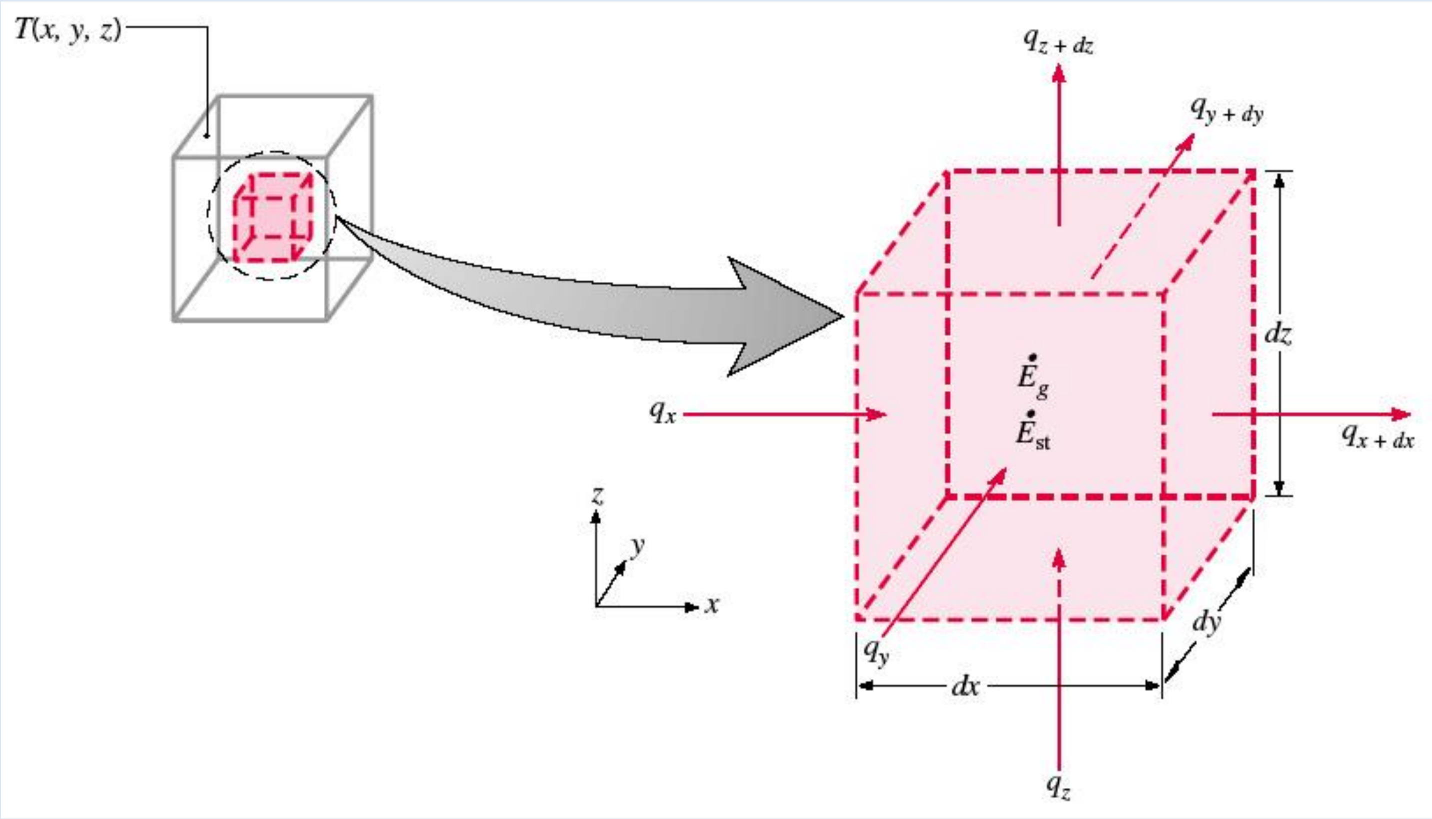
Aula 4 de FT II

Prof. Gerônimo

Equação diferencial de Condução

- Vamos considerar a taxa de geração interna de calor q''' = $\dot{E}_g$.
- Coordenada x, y e z. Regime transiente.



Considerando:
q = q''

Volume de controle diferencial, dx dy dz, para análise de condução em coordenadas cartesianas.

Da primeira lei da TD, temos:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{dU}{\delta t} \quad (1) \ \text{mas,} \quad \frac{\delta Q}{\delta t} = q \quad (2) \quad \text{e} \ \ \text{dU} = \delta \text{mc}_v \delta T \quad (3)$$

Vamos aplicar o balanço de energia somente na dimensão x:

$$\dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_{gera} = \dot{E}_{acum} \qquad (4)$$

Em função do fluxo temos:

$$\underbrace{Aq''_x}_{Entra} - \underbrace{Aq''_{x+\delta x}}_{Sai} + \underbrace{q'''\delta V}_{Gera} = \underbrace{\delta m c_v \frac{\Delta T}{\delta t}}_{Acumula} \qquad (5)$$

Mas para sólidos e líquidos sabe-se que $\text{c}_p = c_v = c$

e da definição de massa específica, $\rho = \frac{\delta m}{\delta V}$ ou $\delta \text{m} = \rho \delta \text{V}$

da figura tem-se que, $\delta\text{V} = \text{A}\delta\text{x}$. Subst. na (5) temos:

$$Aq''_x - Aq''_{x+\delta x} + q'''\delta V = \rho c A \delta x \frac{\Delta T}{\delta t} \quad (\div \text{A}\delta\text{x})$$

$$\frac{\left[q''_x - q''_{x+\delta x}\right]}{\delta x} + q''' = \rho c \frac{\Delta T}{\delta t} \ \text{ ou } \ \frac{-\left[q''_{x+\delta x} - q''_x\right]}{\delta x} + q''' = \rho c \frac{\Delta T}{\delta t}$$

levando ao limite quando $\delta\text{x} \rightarrow 0$ e $\delta\text{t} \rightarrow 0$

aplicando o conceito de derivada parcial, temos:

$$-\frac{\partial q''}{\partial x} + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \ \text{ mas da lei de Fourrier, } q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\therefore \ -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \ \rightarrow \ \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q'''=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

Considerando a condutividade térmica constante k = cte

$$k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q'''=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{q'''}{k}=\frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Mas $\alpha=\frac{k}{\rho c}$ .....difusividade térmica (relacionada a capacidade de conduzir calor pela capacidade de armazenar calor)

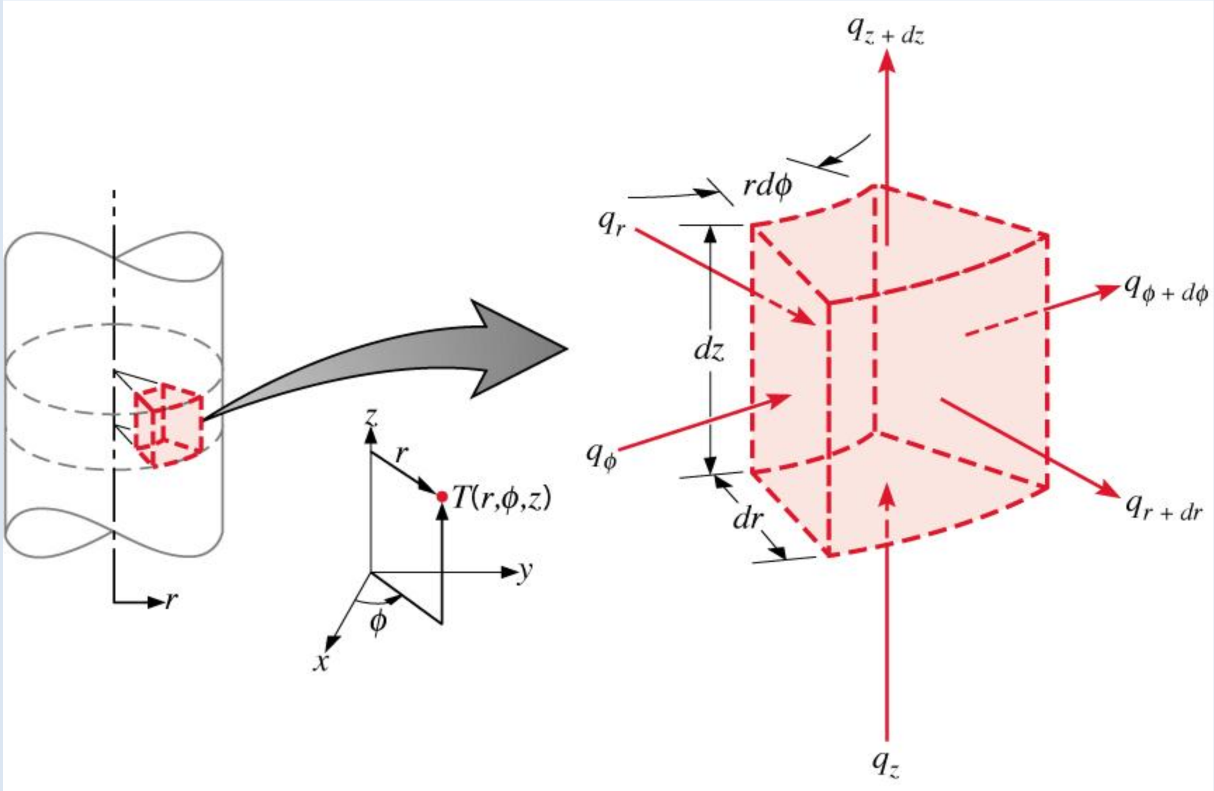
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$ forma conservativa T = T(x, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$ forma dissipativa

Em 3D, temos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

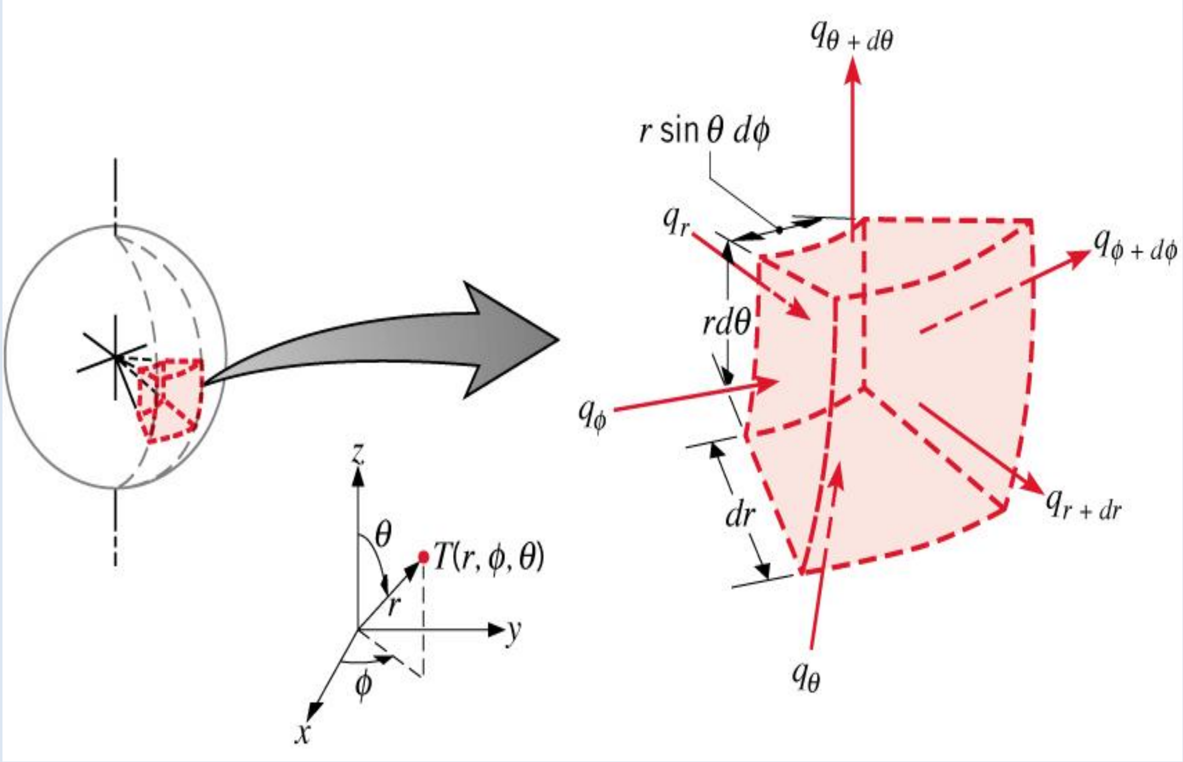
- Coordenada cilíndrica:



Volume de controle diferencial, dr rdϕ dz, para análise de condução em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Coordenada Esférica



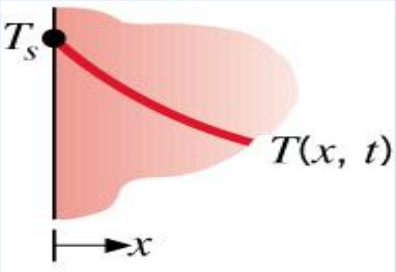
Volume de controle diferencial, dr rsen(θ)dϕ rdθ, para análise de condução em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, θ).

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+q'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

Condições de contorno (CC)

1. Temperatura da superfície constante

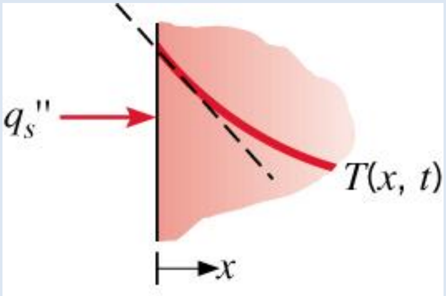
$$T\left(0,t\right)=T_s$$



2. Fluxo térmico na superfície constante

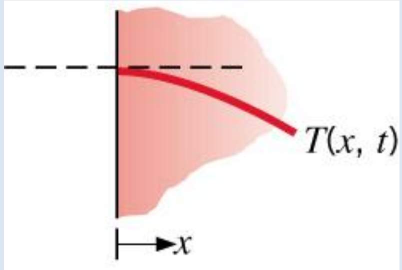
a) Fluxo térmico diferente de zero

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_s''$$



b) Superfície isolada termicamente ou adiabática

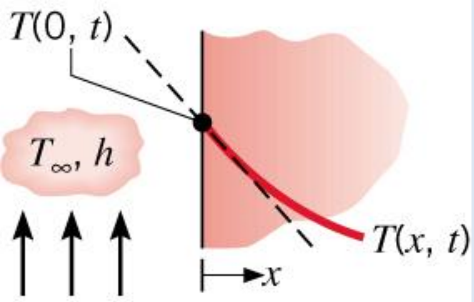
$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0$$



Condições de contorno (CC)

3. Condição de convecção na superfície

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h\left[T_\infty - T\left(0,t\right)\right]$$



- Uma forma usando o operador diferencial del ∇ (nabla).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

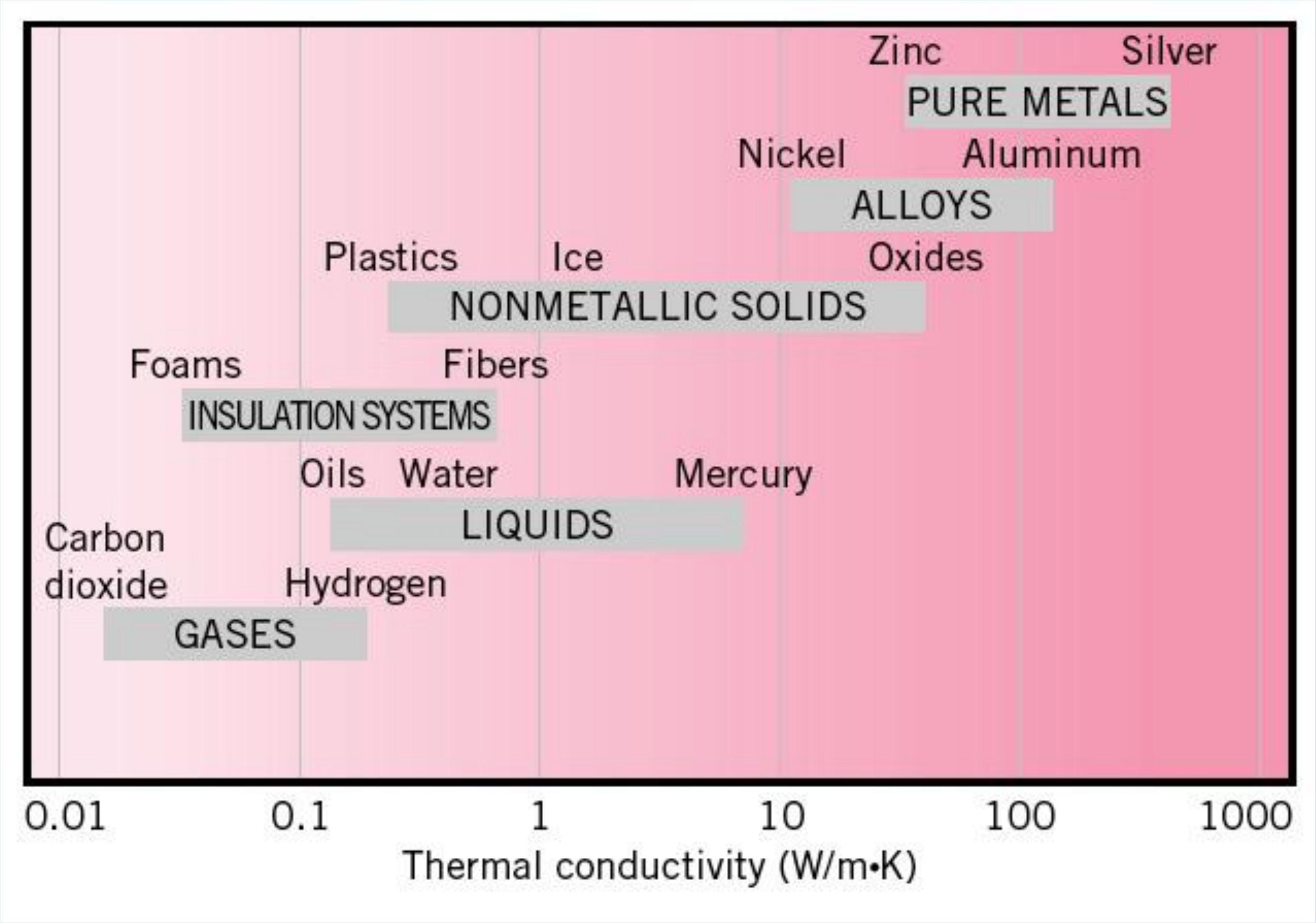
As propriedades térmicas da matéria

- Para usar a lei de Fourier, a condutividade térmica do material deve ser conhecida, o qual é uma *propriedade de transporte* que fornece uma indicação da taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão.
- A taxa depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular, que está relacionada ao estado da matéria.

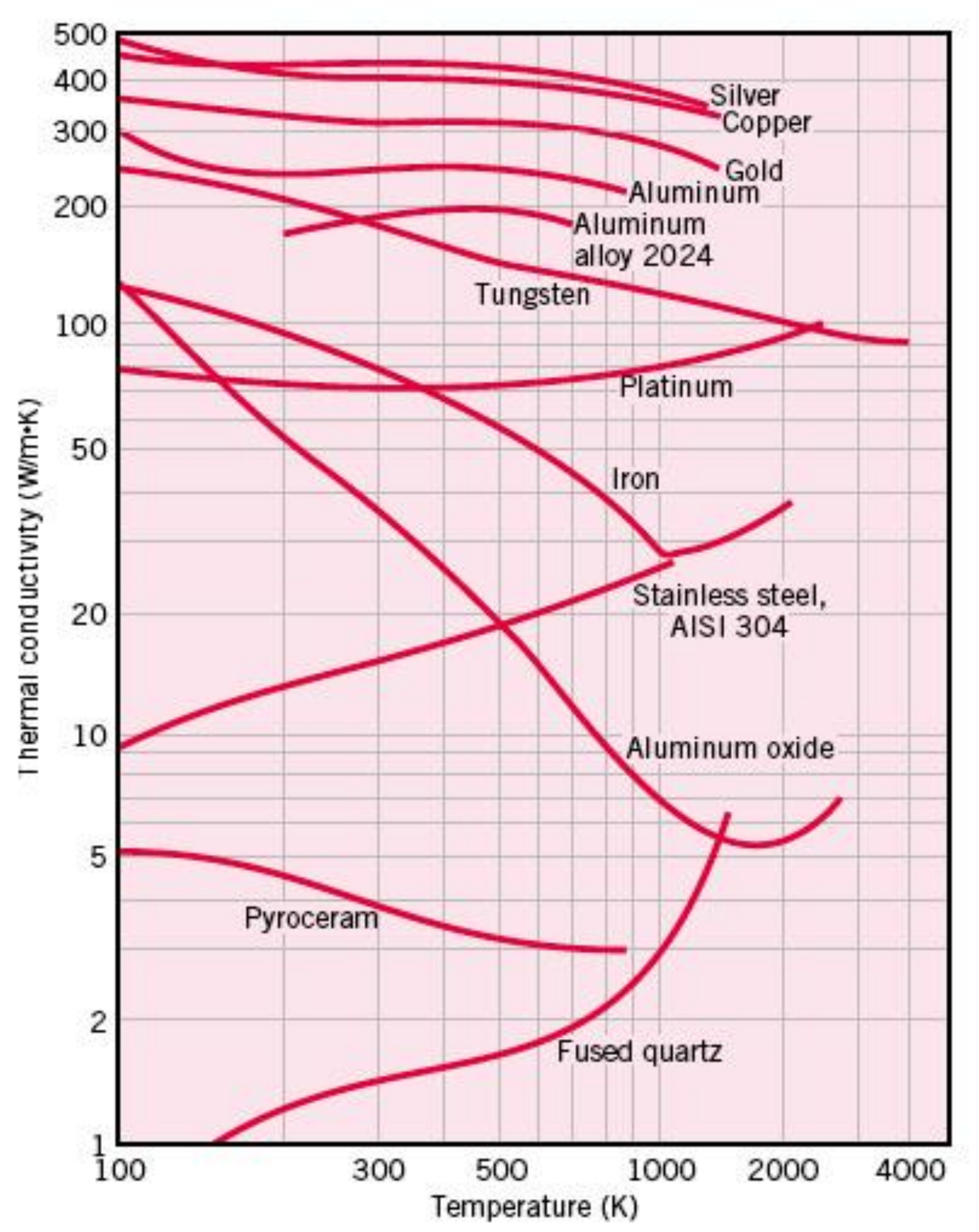
- A condutividade térmica depende da temperatura

$$k_x \equiv -\frac{q''_x}{\left(\partial T / \partial x\right)}$$

- Em geral a condutividade térmica de um sólido é maior do que de um líquido, que por sua vez, é maior do que a de um gás.



Faixas de condutividade térmica de vários estados da matéria a temperaturas e pressões normais.



Dependência da condutividade térmica com a temperatura de Alguns sólidos selecionados.

Outra propriedade relevante:

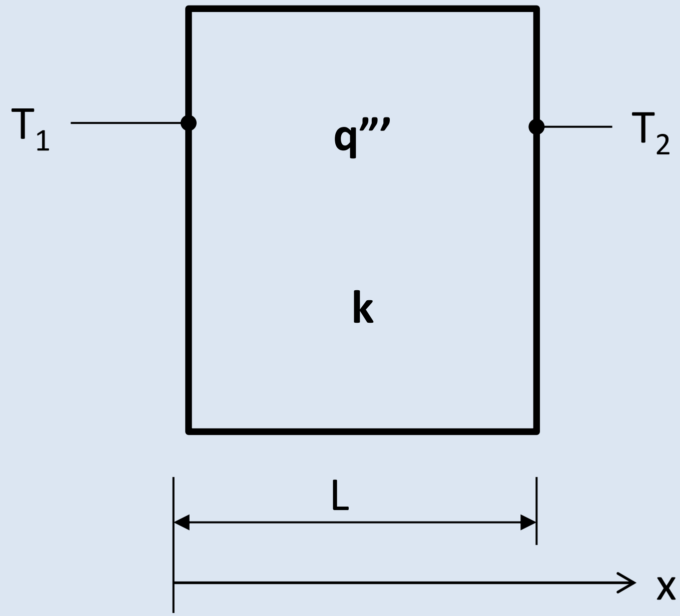
Difusividade Térmica (α)

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

É a capacidade de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la

Exercícios literais

1. Para a parede plana mostrada a seguir e considerando o processo em regime permanente, calcule o perfil de temperatura $T_{(x)}$ e a posição e o valor da temperatura máxima $T_{máx}$. Considere que a taxa de geração interna de calor seja constante, q''' = cte.



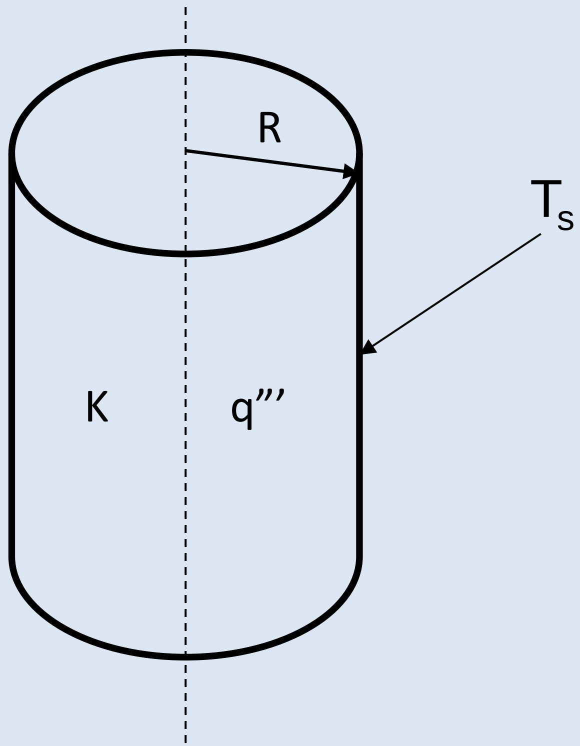
$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Exercícios literais

2. Considere o cilindro mostrado a seguir, onde adota-se condições de regime permanente, 1D (unidimensional), geração interna de calor q''' = cte e conhecidas também a temperatura na superfície da parede (T_s), a condutividade térmica do material (k) e o raio do cilindro R. Determine:

a) O perfil de temperatura $T_{(r)}$;

b) A temperatura máxima e a posição onde ela ocorre.



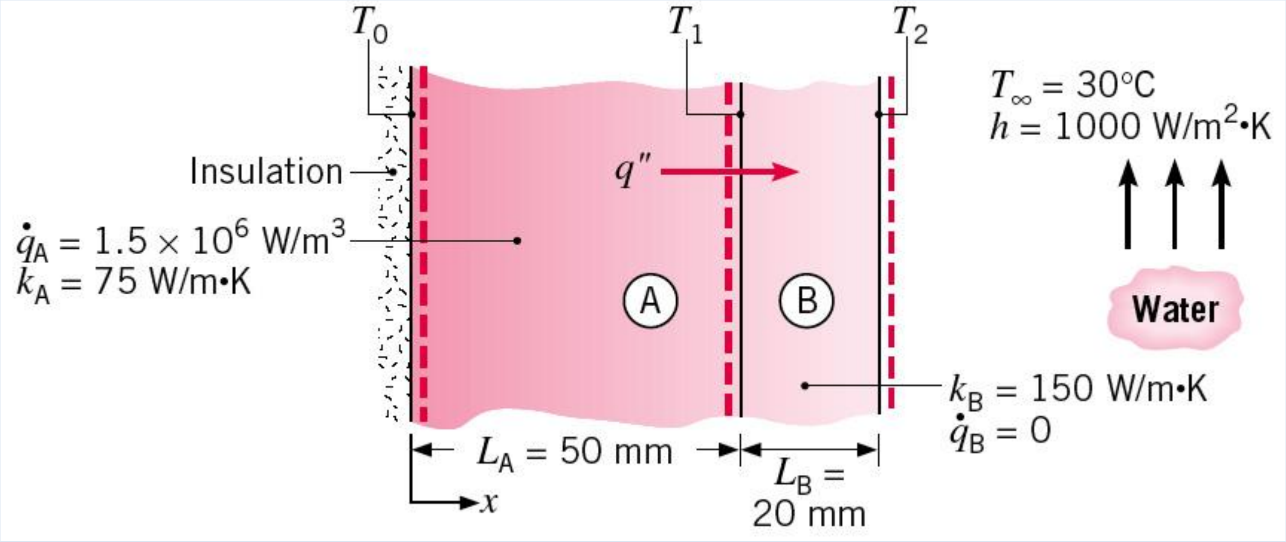
$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Exercício

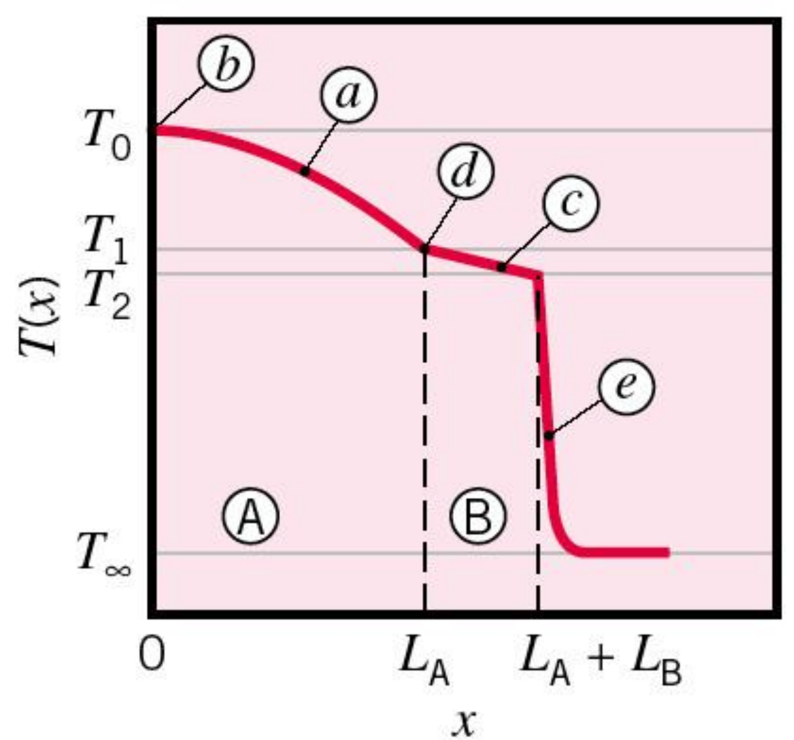
3. Uma parede plana é composta por duas camadas de materiais, A e B. Na parede de material A há geração de calor uniforme q''' = 1,5 x 10^6 W/m^3, k_A = 75 W/(mk) e a espessura é L_A = 50 mm. A parede de material B não apresenta geração de calor, k_B = 150 W/(mk) e a espessura é L_B = 20 mm. A superfície interna do material A está perfeitamente isolada, enquanto a superfície externa do material B é resfriada por uma corrente de água com T_∞ = 30 °C e h = 1000 W/(m^{2}K).

a) Esboce a distribuição de temperatura que existe na parede composta em condições de regime estacionário.

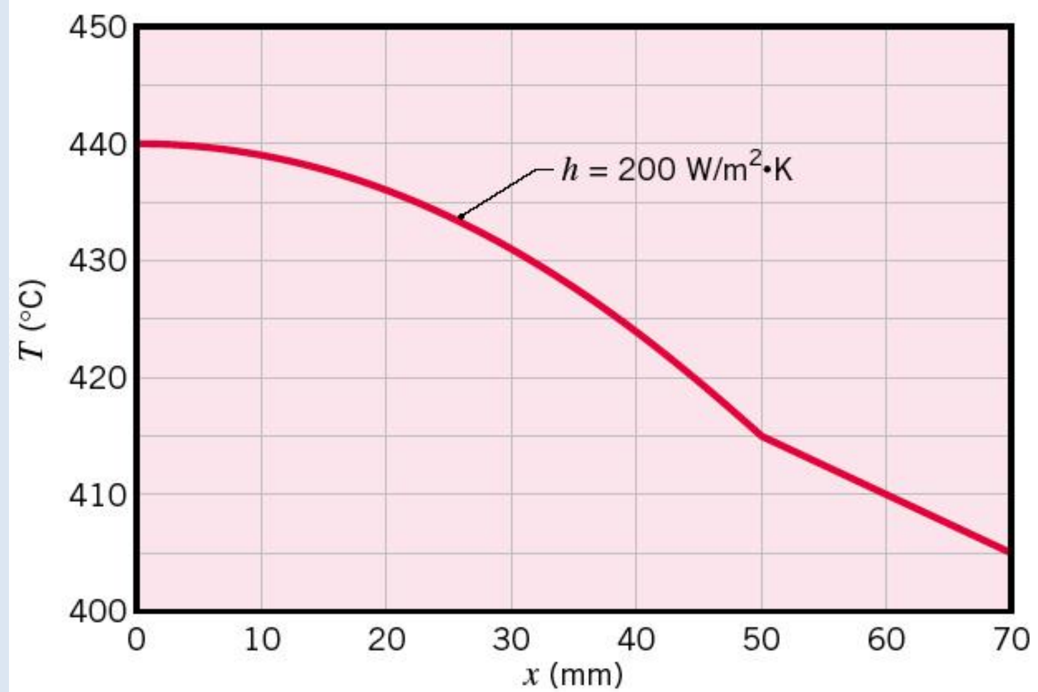
b) Determine a temperatura T_0 na superfície isolada e T_2 na superfície resfriada.



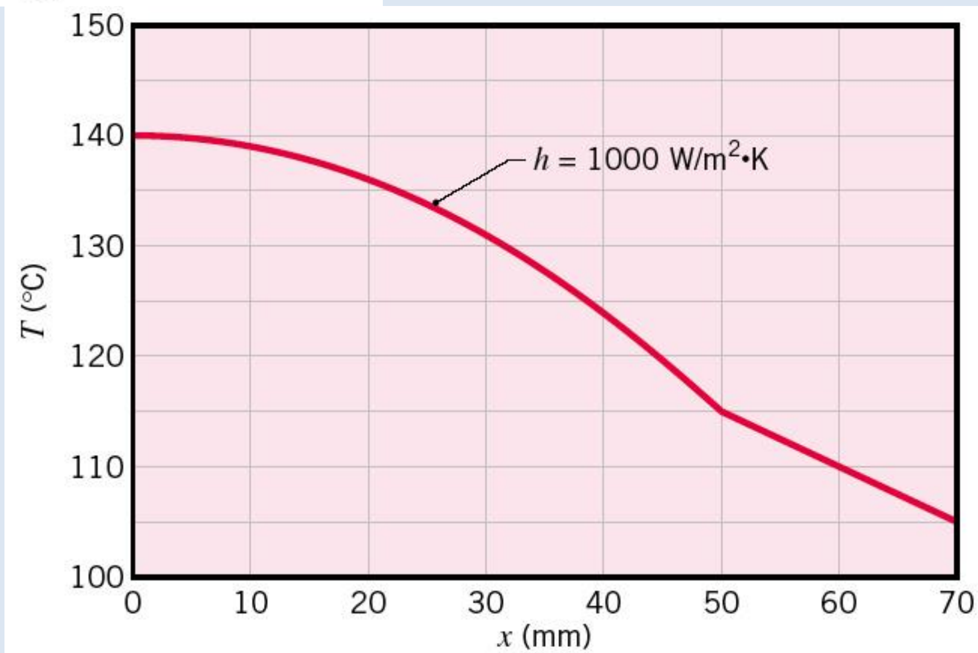
$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



b
a
d
c
e
T_0
T_1
T_2
$T(x)$
T_∞
A
B
0
L_A
$L_A + L_B$
x



h = 200 W/m^2•K
450
440
430
420
410
400
T (°C)
0
10
20
30
40
50
60
70
x (mm)



h = 1000 W/m^2•K
150
140
130
120
110
100
T (°C)
0
10
20
30
40
50
60
70
x (mm)