2}} = -\frac{1{,}64\, c}{1 + (0{,}82)^2} \approx -0{,}98\, c$$

$$v' \approx -2{,}94 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{|v'|} \approx \frac{350 \text{ m}}{2{,}94 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 1{,}19\ \mu s$$

# O efeito Doppler da luz

• No efeito Doppler do som é necessário distinguir as situações em que ele é causado pelo movimento da **fonte** ou do **observador**. Isto, porque o som propaga-se no ar, e ambos podem ter velocidades relativas a este. Já para a luz, que propaga-se no vácuo, importa apenas a velocidade relativa entre a fonte e observador.



# O efeito Doppler da luz

Se o observador $O$ em $S$ descreve uma onda eletromagnética pela expressão $\sin(kx-\omega t)$ o observador $O'$ em $S'$ deverá observar $\sin(k'x'-\omega' t')$ e, pelo princípio da relatividade, devemos ter

$$\boxed{kx-\omega t = k'x'-\omega' t'}$$

Então, usando que $x=\gamma(x'+vt')$ e $t=\gamma(t'+\frac{v}{c^2}x')$

podemos mostrar que:

$$\boxed{k'=\gamma\left(k-\frac{v\omega}{c^2}\right)} \quad \text{e} \quad \boxed{\omega'=\gamma(\omega-vk)}$$

# O efeito Doppler da luz

Mas, como:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'} \qquad\qquad k' = \gamma\, k(1-\beta) \quad \text{e} \quad \omega' = \gamma\, \omega(1-\beta)$$

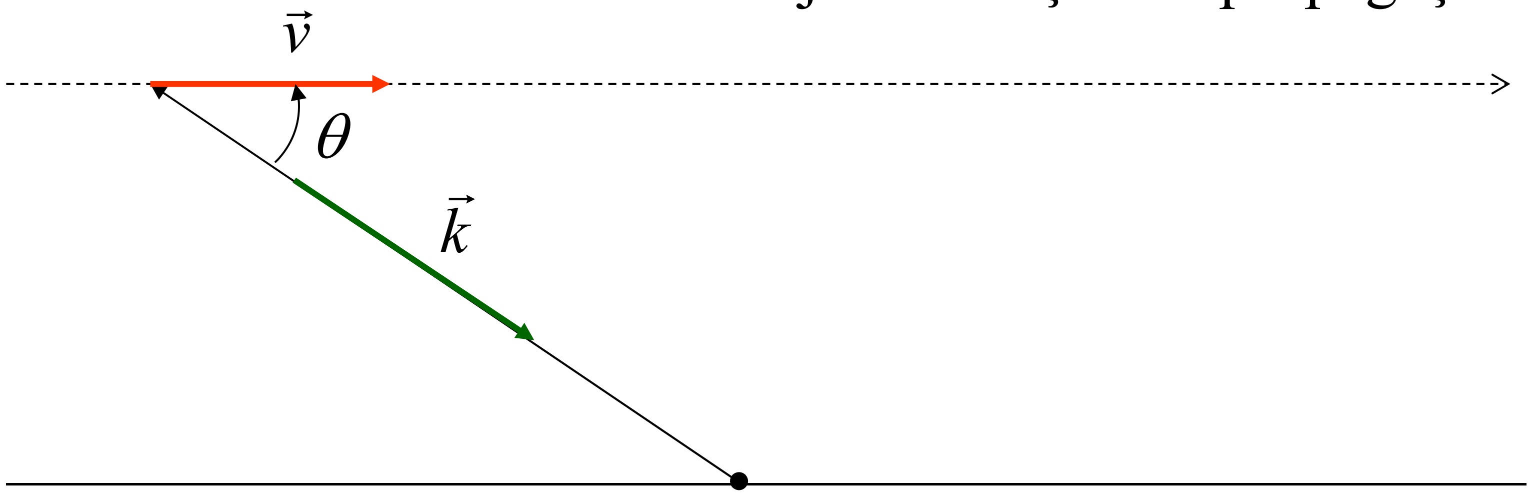
$$\Downarrow$$

$$\boxed{f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$$

Esta expressão é válida no caso do observador e a fonte estarem se *afastando*. Se estiverem se *aproximando* devemos trocar $\beta$ por $-\beta$ .

# O efeito Doppler da luz

Caso o movimento relativo não seja na direção de propagação




$$\omega' = \gamma\,\omega\left(1 - \beta\cos\theta\right)$$

Se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ , *"Doppler transverso"*. Note que aqui o objeto em

movimento emite radiação com freqüência conhecida $\omega' = \omega_0$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}$$

# O efeito Doppler na astronomia

- Vamos supor que uma estrela se afasta da Terra com uma velocidade relativamente pequena, $\beta \ll 1$. Neste caso temos:

$$\boxed{f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq f_0\,(1-\beta)}$$

Em termos dos comprimentos de onda, temos:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad \boxed{v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}c = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c}$$

- Logo, sendo $v > 0$ temos $\lambda > \lambda_0$ $\Rightarrow$ Deslocamento da luz para o vermelho

- Se a estrela estiver se aproximando ($v < 0$) teremos $\lambda < \lambda_0$ $\Rightarrow$ Deslocamento da luz para o azul

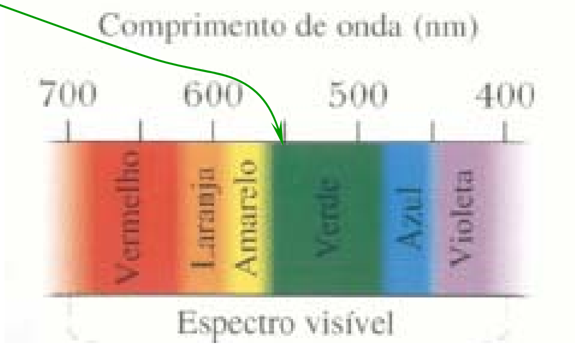
Prob. 4: Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de 0,20c. Uma fonte luminosa na popa da nave parece azul (λ = 450 nm) para os passageiros. Determine: **(a)** o comprimento de onda e **(b)** a cor (azul, verde, amarela...) da luz emitida pela nave, do ponto de vista de um observador terrestre.


- Efeito Doppler da luz (se afastando):

$$\boxed{f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \Rightarrow \boxed{\frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}}$$

a)

$$\boxed{\lambda' = \lambda\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} = 450\,\mathrm{nm}\left(\frac{1,2}{0,8}\right)^{1/2} \approx 551\,\mathrm{nm}}$$



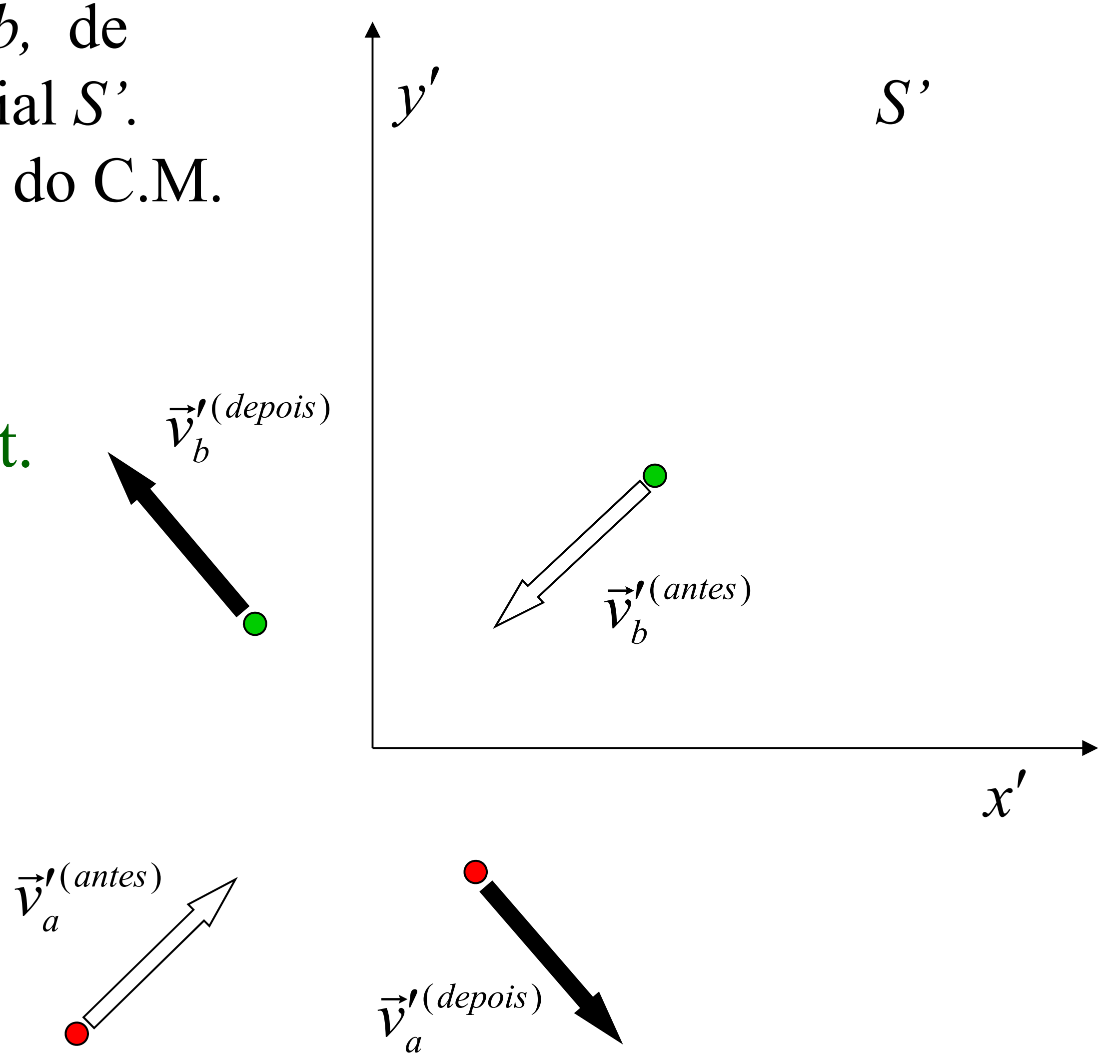

b) Luz "verde-amarelada":

# Dinâmica relativística

Colisão das partículas *a* e *b*, de mesma massa, no referencial *S'*. Por exemplo, o referencial do C.M. das partículas

$$\vec{F}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & m\vec{v}_a^{\,\prime(antes)} + m\vec{v}_b^{\,\prime(antes)} = \\ & m\vec{v}_a^{\,\prime(depois)} + m\vec{v}_b^{\,\prime(depois)} \end{aligned}}$$



# Momento linear relativístico

Usando a fórmula para a transformação de Lorentz das velocidades:

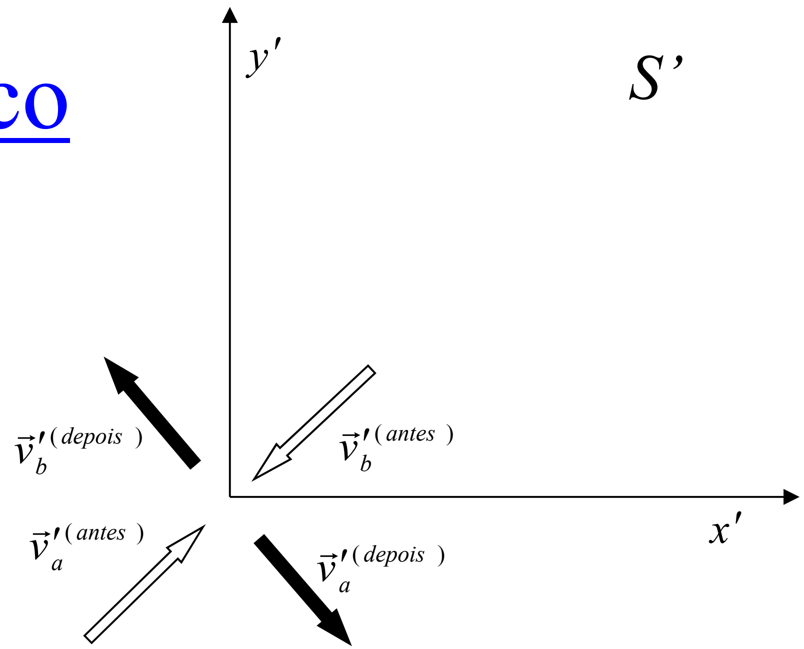
$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}\, u'_z}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}\, u'_y}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}}$$

... podemos escrever as componentes das velocidades no referencial *S,* que se move em relação a *S'* com velocidade constante, $-v$ , ao longo do eixo $x$ ...

# Momento linear relativístico




$$v'^{antes}_{ax} = v'_x \qquad v'^{antes}_{bx} = -v'_x$$

$$v'^{antes}_{ay} = v'_y \qquad v'^{antes}_{by} = -v'_y$$

$$v'^{depois}_{ax} = v'_x \qquad v'^{depois}_{bx} = -v'_x$$

$$v'^{depois}_{ay} = -v'_y \qquad v'^{depois}_{by} = v'_y$$

transformação de Lorentz das velocidades

$$v^{antes}_{ax} = \frac{v'_x + v}{1 + (v'_x v / c^2)} \qquad v^{antes}_{bx} = \frac{-v'_x + v}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

$$v^{depois}_{ax} = \frac{v'_x + v}{1 + (v'_x v / c^2)} \qquad v^{depois}_{bx} = \frac{-v'_x + v}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

$$v^{antes}_{ay} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v'_y}{1 + (v'_x v / c^2)} \qquad v^{antes}_{by} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}\, v'_y}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

$$v^{depois}_{ay} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}\, v'_y}{1 + (v'_x v / c^2)} \qquad v^{depois}_{by} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v'_y}{1 - (v'_x v / c^2)}$$

# Momento linear relativístico

$$mv_{a,x}^{antes} + mv_{b,x}^{antes} = mv_{a,x}^{depois} + mv_{b,x}^{depois}$$

$$mv_{a,y}^{antes} + mv_{b,y}^{antes} \neq mv_{a,y}^{depois} + mv_{b,y}^{depois}$$

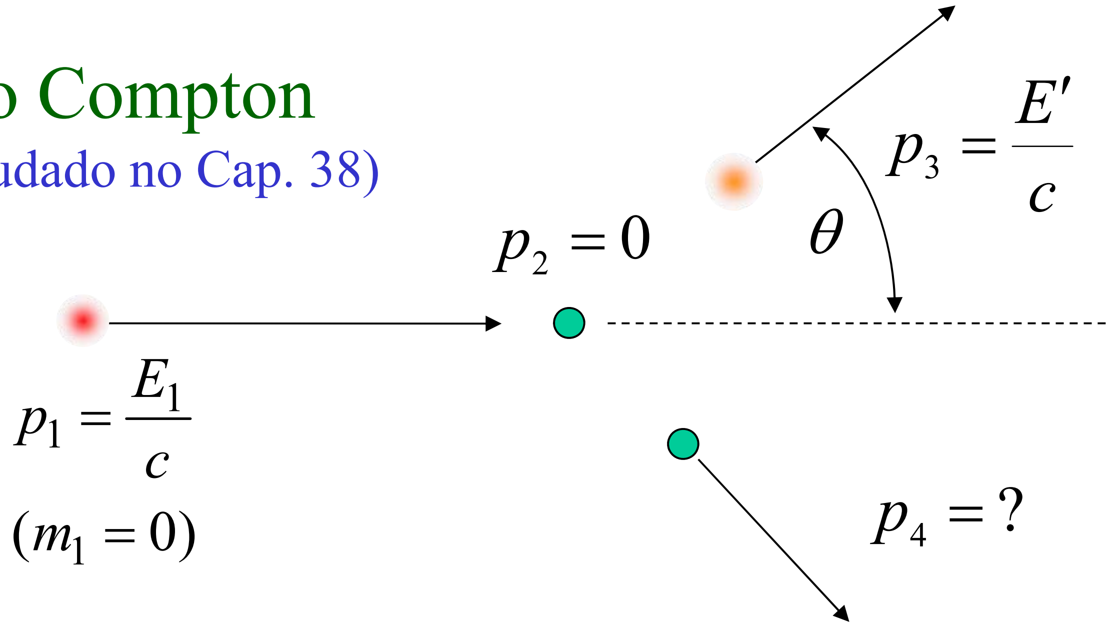
⇓

- $\vec{p} = m\vec{v}$ não nos fornece uma expressão para o momento linear que seja invariante pelas transformações de Lorentz.

# Colisões relativísticas

• Efeito Compton

(será estudado no Cap. 38)




$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4}$$

$$\boxed{E_1 + E_2 = E_3 + E_4}$$