

Aula 8 - Equação da Condução

Cálculo de condução

Parede Plana

Parede Cilíndrica

Parede esférica

Cálculo de condução

- Vamos estudar e desenvolver as equações da condução em nível básico para regime permanente, unidimensional em parede plana.
- Equação de Fourier.

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

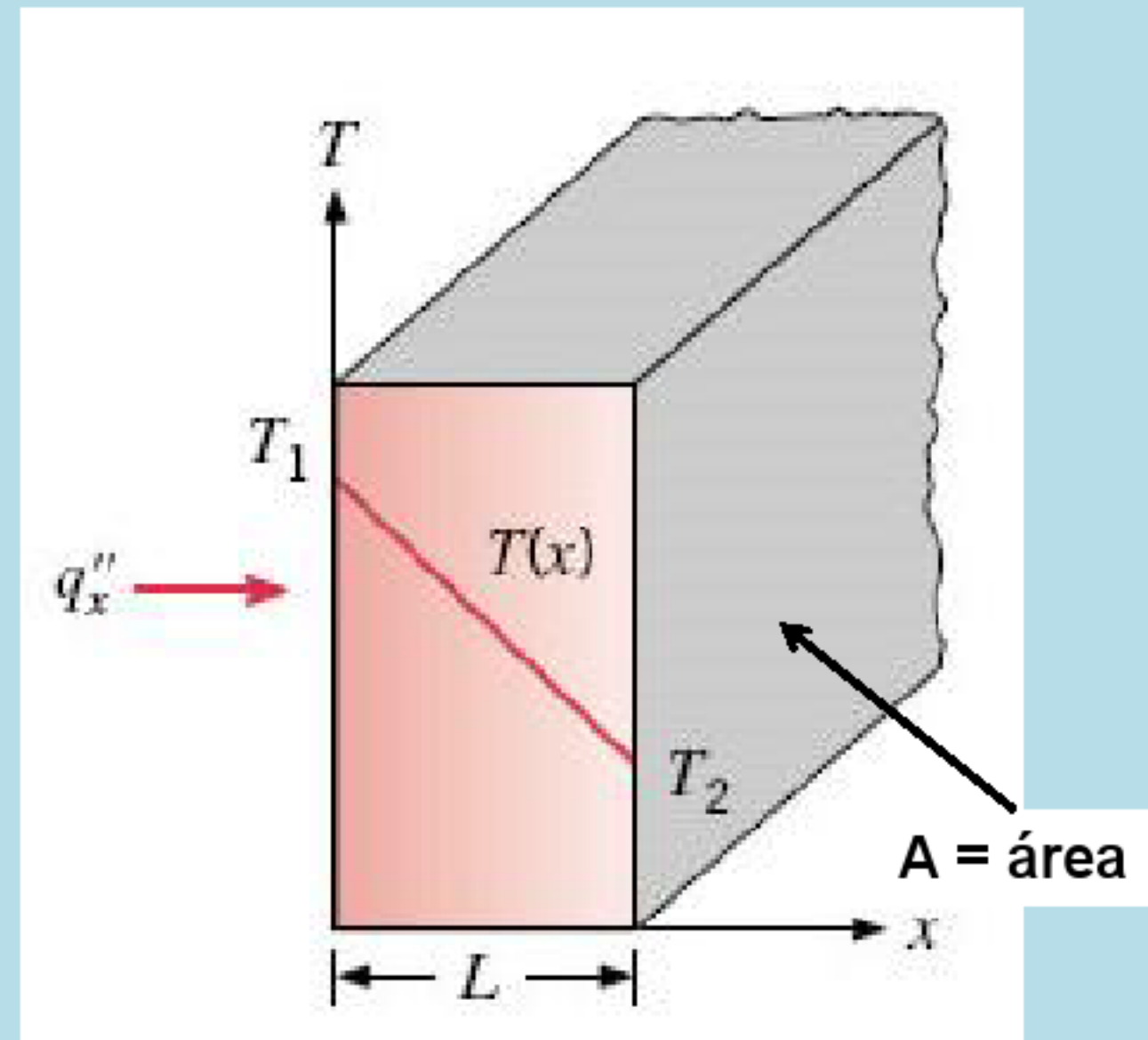
Separando as variáveis, temos:

$$q_x dx = -kA dT \quad \text{integrando} \rightarrow$$

$$q_x \int_0^L dx = -kA \int_{T_1}^{T_2} dT \rightarrow q_x = kA \frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

Fazendo $\Delta T = T_1 - T_2$ e $\Delta x = L$, temos:

$$q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{ou ainda} \quad q_x = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}}$$



Cálculo de condução

- Resistência Térmica.
- Circuito térmico. A “força motriz” que gera a taxa de transf. de calor é o potencial térmico.
- Analogia com circuito elétrico.

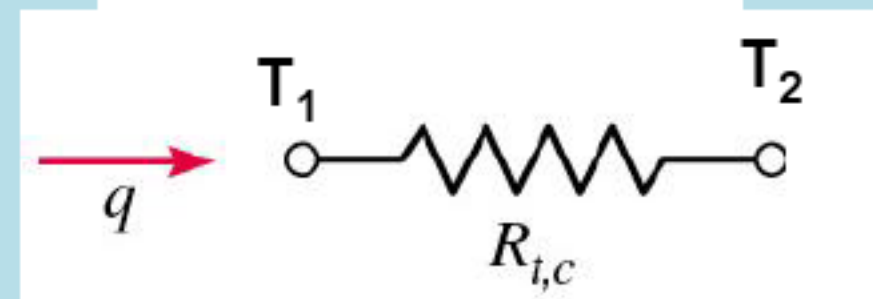
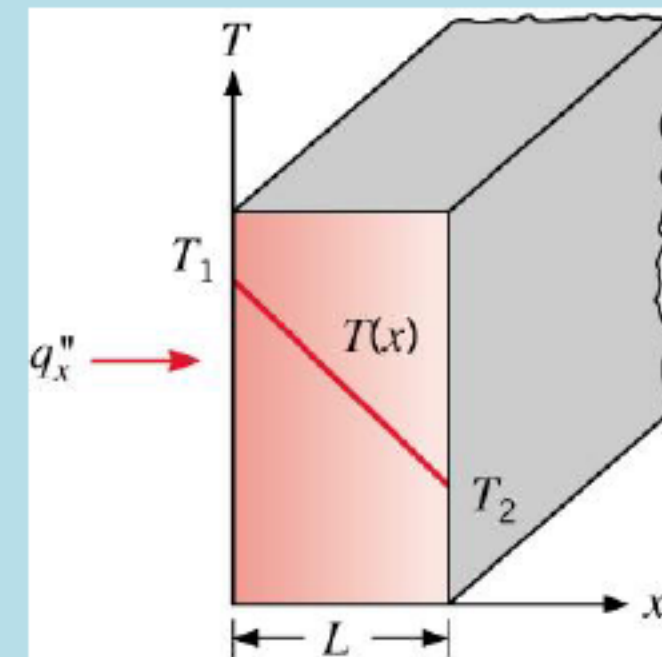
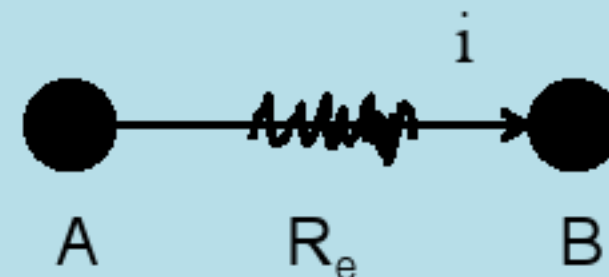
$$i = \frac{U}{R_e} = \frac{V_A - V_B}{R_e}$$

Sendo :

i = intensidade da corrente elétrica.

$U = V_A - V_B$ = diferença de potencial elétrico.

R_e = resistência elétrica.



- Na transferência de calor.

$$q_x = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}} = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{R_{t,c}}$$
$$R_{t,c} = \frac{L}{kA} = \frac{\Delta x}{kA}$$

Cálculo de condução

- **Perfil de temperatura da parede plana.**
- Após ter sido calculada a taxa de transferência de calor, pode-se calcular o perfil de temperatura no sólido, em vez de integrar de 0 a L e de T_1 a T_2 . Agora se faz:
- Para $x = 0 \rightarrow T = T_1$ e para um valor definido de x , $T = T(x)$.

$$q_x \int_0^x dx = -kA \int_{T_1}^{T(x)} dT \rightarrow q_x x = -kA [T(x) - T_1] \rightarrow [T(x) - T_1] = -\frac{q_x x}{kA}$$

Portanto, temos:

$$T_{(x)} = T_1 - \frac{q_x}{kA} x \quad \text{ou em termos de fluxo de calor, } q'' = \frac{q}{A}, \text{ então:}$$

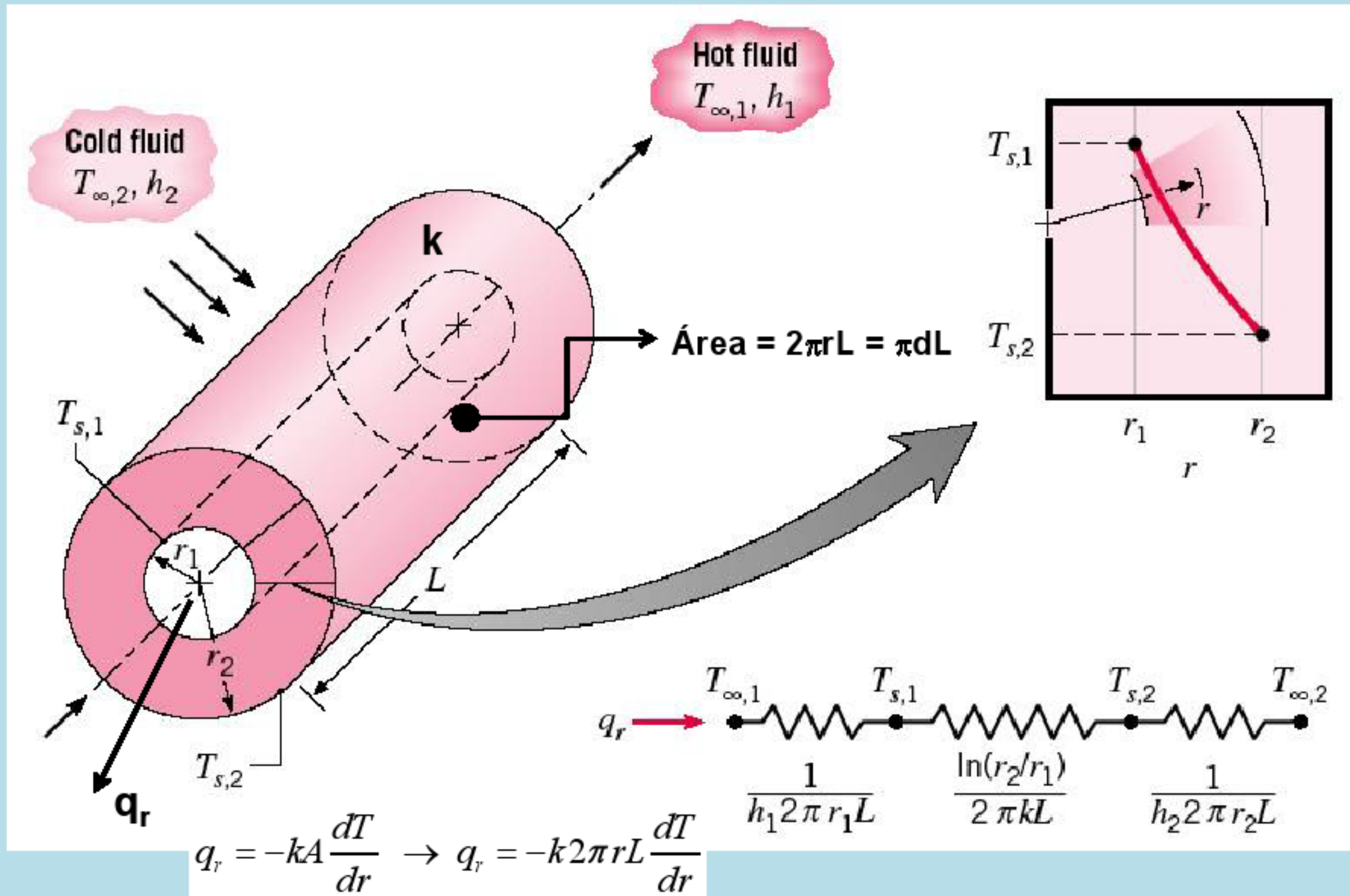
$$T_{(x)} = T_1 - \frac{q''}{k} x \quad \text{Perfil de Temperatura (equação linear),}$$

do tipo $y = a - bx$

- Condição de regime permanente.

Cálculo de condução

- Parede Cilíndrica.



Cálculo de condução. Parede cilíndrica

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} \rightarrow q_r = -k2\pi rL \frac{dT}{dr} \text{ separando as variáveis, temos:}$$

$$q_r \frac{dr}{r} = -k2\pi L dT \text{ integrando nas CC.}$$

$$\text{CC1 para } r = r_1 \rightarrow T = T_1$$

$$r = r_2 \rightarrow T = T_2$$

$$q_r \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -k2\pi L \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow q_r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = -2\pi kL(T_2 - T_1)$$

$$q_r = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \text{ ou ainda } q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi kL} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \frac{\Delta T}{R_t} \text{ então}$$

$$R_{t,cilindrica} = \frac{1}{2\pi kL} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \text{ em f(d)} \rightarrow q_d = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\pi kL} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

Cálculo de condução

- **Perfil de temperatura da parede cilíndrica.**
- **Novamente vamos integrar passando os limites:**
- Para $r = r_1 \rightarrow T = T_1$ e para r qualquer, tal que, $r_1 \leq r \leq r_2 \rightarrow T = T_{(r)}$.

$$q_r \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = -k 2\pi L \int_{T_1}^T dT \Rightarrow q_r \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = -2\pi k L (T_r - T_1)$$

$$(T - T_1) = -\frac{1}{2\pi k L} q_r \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

$$T_r = T_1 - \frac{q_r}{2\pi k L} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \text{ fazendo } q'_r = \frac{q_r}{L}$$

$$T_r = T_1 - \frac{q'_r}{2\pi k} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \text{ perfil de temperatura}$$

Cálculo de condução

- Parede Esférica.**

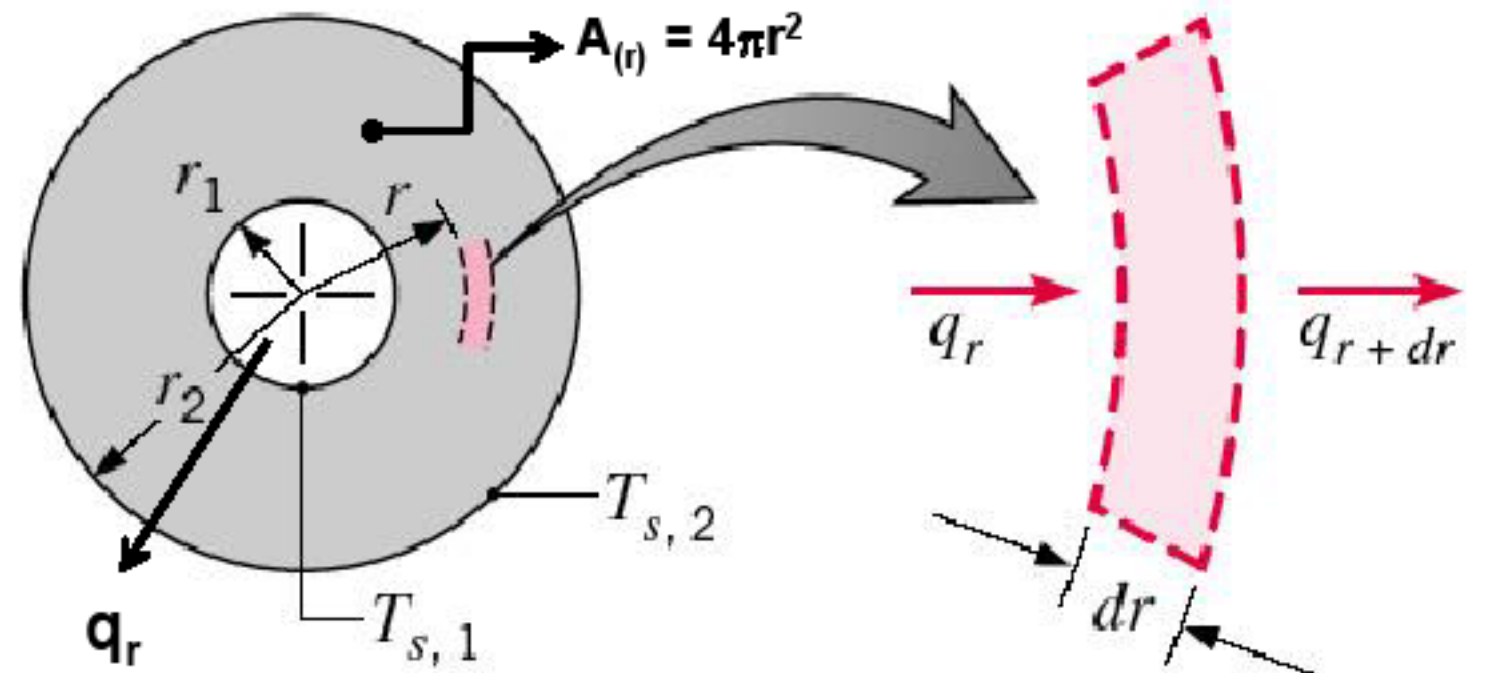
$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} \Rightarrow q_r = -k4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

integrando com os limites, temos:

$$q_r \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow$$

$$q_r \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = 4\pi k (T_1 - T_2) \Rightarrow$$

$$q_r = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{\Delta T}{R_{t, esf}}$$



- Perfil de temperatura.**

$$T_{(r)} = T_1 - \frac{q_r}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

Cálculo de condução

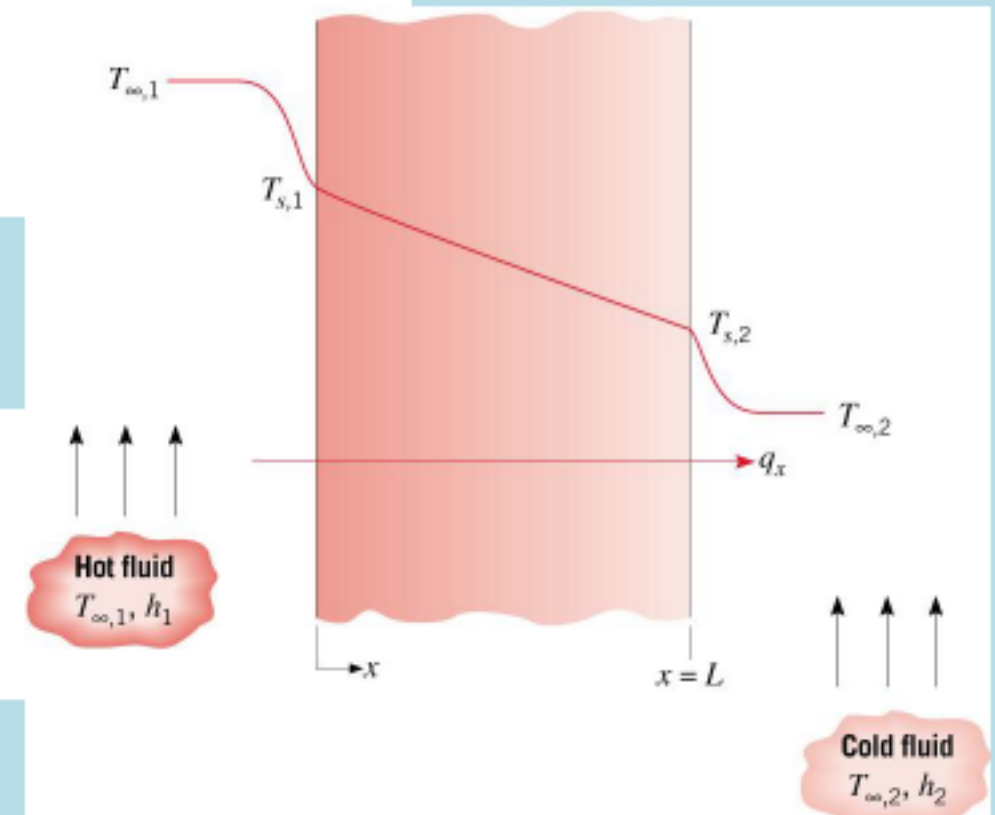
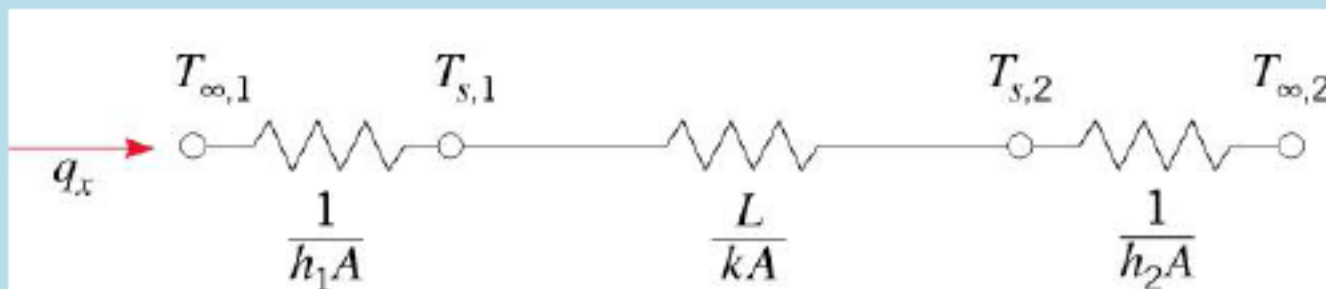
- **Paredes Compostas.**
- Circuito térmico – Analogia com circuito elétrico.
- Primeiramente vamos determinar a resistência térmica de convecção.

$$q = hA(T_p - T_f) \text{ ou } q = \frac{(T_p - T_f)}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_{t,conv}}$$

Neste caso a resistência térmica de convecção é

$$R_{t,conv} = \frac{1}{hA}$$

- Circuito térmico.



Valores típicos do coeficiente de transferência de calor por convecção.

Process	h (W/m ² · K)
Free convection	
Gases	2–25
Liquids	50–1000
Forced convection	
Gases	25–250
Liquids	100–20,000
Convection with phase change	
Boiling or condensation	2500–100,000

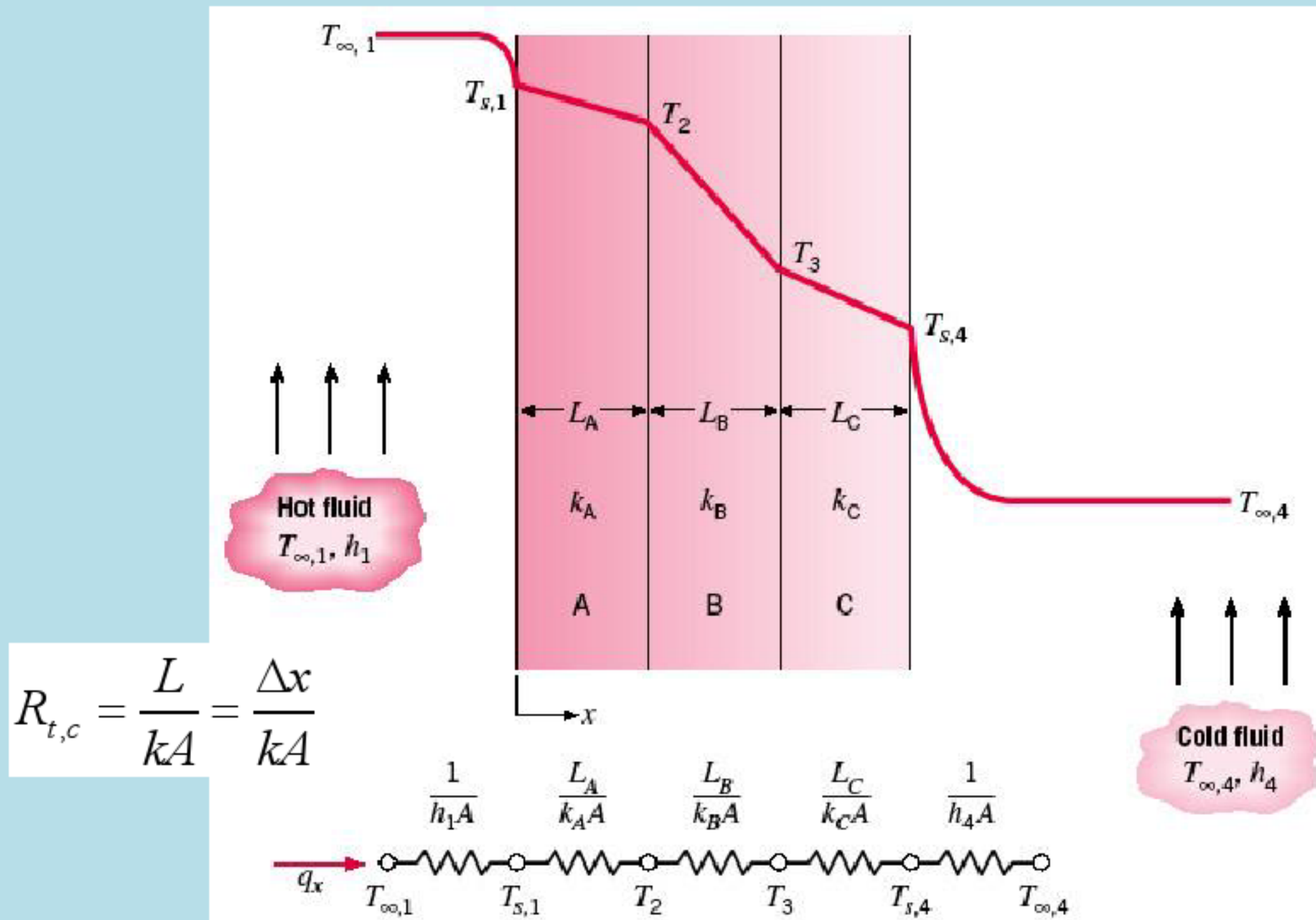
Cálculo de condução

- **Parede Parede Plana em Série.**
- Circuito térmico – Analogia com circuito elétrico.
- Vamos aplicar a equação:

$$q = \frac{\Delta T}{R_t}$$

- Para quaisquer dois pontos que formam um trecho do circuito térmico dado.

Circuito Térmico equivalente para uma parede composta em série

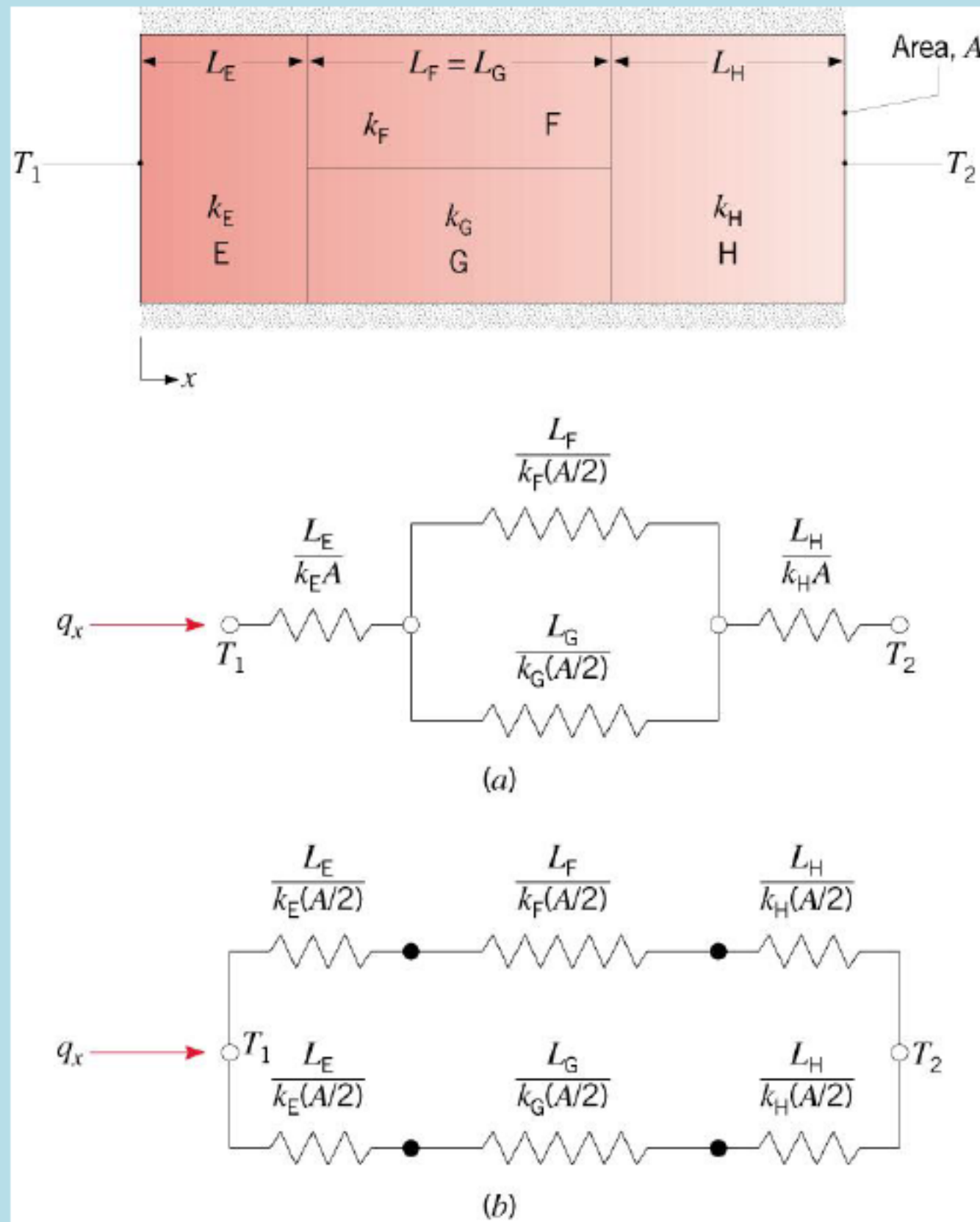


$$R_{t,c} = \frac{L}{kA} = \frac{\Delta x}{kA}$$

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\sum R_t}$$

$$\sum R_t = R_{tot} = \frac{1}{A} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4} \right] = \frac{R''_{tot}}{A}$$

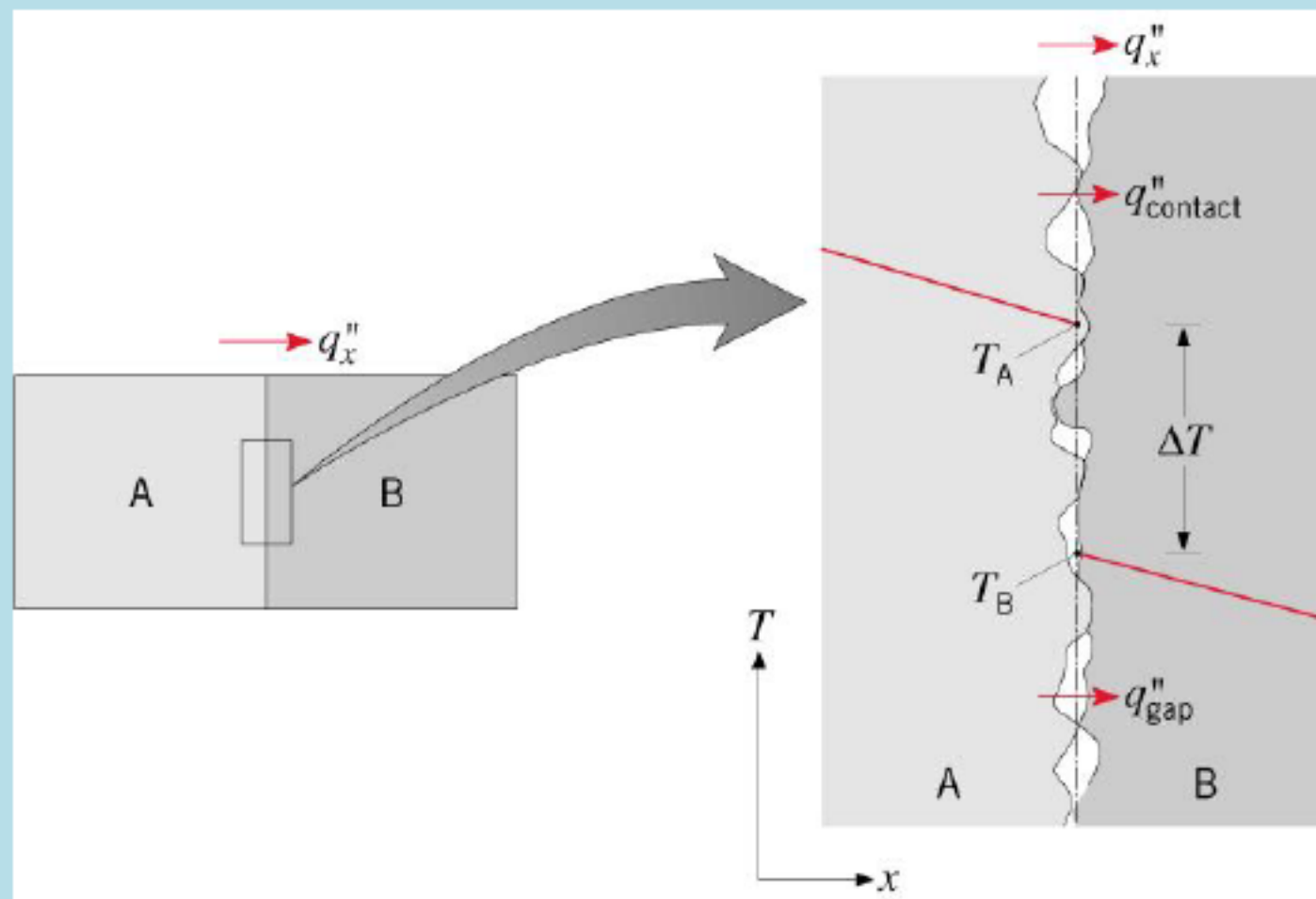
Circuito Térmico equivalente para uma parede composta série-paralela.



- Considera-se que as superfícies normais à direção x sejam isotérmicas.
- Supõem-se que as superfícies paralelas à direção x sejam adiabáticas.

Resistência de Contato

- Em sistemas compostos, a queda de temperatura entre as interfaces dos vários materiais podem ser considerável.
- Essa mudança de temperatura é atribuída ao que é conhecido por *Resistência térmica de contato* ($R_{t,cont}$).



$$R_{t,c}'' = \frac{T_A - T_B}{q_x''}$$

$$R_{t,c} = \frac{R_{t,c}''}{A_c}$$

Resistência térmica de contato depende:

- Rugosidade superficial;
- propriedades dos materiais;
- pressão de contato e
- tipo de fluido nos vazios.

Resistência térmica de contato para (a) interfaces metálicas sob condições de vácuo e (b) Interface de alumínio (rugosidade superficial de 10 mm, 10^5 N/m^2) com diferentes fluídos interfaciais.

Thermal Resistance, $R''_{t,c} \times 10^4 \text{ (m}^2 \cdot \text{K/W)}$

(a) Vacuum Interface

Contact pressure	100 kN/m ²	10,000 kN/m ²
Stainless steel	6–25	0.7–4.0
Copper	1–10	0.1–0.5
Magnesium	1.5–3.5	0.2–0.4
Aluminum	1.5–5.0	0.2–0.4

(b) Interfacial Fluid

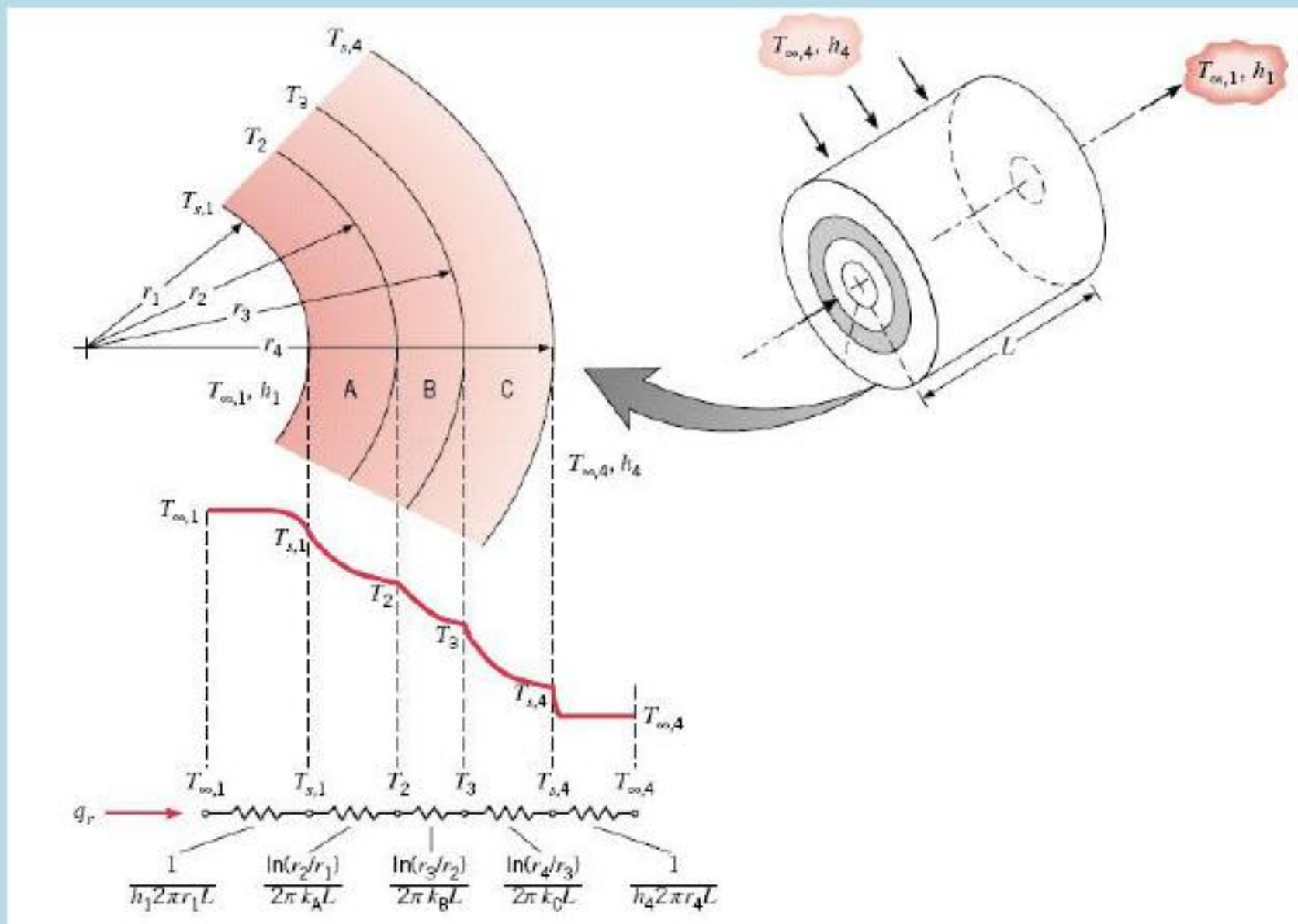
Air	2.75
Helium	1.05
Hydrogen	0.720
Silicone oil	0.525
Glycerine	0.265

Resistência térmica em interfaces sólido/sólido representativas

Interface	$R''_{t,c} \times 10^4 \text{ (m}^2 \cdot \text{K/W)}$	Source
Silicon chip/lapped aluminum in air (27–500 kN/m ²)	0.3–0.6	[2]
Aluminum/aluminum with indium foil filler ($\sim 100 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with indium foil filler ($\sim 3500 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.04	[1, 3]
Aluminum/aluminum with metallic (Pb) coating	0.01–0.1	[4]
Aluminum/aluminum with Dow Corning 340 grease ($\sim 100 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with Dow Corning 340 grease ($\sim 3500 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.04	[1, 3]
Silicon chip/aluminum with 0.02-mm epoxy	0.2–0.9	[5]
Brass/brass with 15- μm tin solder	0.025–0.14	[6]

Associação em série para parede cilíndrica

- A distribuição de temperatura associada à condução radial através de uma parede cilíndrica é logarítmica, não linear.

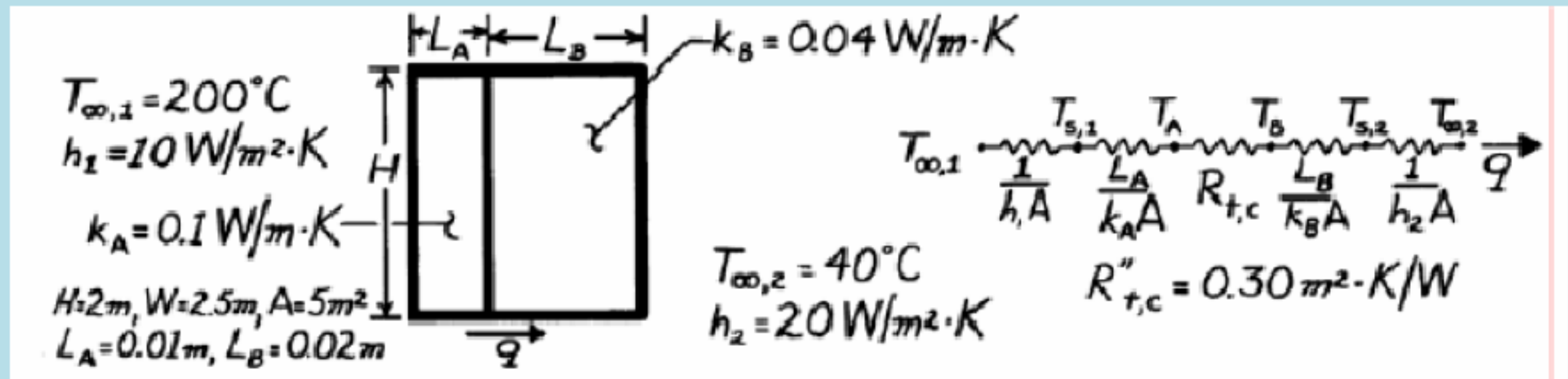


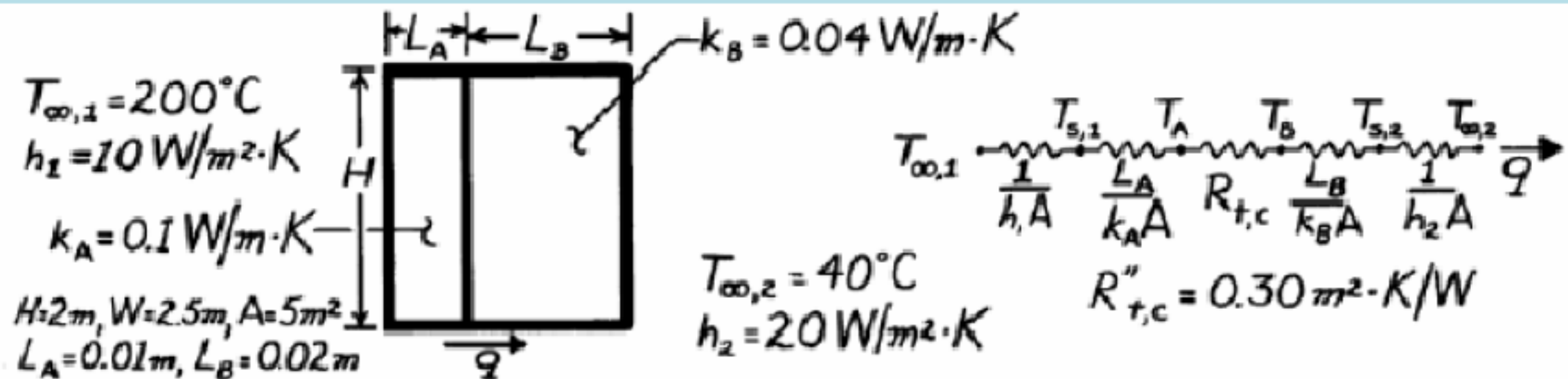
$$R_{t,cilindrica} = \frac{1}{2\pi k L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$q = \frac{\Delta T}{R_t}$$

❑ Exercícios:

- 1) Considere uma parede plana composta constituída por dois materiais com condutividade térmicas $k_A = 0,1 \text{ W/(m.K)}$ e $k_B = 0,04 \text{ W/(m.K)}$ e espessuras $L_A = 10 \text{ mm}$ e $L_B = 20 \text{ mm}$. A resistência de contato na interface entre os dois materiais é conhecida, sendo $0,30 \text{ m}^2\text{.K/W}$. O material A está em contato com um fluido a 200°C com $h = 10 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ e o material B está em contato com um fluido a 40°C , no qual $h = 20 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$.
 - a. Descreva o circuito térmico do sistema.
 - b. Qual a taxa de transferência de calor para uma parede de 2 m de altura por 2,5 m de comprimento.
 - c. Calcule as temperaturas nas interfaces esboce a distribuição de temperatura.





b) Calculando a resistência total do circuito térmico e q , temos:

$$\begin{aligned}
 R_{\text{tot}} &= \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A A} + R_{t,c} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{1}{h_2 A} \\
 R_{\text{tot}} &= \left[\frac{1}{10 \times 5} + \frac{0.01}{0.1 \times 5} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.02}{0.04 \times 5} + \frac{1}{20 \times 5} \right] \frac{\text{K}}{\text{W}} \\
 R_{\text{tot}} &= [0.02 + 0.02 + 0.06 + 0.10 + 0.01] \frac{\text{K}}{\text{W}} = 0.21 \frac{\text{K}}{\text{W}} \\
 q &= \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{\text{tot}}} = \frac{(200 - 40)^{\circ}\text{C}}{0.21 \text{ K/W}} = 762 \text{ W}.
 \end{aligned}$$

c) Calculando as temperaturas nas interfaces, temos:

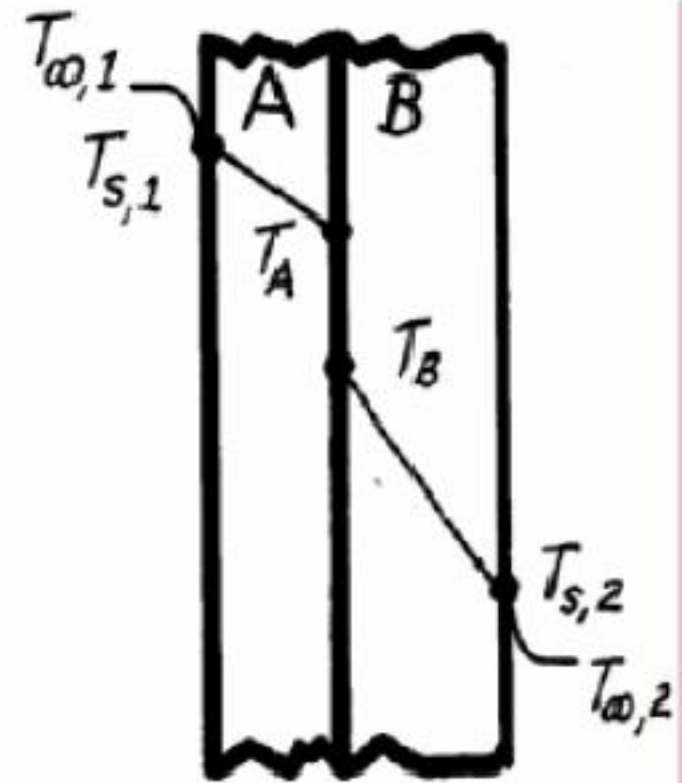
$$T_{s,1} = T_{\infty,1} - \frac{q}{h_1 A} = 200^\circ \text{C} - \frac{762 \text{ W}}{50 \text{ W/K}} = 184.8^\circ \text{C}$$

$$T_A = T_{s,1} - \frac{q L_A}{k_A A} = 184.8^\circ \text{C} - \frac{762 \text{ W} \times 0.01 \text{ m}}{0.1 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \times 5 \text{ m}^2} = 169.6^\circ \text{C}$$

$$T_B = T_A - q R_{t,c} = 169.6^\circ \text{C} - 762 \text{ W} \times 0.06 \frac{\text{K}}{\text{W}} = 123.8^\circ \text{C}$$

$$T_{s,2} = T_B - \frac{q L_B}{k_B A} = 123.8^\circ \text{C} - \frac{762 \text{ W} \times 0.02 \text{ m}}{0.04 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \times 5 \text{ m}^2} = 47.6^\circ \text{C}$$

$$T_{\infty,2} = T_{s,2} - \frac{q}{h_2 A} = 47.6^\circ \text{C} - \frac{762 \text{ W}}{100 \text{ W/K}} = 40^\circ \text{C}$$

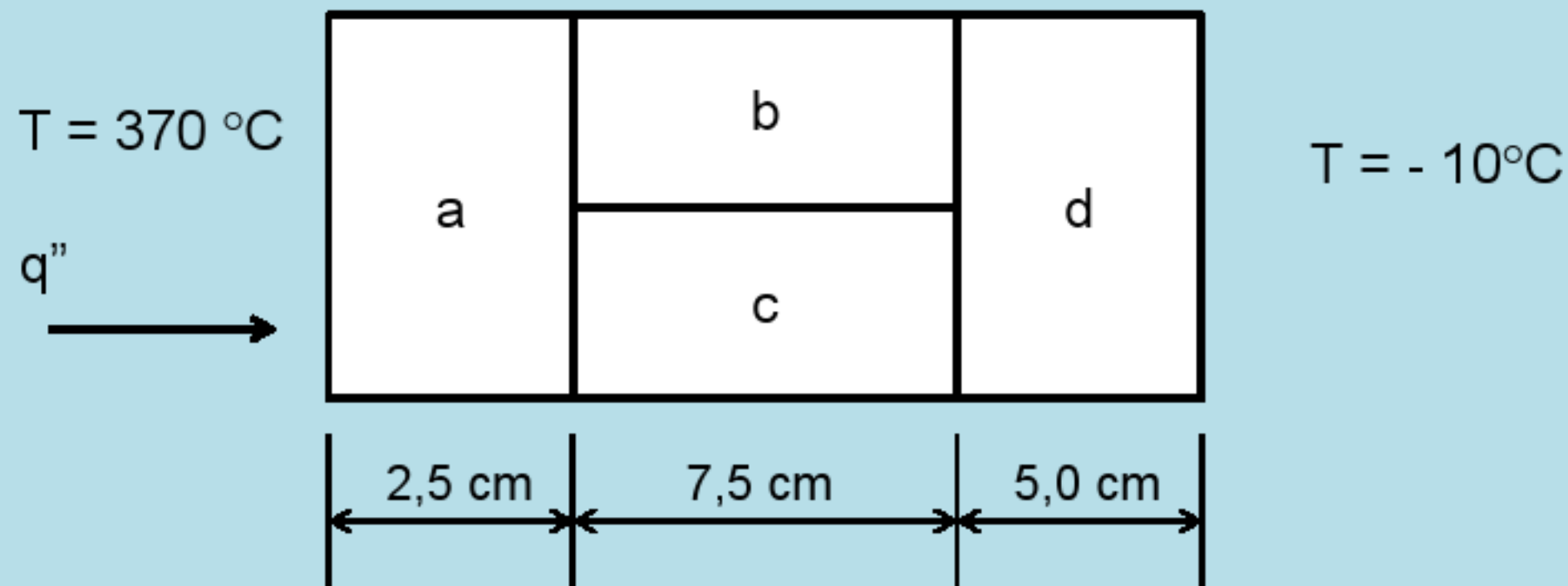


2) Na figura abaixo é mostrada um conjunto de paredes planas composta.

a. Calcule o fluxo de calor unidimensional, permanente.

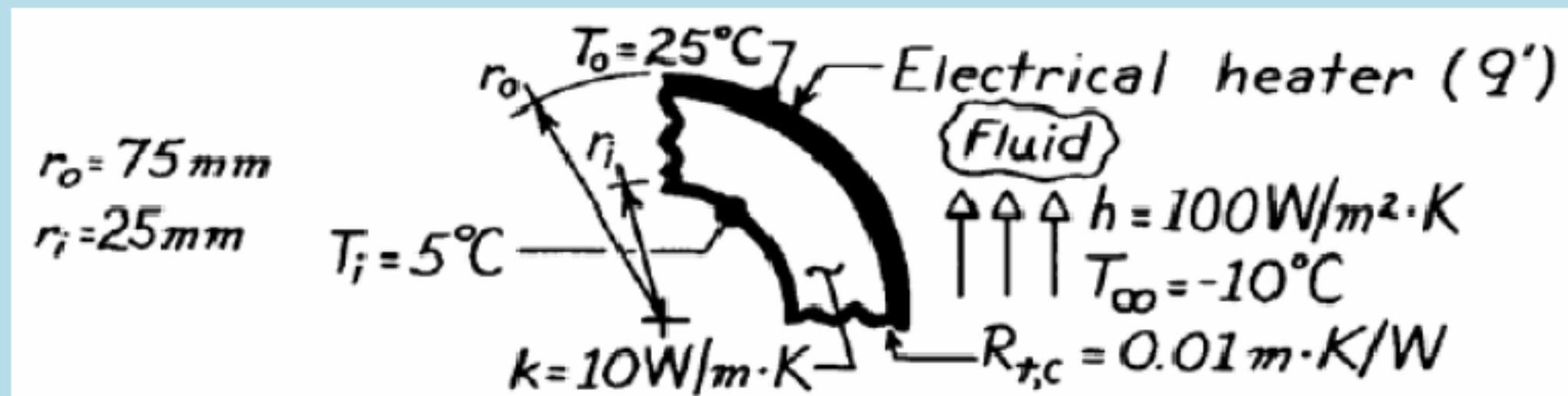
b. Determine a temperatura em todas as interfaces.

Considere: $A_b = A_c$ e $k_a = 170 \text{ W/(m.K)}$, $k_b = 40 \text{ W/(m.K)}$, $k_c = 55 \text{ W/(m.K)}$ e $k_d = 80 \text{ W/(m.K)}$.

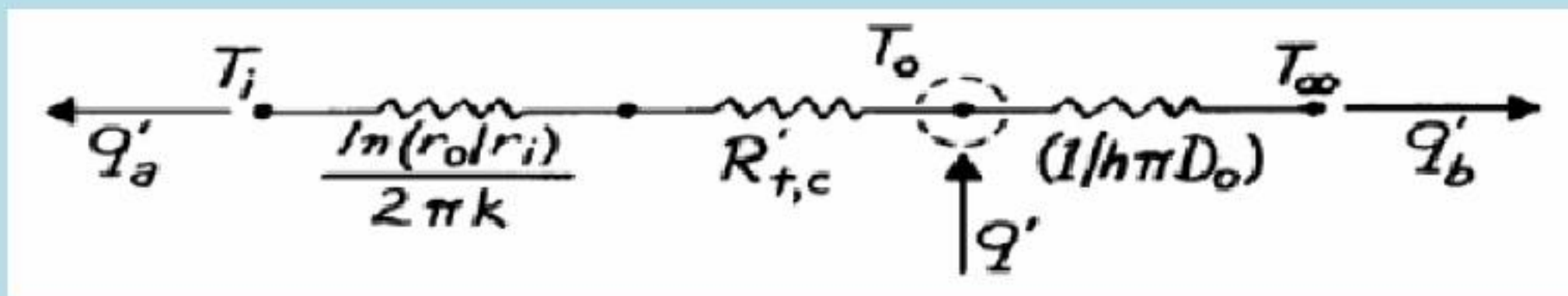


- 3) Um aquecedor elétrico delgado é enrolado ao redor da superfície externa de um longo tubo cilíndrico cuja superfície interna é mantida a uma temperatura de 5°C . A parede do tubo possui raios interno e externo iguais a 25 e 75 mm, respectivamente, e um condutividade térmica de $10\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. A resistência térmica de contato entre o aquecedor e a superfície externa do tubo (por unidade de comprimento do tubo) é $R'_{t,c} = 0,01\text{ m}\cdot\text{K/W}$. A superfície externa do aquecedor está exposta a um fluido com $T_\infty = -10^\circ\text{C}$ e com um coeficiente convectivo de $h = 100\text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$.
- Esboce o circuito térmico do sistema.
 - Determine a potência do aquecedor, por unidade de comprimento do tubo, requerida para mantê-lo a $T_0 = 25^\circ\text{C}$.

Resolução:



a) O Circuito térmico será:



b) A potência (q') do aquecedor será:

$$q' = q'_a + q'_b$$

$$q' = \frac{T_o - T_i}{\frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi k} + R'_{t,c}} + \frac{T_o - T_\infty}{(1/h\pi D_o)}$$

$$q' = \frac{(25-5)^\circ \text{C}}{\frac{\ln(75\text{mm}/25\text{mm})}{2\pi \times 10 \text{ W/m}\cdot\text{K}} + 0.01 \frac{\text{m}\cdot\text{K}}{\text{W}}} + \frac{[25 - (-10)]^\circ \text{C}}{\left[1 / \left(100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times \pi \times 0.15\text{m}\right)\right]}$$

$$q' = (728 + 1649) \text{ W/m}$$

$$q' = 2377 \text{ W/m.}$$