

Aula 5 de FT II

Prof. Gerônimo

- **A Parede Plana:**

- Considerando coordenada unidimensional, regime estacionário com parede plana e k constante, **geração interna uniforme** e temperatura assimétrica:

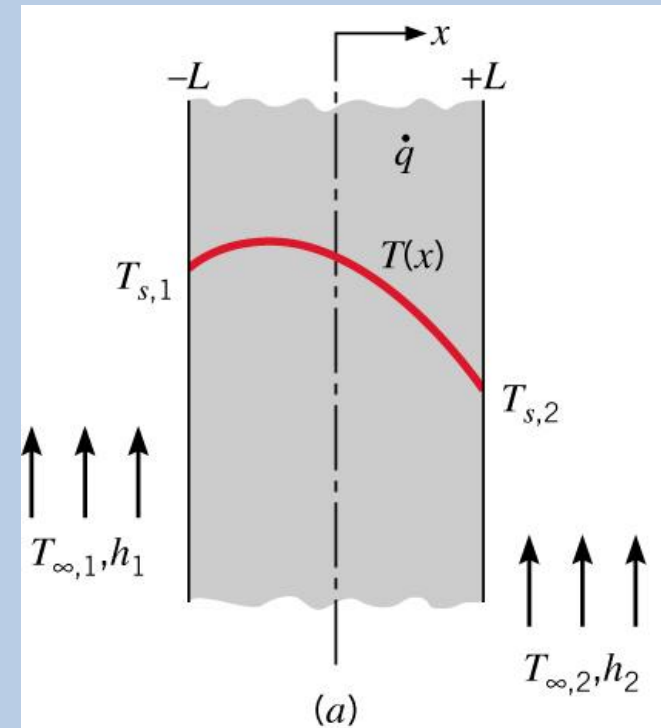
- Equação da condução:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad q''' = \dot{q}$$

Se o fluxo $\dot{q}$ depende de x , temos:

- **Solução Geral**

$$T(x) = - \left(\frac{\dot{q}}{2k} \right) x^2 + C_1 x + C_2$$



Condições assimétricas

O perfil de temperatura vai depender das condições de contorno

$C_1 = ?$ e $C_2 = ?$

➤ Simplificando quando as duas superfícies são mantidas a uma mesma temperatura, $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$, temos:

- A temperatura será simétrica em relação ao ponto central.

- A distribuição da temperatura será:

$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s$$

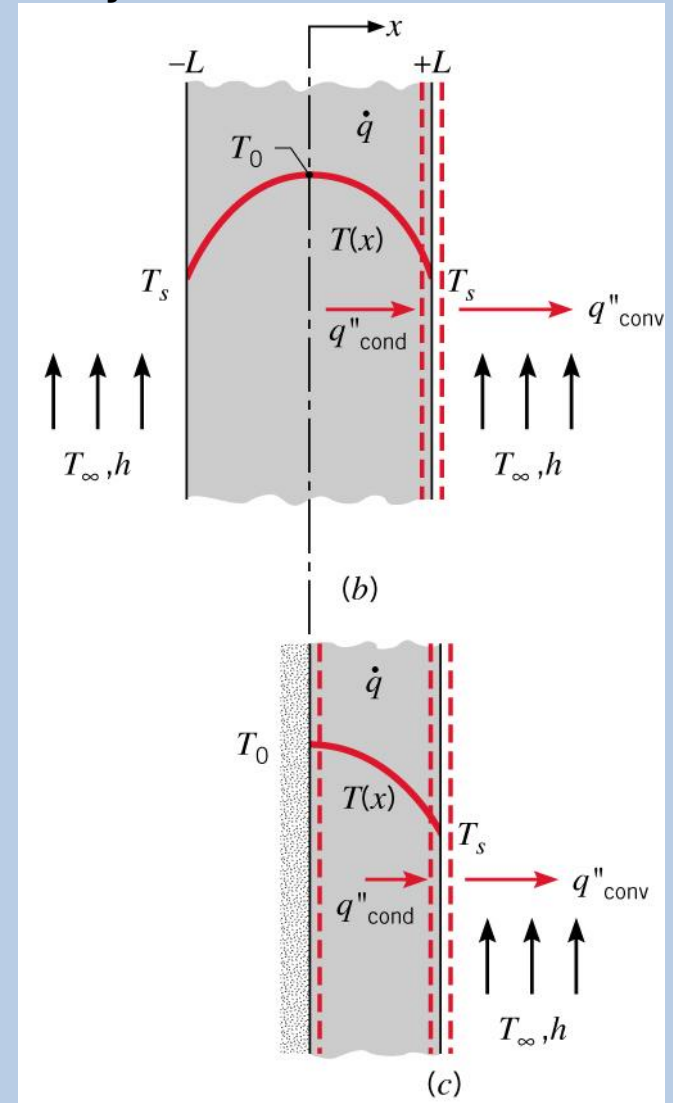
- Aplicando o balanço de energia com Convecção, temos:

$$-\dot{E}_{sai} + \dot{E}_{gera} = 0$$

$$-hA_s(T_s - T_\infty) + \dot{q} A_s L = 0$$

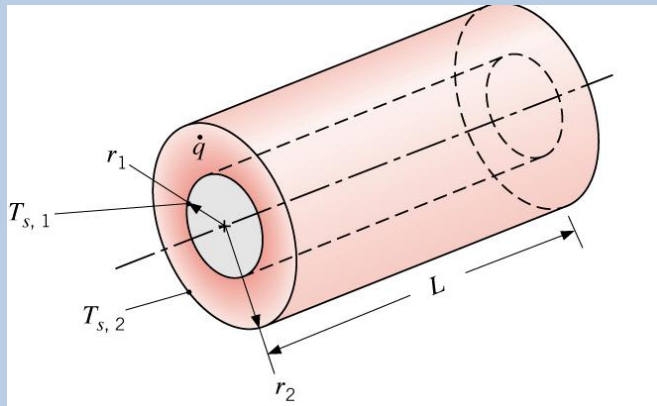
$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} L}{h}$$

Condição de contorno simétrica

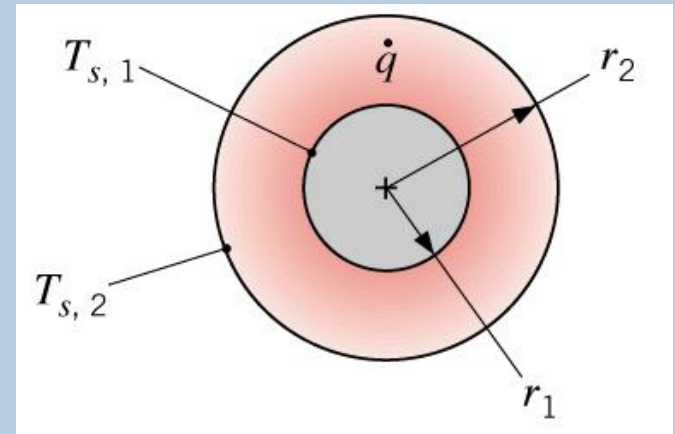


Sistema radial

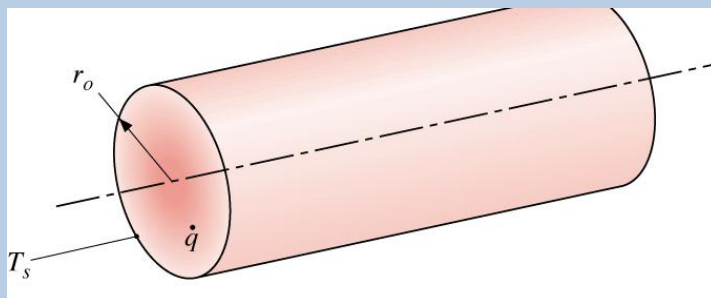
Parede Cilíndrica (Tubo)



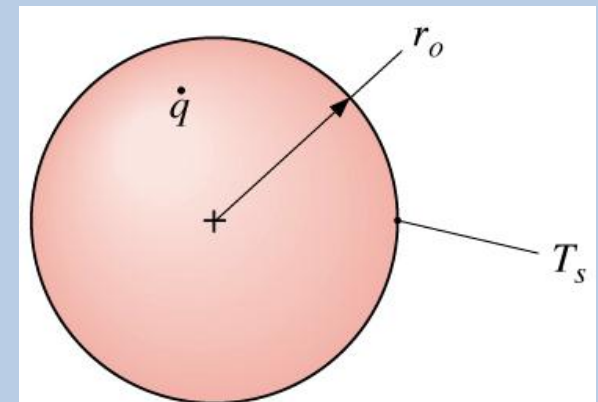
Parede Esférica (Casca)



Parede Cilíndrica sólido (Tarugo)



Parede Esférica sólido



$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(kr^2 \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} = 0$$

Soluções da equação do calor unidimensionais e em regime estacionário para paredes planas, Cilíndrica e esférica com geração uniforme e condições de superfícies assimétricas.

Temperature Distribution

Plane Wall
$$T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

Cylindrical Wall
$$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$$

Spherical Wall
$$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \frac{(1/r) - (1/r_2)}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

Heat Flux

Plane Wall
$$q''(x) = \dot{q}x - \frac{k}{2L} (T_{s,2} - T_{s,1})$$

Cylindrical Wall
$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r \ln(r_2/r_1)}$$

Spherical Wall
$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$$

Heat Rate

Plane Wall
$$q(x) = \left[\dot{q}x - \frac{k}{2L} (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] A_x$$

Cylindrical Wall
$$q(r) = \dot{q}\pi L r^2 - \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$$

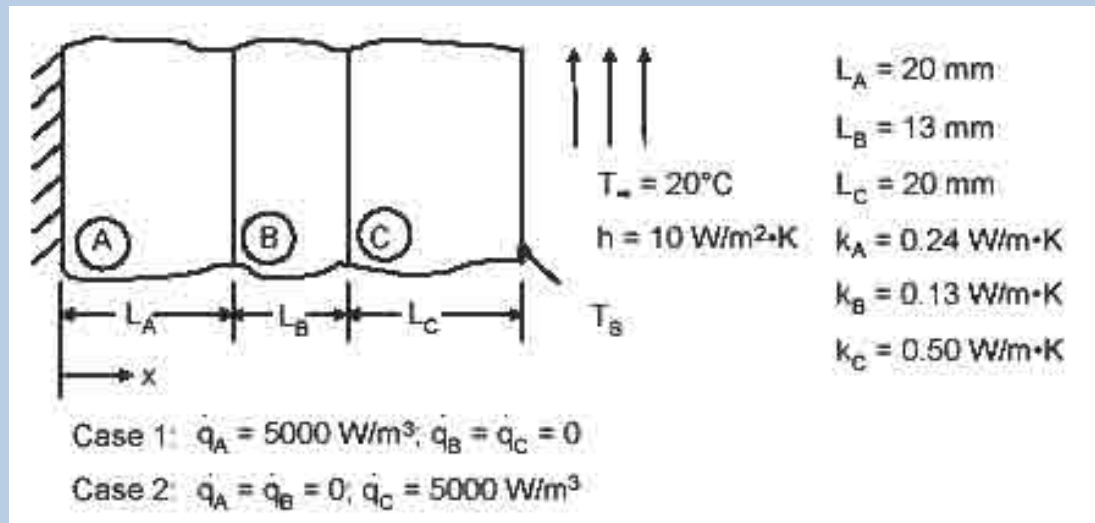
Spherical Wall
$$q(r) = \frac{\dot{q}4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

Exercícios:

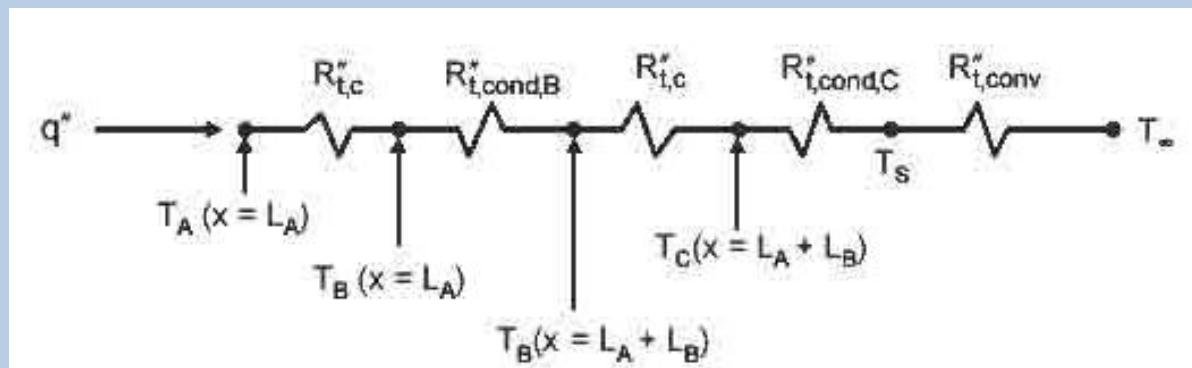
1) Considere uma parede plana composta por três materiais (materiais A, B e C organizados da esquerda para a direita) de condutividade térmica $k_A = 0,24 \text{ W/(m.K)}$, $k_B = 0,13 \text{ W/(m.K)}$ e $k_C = 0,50 \text{ W/(m.K)}$. As espessuras das três camadas da parede são $L_A = 20 \text{ mm}$, $L_B = 13 \text{ mm}$ e $L_C = 20 \text{ mm}$. Há uma resistência de contato de $R''_{t,c} = 10^{-2} \text{ m}^2\text{K/W}$ na interface entre os materiais A e B. A face esquerda da parede composta é isolada termicamente, enquanto a face direita está exposta a condições convectivas caracterizadas por $h = 10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ e $T_\infty = 20^\circ\text{C}$. Para o caso 1, energia térmica é gerada no material A a uma taxa de $q''' = 5000 \text{ W/m}^3$. Para o caso 2, energia térmica é gerada no material C a uma taxa de $q''' = 5000 \text{ W/m}^3$. Determine:

- Esboce a distribuição de temperaturas, em estado estacionário, em coordenadas T-x para o caso 1.
- Esboce a distribuição de temperaturas, em estado estacionário, em coordenadas T-x para o caso 2.
- $T_{\max}$ no interior da parede composta sob condições de regime estacionário para o caso 1.

Resolução:



Circuito térmico:



Resistência térmica:

$$R''_{t,c} = 0.01 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$$

$$R''_{t,\text{cond},B} = \frac{L_B}{k_B} = \frac{0.013 \text{ m}}{0.13 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 0.1 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}$$

$$R''_{t,\text{cond},C} = \frac{L_C}{k_C} = \frac{0.020 \text{ m}}{0.50 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 0.04 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}$$

$$R''_{t,\text{conv}} = \frac{1}{h} = \frac{1}{10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} = 0.1 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}$$

Resistência total:

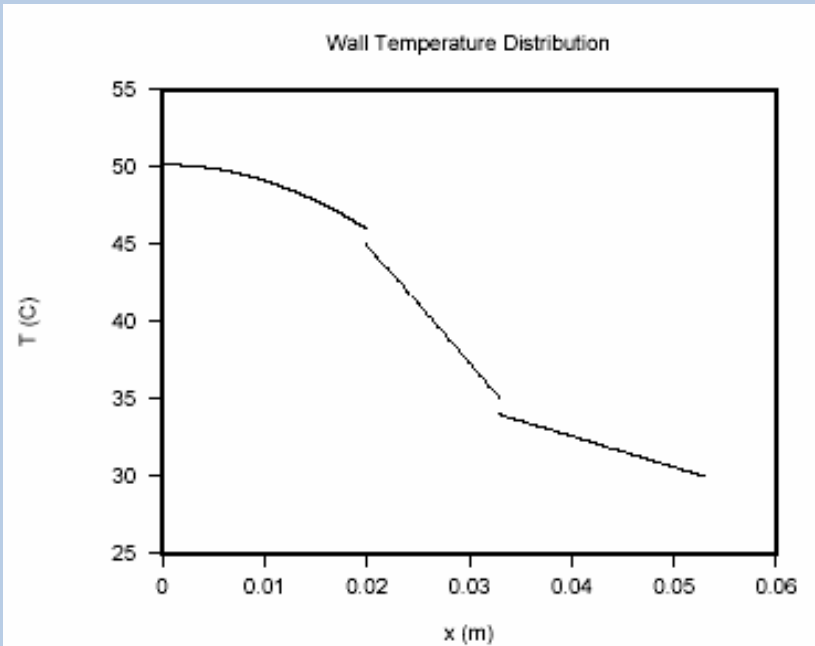
$$R''_{t,\text{tot}} = (0.01 + 0.1 + 0.01 + 0.04 + 0.1) = 0.26 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}$$

$$T_s = T_\infty + q''(R''_{t,\text{conv}}) = 20^\circ\text{C} + 100 \text{ W/m}^2 \times 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W} = 30^\circ\text{C}$$

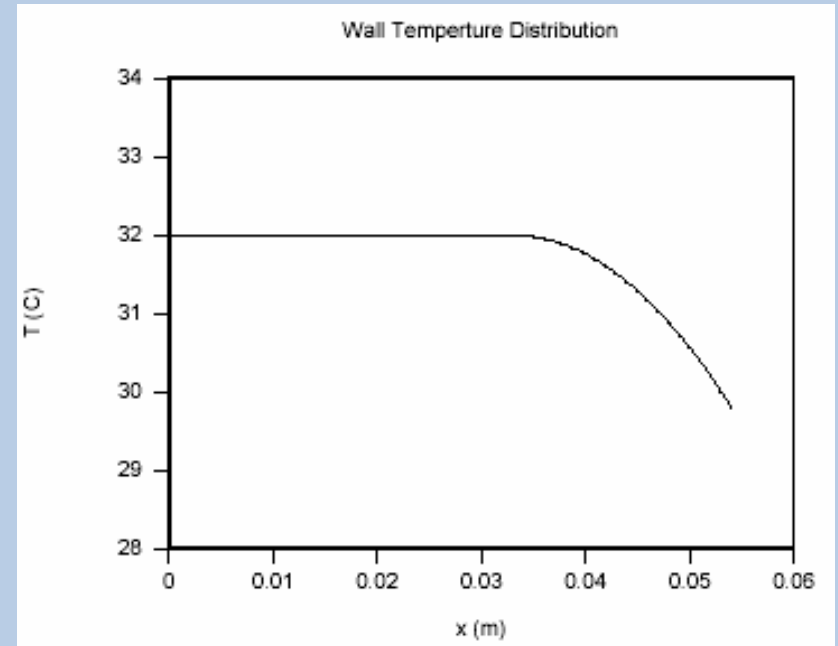
$$T_C(x = L_A + L_B) = T_s + q''(R''_{t,\text{cond},C}) = 30^\circ\text{C} + 100 \text{ W/m}^2 \times 0.04 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W} = 34^\circ\text{C}$$

$$T_B(x = L_A + L_B) = T_C(x = L_A + L_B) + q''(R''_{t,c}) = 34^\circ\text{C} + 100 \text{ W/m}^2 \times 0.01 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} = 35^\circ\text{C}$$

$$T_B(x = L_A) = T_B(x = L_A + L_B) + q''(R''_{t,\text{cond},B}) = 35^\circ\text{C} + 100 \text{ W/m}^2 \times 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W} = 45^\circ\text{C}$$



Caso 1



Caso 2

Temperatura máxima:

$$T_A(x=L_A) = q''(R''_{t,tot}) + T_\infty = 100 \text{ W/m}^2 \times 0.26 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} + 20^\circ\text{C} = 46^\circ\text{C}$$

$$T_A(x=0) = T_A(x=L_A) + \frac{\dot{q}_A L_A^2}{2k_A} = 46^\circ\text{C} + \frac{5000 \text{ W/m}^3 \times (0.02 \text{ m})^2}{2 \times 0.24 \text{ W/m} \cdot \text{K}}$$

$$T_A(x=0) = T_{\max} = 50.2^\circ\text{C}$$

$$T_{\max} = T_c(x = L_A + L_B) = T_s + \frac{\dot{q} L_C^2}{2k_C} = 30^\circ\text{C} + \frac{5000 \text{ W/m}^3 \times (0.02 \text{ m})^2}{2 \times 0.50 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 32^\circ\text{C}$$

Exercícios:

2) Uma placa plana (parede), cuja espessura é de 5 mm, atuam fontes internas de calor distribuídas uniformemente (geração interna de calor) $q''' = 2,7 \cdot 10^7 \text{ (W/m}^3\text{)}$. O coeficiente de condutividade térmica do material é $k = 25 \text{ W/(m.K)}$. Os coeficientes de convecção dos fluídos que escoam através das paredes são $h_1 = 3000 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ e $h_2 = 1500 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ e as temperaturas dos fluídos são $T_{f1} = 130 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_{f2} = 140 \text{ }^\circ\text{C}$.

Determine:

- A distribuição da temperatura $T = T_{(x)}$ na parede.
- A temperatura máxima e a posição onde ela ocorre.
- As temperaturas T_{p1} e T_{p2} das faces da parede, interna e externa.

