

AULA 8

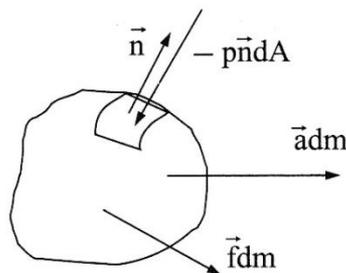
Análise Diferencial: Equação fundamental do movimento de uma partícula de fluido Ideal e Real

Prof. Geronimo Virginio Tagliaferro

Equação de Euler
Equação de Navier-Stokes

Equação de Euler

- ✓ Vamos desconsiderar as forças viscosas, ou seja, viscosidade nula.
Teremos um fluido ideal.
- ✓ As forças de contato irão se resumir ao efeito das pressões.
- ✓ Forças de campo: $\vec{f}dm$
- ✓ Forças de campo para gravidade: $\vec{g}dm$
- ✓ Força de pressão num ponto qualquer da superfície: $-p\vec{n}dA$



Logo:

$$\int_V \vec{f}dm - \int_A p\vec{n}dA = \int_V \vec{a}dm$$

Pode-se verificar que: $\int_A p\vec{n}dA = \int_V \text{grad } p \, dV$ e portanto: $\int_V \rho \vec{f}dV - \int_V \text{grad } p \, dV = \int_V \rho \vec{a}dV$

ou, finalmente:

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

A Equação 11.15 em coordenadas cartesianas resulta em:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

A Equação 11.15 em coordenadas cilíndricas resulta em:

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

No caso geral, essas três equações podem apresentar cinco incógnitas:

- a) O campo de velocidades, constituído por v_x , v_y e v_z em coordenadas cartesianas, ou v_r , v_θ e v_z em coordenadas cilíndricas;
- b) A distribuição das massas específicas;
- c) A distribuição das pressões.

Neste caso, o sistema de equações apresentado terá necessidade do auxílio de mais duas equações:

Equação da continuidade: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$

Equação de estado: $\rho = f(p, T)$ T – outra equação da distribuição da temperatura

- Dependendo do problema o número de equações é grande e de difícil solução.
- Existem simplificações que tornam a solução mais confortável.

Vamos estudar alguns casos para familiarizarmos com as equações.

Fluido incompressível em repouso, campo da gravidade. $\vec{f} = \vec{g}$

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \text{ onde: } \vec{f} = \vec{g}$$

Sabe-se que o campo da gravidade deriva de um potencial escalar U , significando que existe U tal que $\text{grad } U = \vec{g}$.

Isto é:
$$\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = -g \vec{e}_z$$

ou
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -g, \text{ logo } U = -gz \text{ (} U = 0 \text{ para } z = 0\text{)}$$

Nesse caso, a equação de Euler resulta em:

$$\vec{a} = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Como:
$$\rho = c^{te}, \quad \vec{a} = \text{grad} \left(U - \frac{p}{\rho} \right)$$

Como por hipótese:
$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \text{grad} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) \vec{e}_z = 0$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) = 0 \Rightarrow U - \frac{p}{\rho} = c^{te}(x) \Rightarrow -gz - \frac{p}{\rho} = c^{te}(x)$$

ou, como $\rho = c^{te} \rightarrow p = c^{te}(x)$.

O mesmo acontece na direção de y , concluindo-se o que já se sabia pelo teorema de Stevin: que, num plano horizontal, num fluido em repouso, a pressão é constante em todos os pontos.

Obtém-se, ainda:

$$-gz - \frac{p}{\rho} = c^{te}(z)$$

ou

$$p + \gamma z = c^{te}$$

que nada mais é do que a expressão do teorema de Stevin.

$$p + \gamma z = c^{te}$$

Equilíbrio relativo para fluido incompressível

- Vamos considerar que o fluido está em movimento em relação a um inercial, porém estará em repouso em relação ao recipiente, no qual se fixará o sistema de referência.
- Estando o recipiente acelerado, do ponto de vista do sistema de referência fixo, a aceleração será vista como uma força de inércia, isto é

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{a}$$

$$\vec{f} - \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

$$\vec{f} - \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

Note-se que, ao passar a aceleração para o outro membro da equação, ela passa a integrar o membro das forças e, sendo a equação igual a zero, pode-se imaginar que, do ponto de vista relativo, o sistema esteja em equilíbrio.

Sendo:

$$\vec{f} = \vec{g} \Rightarrow \vec{g} - \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

ou, como já foi visto, utilizando a noção de potencial escalar:

$$\vec{a} = \text{grad} \left(-gz - \frac{p}{\rho} \right)$$

Portanto:

$$a_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(-gz - \frac{p}{\rho} \right) \rightarrow -gz - \frac{p}{\rho} = a_x x + C$$

ou

$$\frac{p}{\gamma} + z = -\frac{a_x}{g} + C_1$$

e analogamente:

$$\frac{p}{\gamma} + z = -\frac{a_y}{g} + C_2$$

$$\frac{p}{\gamma} + z = -\frac{a_z}{g} + C_3$$

$$\frac{p}{\gamma} + z = -\frac{a_x}{g} + C_3$$

$$\frac{p}{\gamma} + z = -\frac{a_y}{g} + C_3$$

$$\frac{p}{\gamma} + z = -\frac{a_z}{g} + C_3$$

- Geometria do movimento

- ✓ Queremos determinar a trajetória de um partícula.
- ✓ Trajetória: é o lugar geométrico dos pontos ocupados por uma partícula, com o passar do tempo.
- ✓ Partindo das equações paramétricas do movimento em coordenadas cartesianas, temos:

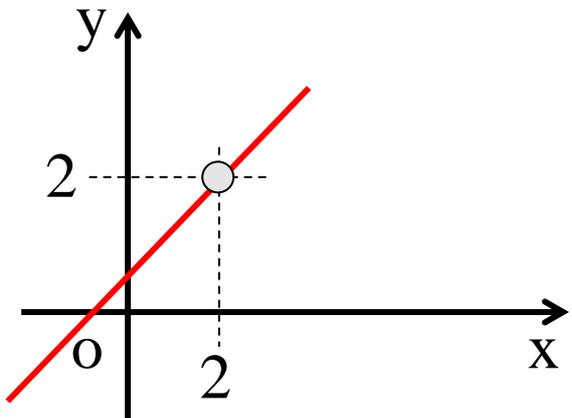
$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x dt \rightarrow \frac{dx}{v_x} = dt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow dy = v_y dt \rightarrow \frac{dy}{v_y} = dt$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \rightarrow dz = v_z dt \rightarrow \frac{dz}{v_z} = dt$$

Eliminando o tempo nas equações, obtêm-se as equações em coordenadas cartesianas que representam a linha geométrica percorrida pela partícula

Linhas de Corrente



Vamos considerar para um mesmo tempo e $z = 0$, temos:

$$\frac{dx}{V_x} = dt \qquad \frac{dy}{V_y} = dt$$

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$$

Logo para outras configurações temos:

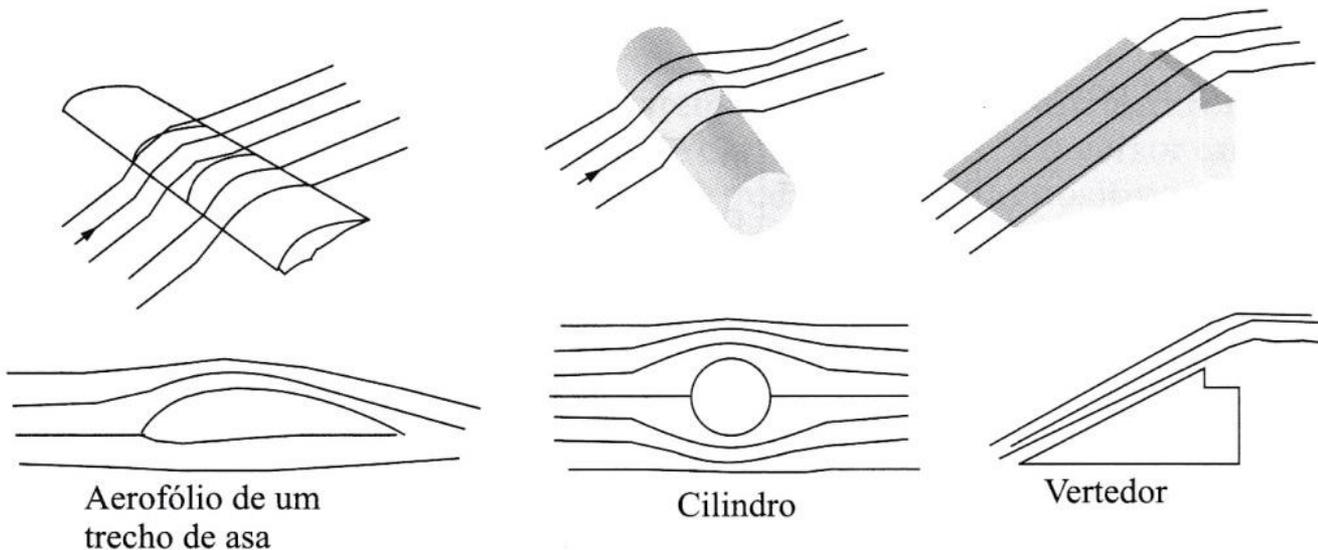
As linhas de corrente é a linha tangente aos vetores da velocidade nos seus pontos de aplicação, num certo instante.

$$v_y dx - v_x dy = 0 \rightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$$

$$v_x dz - v_z dx = 0 \rightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dz}{V_z}$$

$$v_z dy - v_y dz = 0 \rightarrow \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

Escoamento bidimensional de fluido ideal, incompressível



A equação de uma linha de corrente num plano xy qualquer é dada por:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

$$v_x dy - v_y dx = 0$$

$$v_x dy - v_y dx = 0$$

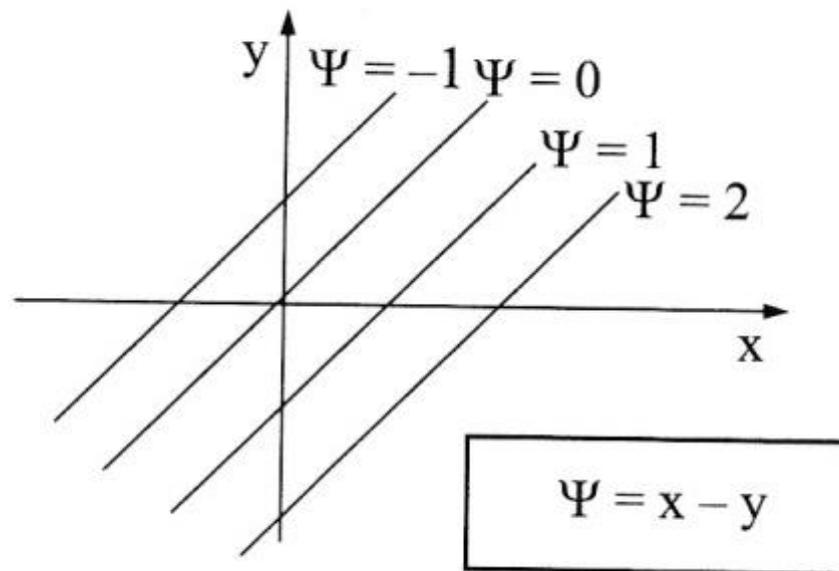
vamos chamar essa equação $\Psi = \text{psi}$

$$d\Psi = v_x dy - v_y dx = 0$$

$\Psi =$ Função de corrente

$$\text{se } d\Psi = 0 \Rightarrow \Psi = C^{te}$$

Nos pontos onde $\psi = C^{te}$, num plano de escoamento bidimensional, deverá pertencer a uma linha de corrente.



O valor da constante denomina-se “cota da linha de corrente”.

Equação de Navier-Stokes

- ✓ Há efeitos da viscosidade. Fluido real.
- ✓ Há formação de tensões de cisalhamento.
- ✓ No movimento da partícula há translação, rotação ou deformação.
- ✓ A previsibilidade só é precisa em escoamento laminar.
- ✓ Movimento em escoamento turbulento precisará dos cálculos de estatística. Foge do nosso foco.
- ✓ Somente em escoamento laminar.

Equação de Navier-Stokes

- ✓ Embora a equação utilize conceitos já introduzidos, não está nas finalidades deste desenvolvimento a sua dedução.
- ✓ Vamos apresentar apenas o resultado.
- ✓ A equação de Navier-Stokes representa a dinâmica da partícula, ou seja, a equação da quantidade de movimento completa com todos os seus termos.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{3} \nu \text{grad} (\text{div } \vec{v}) + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Equação de Euler

Efeito da viscosidade no fluido

Equação de Navier-Stokes

- ✓ O uso da equação de Navier-Stokes para casos gerais é de grande complexidade, exigindo métodos numéricos de integração (software) que fogem do escopo deste estudo.
- ✓ Vamos amenizar a complexidade aplicando a equação para fluidos incompressíveis já que para eles

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

- ✓ A equação se reduz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Equação de Navier-Stokes

onde ∇^2 é o operador laplaceano, dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ em coordenadas cartesianas e}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ em coordenadas cilíndricas}$$

Observar que a Equação 11.39 reduz-se à equação de Euler se o fluido for ideal, isto é, se $\nu = 0$, e no caso de escoamento irrotacional em que $\text{rot } \vec{v} = 0$ e, conseqüentemente, $\nabla^2 \vec{v} = 0$.

Lembrando que no campo da gravidade $\vec{f} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$ (supondo o plano xy horizontal), em coordenadas cartesianas a equação de Navier-Stokes resulta em:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (11.40a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (11.40b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (11.40c)$$

Equação de Navier-Stokes

Em coordenadas cilíndricas, supondo z vertical, a equação resulta em:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right)$$
(11.41a)

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$
(11.41b)

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$
(11.41c)

Exemplos:

1) Dado o escoamento cujo campo de velocidade é:

$$v_x = \frac{x}{t}; \quad v_y = \frac{y}{t} \quad \text{e} \quad v_z = 0$$

Determinar:

- A equação da linha de corrente que passa pelo ponto $P_1 = (2;1;2)$;
- A equação da trajetória que passa por P_1 , no instante $t = 1$;
- A aceleração num instante t qualquer, no ponto P_1 .

Solução:

$$\text{a) } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow \frac{dx}{\frac{x}{t}} = \frac{dy}{\frac{y}{t}} \rightarrow \ln x = \ln y + \ln C_1 \rightarrow x = C_1 y$$

$$\text{Para } x=2 \text{ e } y=1 \rightarrow C_1=2 \Rightarrow x=2y$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \rightarrow dz=0 \rightarrow z=C_2$$

$$\text{Para } z=2 \rightarrow C_2=2 \Rightarrow z=2$$

$$\text{b) } dx = v_x dt \rightarrow dx = \frac{x}{t} dt \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \rightarrow \ln x = \ln t + \ln C_1 \Rightarrow x = C_1 t$$

$$\text{Para } t=1 \text{ e } x=2 \rightarrow C_1=2 \Rightarrow x=2t$$

$$dy = v_y dt \rightarrow dy = \frac{y}{t} dt \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \rightarrow \ln y = \ln t + \ln C_2 \Rightarrow y = C_2 t$$

$$\text{Para } t=1 \text{ e } y=1 \rightarrow C_2=1 \Rightarrow y=t$$

$$\text{Logo: } x=2y$$

$$z=C_3 \Rightarrow z=2$$

Solução:

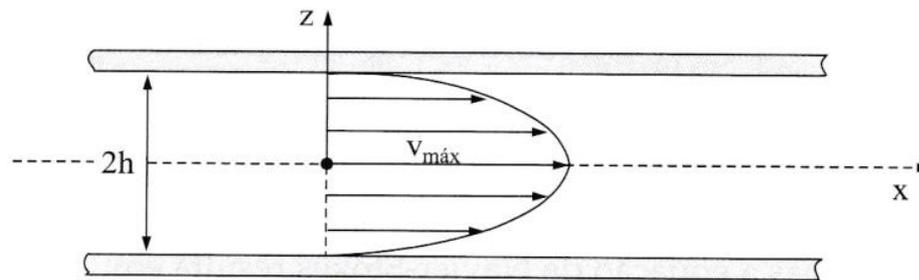
$$c) \quad v_x = \frac{x}{t} = \frac{2}{t} \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{2}{t^2}$$

$$v_y = \frac{y}{t} = \frac{1}{t} \quad \rightarrow \quad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\bar{a} = -\frac{1}{t^2} (2\bar{e}_x + \bar{e}_y)$$

EXEMPLO 1

Dado o escoamento laminar, em regime permanente, de um fluido incompressível entre duas placas planas horizontais, fixas, de dimensões infinitas, determinar a expressão do diagrama de velocidades e a perda de pressão ao longo do escoamento.

**Solução**

Pela figura, observa-se que $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ e que $v_x = f(z)$.

Como o regime é permanente e $v_y = 0$ e $v_z = 0$, as Equações 11.40 resultam em:

- $$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$
- $$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = c^{te}(y)$$
- $$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \Rightarrow p = -\rho g z + f(x) \text{ ou } p + \rho g z = f(x)$$

Esse resultado mostra que, para cada seção $x = c^{te}$, vale o teorema de Stevin, e para facilidade algébrica abre-se $p + \rho g z = p^*$, e $\frac{\partial p^*}{\partial x}$ é função só de x .

Além disso, como $v_x = f(z)$, implica que $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$.

Logo, a equação (a) resulta em: $\frac{\partial p^*}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$, e como p^* só é função de x $\frac{dp^*}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$.

Além disso, como $v_x = f(z)$, então: $\frac{dp^*}{dx} = \mu \frac{d^2 v_x}{dz^2}$.

Como o primeiro membro só é função de x e o segundo membro só é função de z , conclui-se que na realidade ambos correspondem a uma constante e podem ser integrados separadamente. Logo:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \beta$$

$$\frac{dp^*}{dx} = \beta$$

$$\text{Assim, } \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{\beta}{\mu} \quad \text{ou} \quad \frac{dv_x}{dz} = \frac{\beta}{\mu} z + C_1 \quad \text{ou} \quad v_x = \frac{\beta z^2}{2\mu} + C_1 z + C_2$$

$$p^* = \beta x + C_3$$

Condições de contorno

1) Para $z = \pm h \Rightarrow v_x = 0$, logo:

$$0 = \frac{\beta h^2}{2\mu} + C_1 h + C_2 \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{\beta h^2}{2\mu} \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\beta h^2}{2\mu} - C_1 h + C_2$$

2) Para $z = 0 \Rightarrow v_x = v_{\text{máx}} \Rightarrow v_{\text{máx}} = C_2$

Logo: $v_{\text{máx}} = -\frac{\beta h^2}{2\mu} \Rightarrow \beta = -\frac{2\mu v_{\text{máx}}}{h^2}$

Finalmente: $v_x = -\frac{2\mu v_{\text{máx}}}{h^2} \frac{z^2}{2\mu} + \frac{2\mu v_{\text{máx}}}{h^2} \frac{h^2}{2\mu} \Rightarrow v_x = v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)$

A expressão resultante mostra que o diagrama de velocidades é parabólico.

Da outra equação diferencial: $p^* = \beta x + C_3$

Logo: $p^* = -\frac{2\mu v_{\text{máx}}}{h^2} x + C_3$

Adotando para uma coordenada inicial $x = 0 \Rightarrow C_3 = p_0^*$, obtém-se: $p_0^* - p^* = \Delta p^* = \frac{2\mu v_{\text{máx}}}{h^2} x$

O escoamento analisado denomina-se 'escoamento de Poiseuille'.

Exemplo 2 – Considere um escoamento permanente, incompressível e laminar, totalmente desenvolvido, de um fluido newtoniano com viscosidade μ constante, no interior de um duto horizontal de seção circular constante de raio interno R , conforme mostrado na figura abaixo. Determine a distribuição (perfil) de velocidade de escoamento numa seção, a partir da equação de Navier-Stokes, considerando um gradiente de pressão dp/dz constante ao longo do escoamento

