UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena-EEL

LISTA AULA3: Cálculo III — TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata — **Data**:24 de agosto de 2015

1. Considere a a transformação em coordenadas polares que relaciona cada ponto do plano $r\theta$ com o ponto do plano xy através da relação $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$, onde $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = \sin\theta$. Em cada um dos exemplos a seguir é dada uma região B no plano xy, determine a região S no plano $r\theta$ tal que $P(S) = B$ e faça um gráfico da situação.

   a. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

   b. $B = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq 0\}$.

   c. $B = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   d. $B = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

   e. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 4x \leq 0, y \geq 0\}$.

   f. B é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 3$ e as retas $y = x$ e $y = 3x$.

2. Utilizar mudança de coordenadas polares para calcular $\int\int_B \ln(x^2 + y^2 + 1)dxdy$, onde B é a região determinada pelo circulo $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

3. Queremos calcular $\int\int_B \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$ onde B é a região limitada pela elipse $\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$. para isto considere a mudaną de coordenadas $T(r,\theta) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$.

   a. Verifique que T satisfaz todas as condições do teorema de mudança de variáveis.

   b. Determine a região S no plano (r,θ) tal que $T(S) = B$.

   c. Calcule $\int\int_B \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$

4. Calcule a integral da função $f(x,y) = 1$ sobre a região $B = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + 4y^2 \leq 16\}$. (Ajuda:Adapte a mudança de variáveis do exemplo anterior para ajudar nos cálculos)

5. Utilizar o teorema de mudança de variáveis para calcular $\int\int_B ydxdy$ onde B é o paralelogramo limitado pelas retas $y = x - 2$, $y = x + 1$, $y = 2 - x$ e $y = -x$.

6. Utilizar o teorema de mudança de variáveis para calcular $\int\int_B e^{x+2y}dxdy$ onde B é a região determinada pela desigualdade $|x| + |y| \leq 1$.

7. Calcular $\int\int_B \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$, onde B é a região no primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$.