Laboratório de Engenharia Química I
Aula Prática 03

Estudo do tempo de escoamento de líquidos em função do nível, para recipientes cilíndricos

Prof. Dr. Gilberto Garcia Cortez

Introdução

A experiência consiste em analisar o tempo de escoamento de água em recipientes cilindricos e também as aplicações das equações de conservação de energia e conservação da massa para escoamento em recipiente de formato cilíndrico com fundo plano conectado a dutos de saída também cilíndrico com diferentes comprimentos e diâmetros.

Objetivos

- Obter uma equação teórica do tempo de descarga livre de um tanque conectado a tubos de diferentes seções e comprimentos;

-Determinar o tempo de descarga experimental para cada geometria do sistema e comparar com os resultados teóricos esperados.

-Calcular o desvio relativo (DR) e apresentar os resultados em figuras.

Fundamentos teóricos

Quando um tanque, que possui um líquido, está sendo descarregado, a velocidade de saída do fluido diminuirá à medida que ocorre um deslocamento do nível. Portanto, o tempo de descarga de um determinado volume dependerá do nível.

Um caso de escoamento variado de interesse prático é a determinação do tempo para baixar a superfície de um reservatório a partir de uma altura dada.

Teoricamente, a Equação de Bernoulli (balanço de energia) aplica-se apenas para escoamento permanente. Contudo, se a superfície do reservatório desce com uma velocidade suficientemente baixa, o erro que resulta deste fato é desprezível.

Idealizando um regime permanente e aplicando um balanço de energia com atrito num esquema baseado na Figura 1.

Arranjo físico

Arranjo físico do tanque cheio no t = 0

onde:

D = diâmetro interno do tanque

d = diâmetro interno do duto de saída

h_0 = posição da superfície livre do fluído no tempo t = 0

h = posição do fluido num tempo t qualquer

L = altura do duto de saída

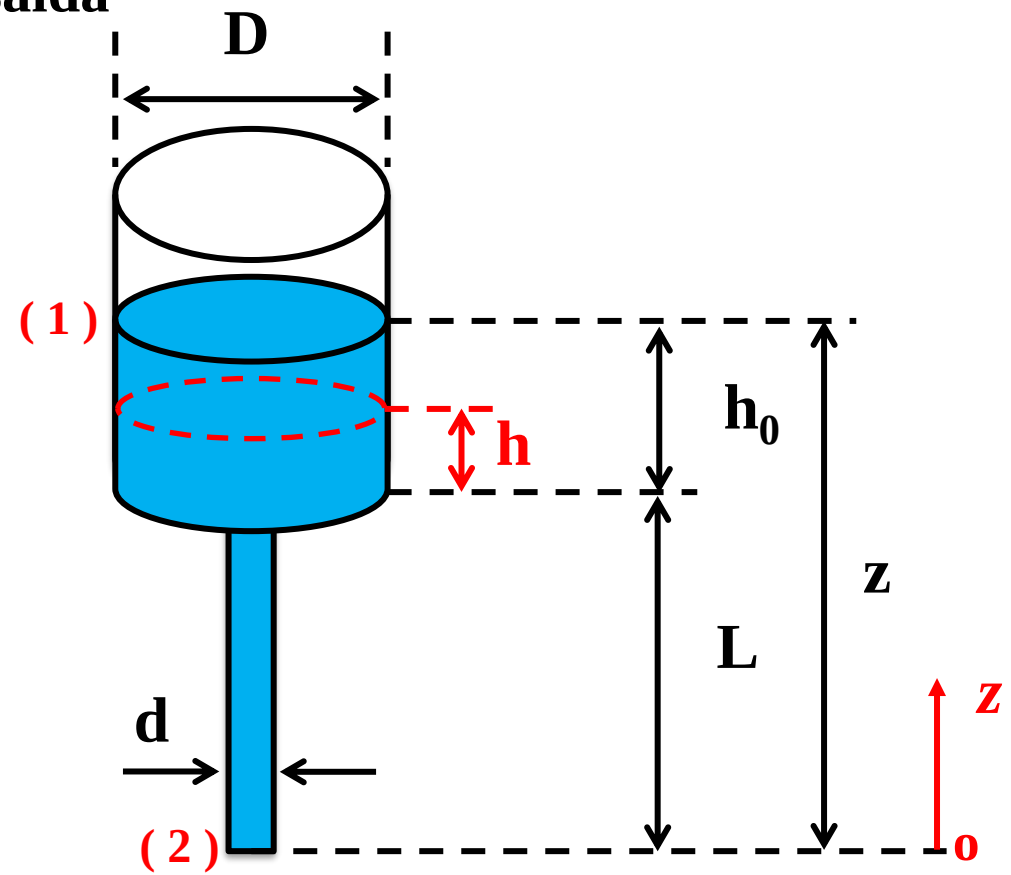


Figura 1

Velocidade experimental do fluído na saída da tubulação para cada tempo

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sai} \quad \text{(Balanço de Massa)}$$

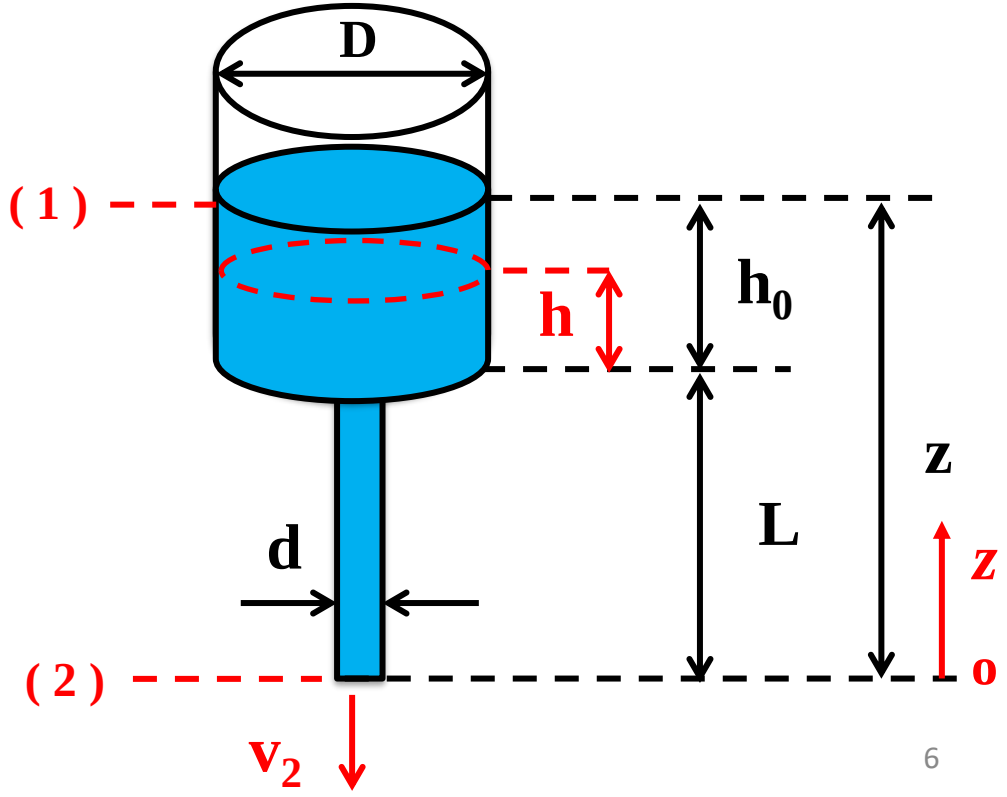
$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_{sai}$$

$$\frac{d(\rho.V)}{dt} = -\rho v_2 A_2$$

$$\rho.\frac{\pi D^2}{4}.\frac{dh}{dt} = -\rho v_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

$$v_2 = -\frac{D^2}{d^2}.\frac{dh}{dt} = -\frac{D^2}{d^2}.\frac{\Delta H}{\Delta t}$$

$\dot{m}$ = vazão mássica do líquido escoado
ρ = massa específica do líquido (água)
h = altura do líquido escoado desde h_0
D = diâmetro interno do tanque
d = diâmetro interno da tubulação
m = massa do fluido (água)



Velocidade Experimental

$$v_2 = -\frac{D^2}{d^2}.\frac{(h_{final} - h_{inicial})}{(t_{final} - t_{inicial})}$$

Regime de escoamento

Escoamento laminar hidraulicamente liso:

Hagen-Poiseuille $f = \frac{64}{R_e}$ Re < 2100

Escoamento turbulento hidraulicamente liso:

Fórmula de Blasius $f = \frac{0{,}316}{R_e^{0{,}25}}$ $4000 < Re < 10^5$

Número de Reynolds $R_e = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu}$

Perda de carga distribuída:

Darcy-Weisbach

$$h_\ell = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

Perda de carga localizada:

$$h_{\ell m} = k \frac{\bar{v}^2}{2}$$

h_ℓ = perda de carga ao longo do comprimento do duto (m^2/s^2)
$h_{\ell m}$ = perda de carga em acessórios do duto (m^2/s^2)
f = fator de atrito de Darcy-Weisbach (adimensional)
L = comprimento do duto (m)
v = velocidade média do líquido no interior do duto (m/s)
d = diâmetro interno do duto (m)
g = aceleração da gravidade local (m/s^2)
k = coeficiente de perda de carga localizada (adimensional)

Massa específica e viscosidade da água

$$\mu = \frac{1{,}78 \times 10^{-3}}{1 + 0{,}0337T + 0{,}000221T^2}$$

$$\rho = 999{,}71704 + 0{,}07894xT - 0{,}00864xT^2 + 5{,}6752.10^{-5}xT^3 - 1{,}94502.10^{-7}xT^4$$

$\rho \equiv \left[\frac{kg}{m^3}\right]$ (massa específica da água)

$\mu \equiv \left[\frac{kg}{m.s}\right]$ (viscosidade da água)

$T \equiv \left[^oC\right]$

Determinação do tempo teórico de escoamento da água

Supondo regime estacionário e desprezando a energia cinética do líquido na superfície do tanque, obtém-se, a partir da equação do balanço de energia, a velocidade na saída da tubulação:

$$\left(\frac{P_1}{\rho} + \frac{\bar{v}_1^{\,2}}{2} + h_1 g \right) - \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{v}_2^{\,2}}{2} + h_2 g \right) = h_\ell + h_{\ell m}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gz}{\left[f\frac{L}{d} + k_{Tanque} + k_{Duto} + 1 \right]}} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{P_1}{\rho} + \frac{\bar{v}_1^{\,2}}{2} + h_1 g\right) - \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{v}_2^{\,2}}{2} + h_2 g\right) = h_\ell + h_{\ell m}$$

$\bar{v}_1 \approx 0$; $P_1 = P_2 = P_{atm}$; $h_2 = 0$; $h_1 = h$; $\bar{v}_2 = v$ (perfil uniforme)

ρ = cte (fluido incompressível)

$$h_\ell = f\frac{L}{d}\frac{\bar{v}^2}{2g} \text{ (distribuida)} \; ; \; h_{\ell m} = k\frac{\bar{v}^2}{2g} \text{ (localizada)}$$

$$h - \frac{v^2}{2g} = h_\ell + h_{\ell m}$$

$$h = \frac{v^2}{2g} + f\frac{L}{d}\frac{\bar{v}^2}{2g} + k\frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$h = \frac{v^2}{2g}\left[f\frac{L}{d} + k + 1\right]$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{\left[f\frac{L}{d} + k + 1\right]} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left[f\frac{L}{d} + k + 1\right]}} \qquad (1)$$

Determinação do tempo teórico de escoamento da água

Aplicando a equação da continuidade em regime transiente, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV + \int_{SC}\rho\vec{v}.d\vec{A} = 0 \quad (\text{Equação da continuidade}) \; ; \quad \rho = cte$$

$$\frac{dV}{dt} - v_1A_1 + v_2A_2 = 0 \; ; \quad v_1 = 0 \; (\text{não entra nada});$$

$$A_1 = \frac{\pi D^2}{4} \; ; \quad A_2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2gz}{\left[f\frac{L}{d} + k_{Tanque} + k_{Duto} + 1\right]}}$$

$$\frac{dV}{dt} = -v_2A_2$$

$$dt = -\frac{dV}{v_2 A_2} = -\frac{dV}{A_2\sqrt{\frac{2gh}{\left[f\frac{L}{d} + k + 1\right]}}}$$

$$dV = A_1 dh$$

$$dt = -\frac{A_1 dh}{A_2\sqrt{\frac{2gh}{\left[f\frac{L}{d} + k + 1\right]}}}$$

$$dt = -\frac{A_1}{A_2}\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\right]^{0,5}\frac{dh}{h^{0,5}}$$

$$\int_0^t dt = -\frac{A_1}{A_2}\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\right]^{0,5}\int_{L+h_0}^{L+h}\frac{dh}{h^{0,5}}$$

$$t = -\frac{A_1}{A_2}\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\right]^{0,5}\left[2h^{0,5}\right]_{L+h_0}^{L+h}$$

$$t = -\frac{2A_1}{A_2}\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\right]^{0,5}\left[(L+h)^{0,5} - (L+h_0)^{0,5}\right]$$

$$t = \frac{2A_1}{A_2}\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\right]^{0,5}\left[(L+h_0)^{0,5} - (L+h)^{0,5}\right]$$

$$t = 2\left(\frac{D}{d}\right)^2\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\right]^{0,5}\left[(L+h_0)^{0,5} - (L+h)^{0,5}\right]$$

$$t = 2\left[\frac{\left(f\frac{L}{d} + k + 1\right)}{2g}\left(\frac{D}{d}\right)^4\right]^{0,5}\left[(L+h_0)^{0,5} - (L+h)^{0,5}\right]$$

Equação teórica que rege o fenômeno:

$$t = 2\left[\frac{1}{2g}\left[\left(f\frac{L}{d} + \sum k + 1\right)\left(\frac{D}{d}\right)^4\right]\right]^{0,5}\left[(L+h_0)^{0,5} - (L+h)^{0,5}\right] \qquad (2)$$

onde:

t = tempo total teórico de descarga do líquido entre h_0 e h

D = diâmetro interno do tanque

d = diâmetro interno do duto de saída

h_0 = posição inicial da superfície livre do fluído em t = 0

h = posição final da superfície livre do fluído em t final

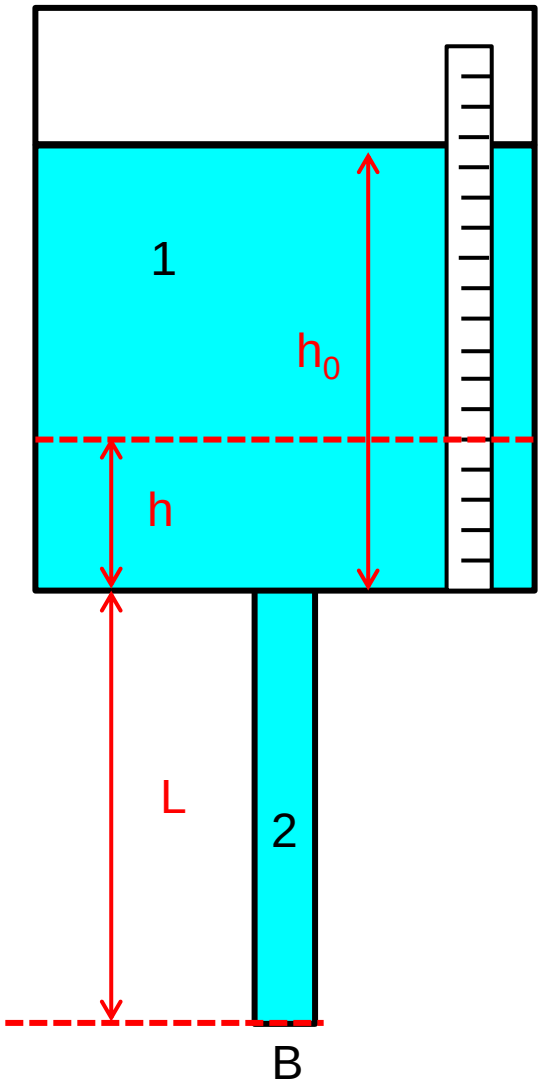
L = altura do tubo de saída

f = fator de atrito de Darcy para tubo liso

k = coeficiente de perda de carga localizada

g = aceleração da gravidade

Procedimento Experimental

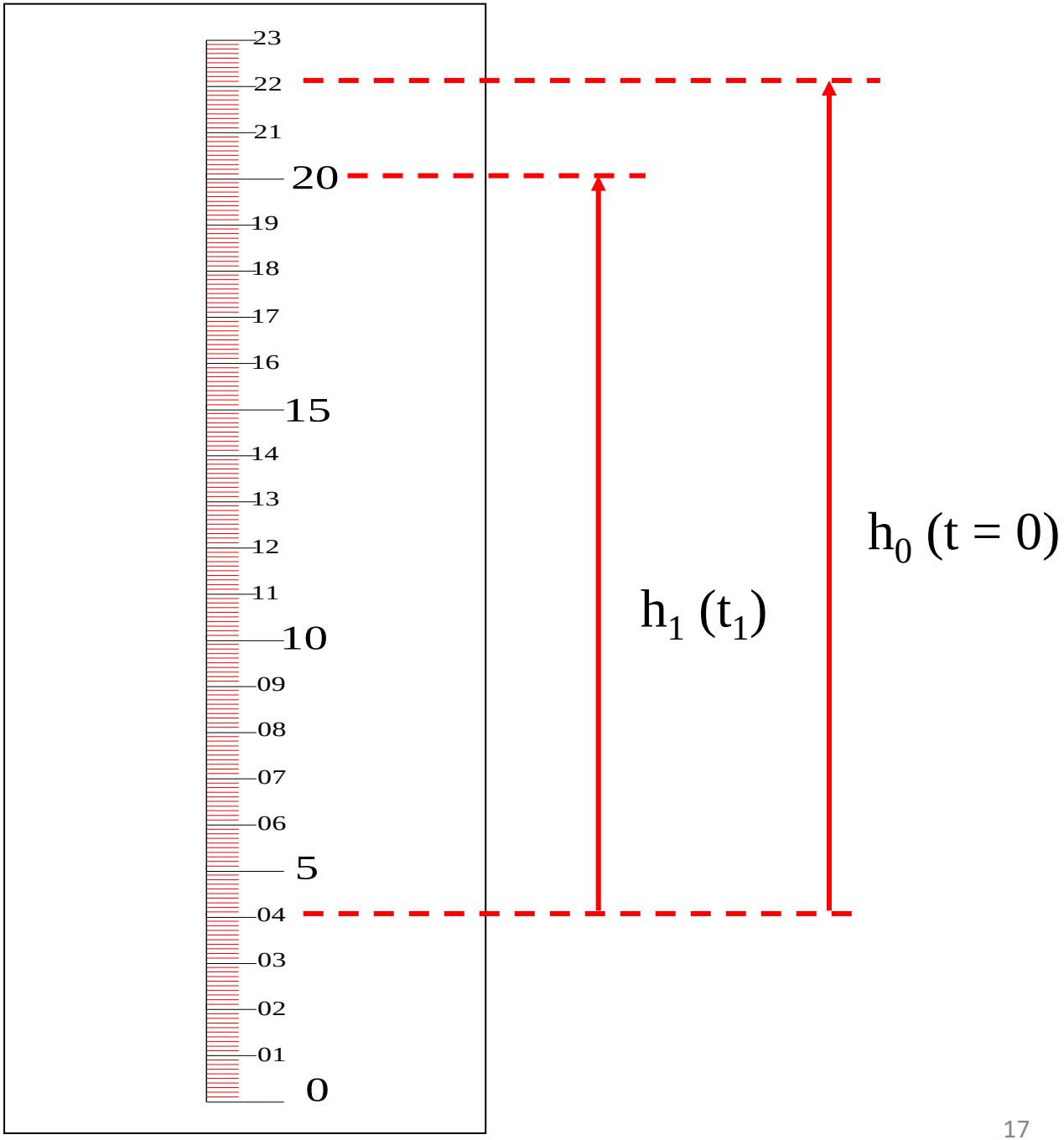


Passo 1: **Colocar o fluido (água) no recipiente 1 até uma altura h_0, estando o duto 2 conectado no tanque e vedado em B;**

Passo 2: Retirar a vedação em B e anotar através de um cronômetro o tempo para atingir uma determinada altura h;

Passo 3: Repete-se o experimento mais duas vezes para se obter uma média dos tempos encontrados;

Passo 4: Muda-se o duto 2 e retorna-se ao passo 1, até o término do números de dutos a serem ensaiados.


23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
09
08
07
06
5
04
03
02
01
0
$h_1 (t_1)$
$h_0 (t = 0)$

Procedimento Experimental

Dimensões dos dutos

	A	B	C	D	E	F
L (mm)	75	150	300	600	600	600
d (mm)	4,8	4,8	4,8	3,1	4,8	7,8

OBSERVACÃO: os dados contidos nas tabelas mostradas a seguir deverão ser entregues ao professor ao término do experimento. O grupo deverá providenciar uma copia para que possam elaborar o relatório.

Análise dos resultados

a) Refazer os balanços de energia e de massa detalhadamente até obter as equações da velocidade na saída do duto (eq. 1) e o tempo teórico (eq. 2);

b) Obter os valores de v (saída), Re, f, h_ℓ (distribuída), $h_{\ell m}$ (localizada), $t_{teórico}$ e o DR (%) de cada tempo encontrado para cada duto (A, B, C, D, E, F,) na planilha;

c) Estabelecer o gráfico da influência do comprimento do duto na relação entre os tempos de escoamento experimental e o teórico, ($t_{texp}/t_{teórico}$) versus altura de escoamento (H_i) para um diâmetro de duto fixo de 4,8 mm;

d) Estabelecer o gráfico da influência do diâmetro do duto na relação entre os tempos de escoamento experimental e o teórico, ($t_{texp}/t_{teórico}$) versus altura de escoamento (H_i) para um comprimento de duto fixo de 600 mm;

e) Estabelecer o gráfico da influência da razão entre os diâmetros do tanque (D) e do duto (d_i) na relação entre os tempos de escoamento experimental e o teórico, ($t_{texp}/t_{teórico}$) versus altura de escoamento (H_i) para um comprimento de duto fixo de 600 mm (Figura 3);

f) Discutir os resultados para cada figura.

Tabela de dados							
Temperatura da água	Diâmetro do tanque	Área do tanque	Massa específica	Viscosidade	Aceleração da gravidade	Constante de perda de carga localizada	
T (°C)	D (m)	A (m^2)	ρ (kg/m^3)	μ (kg/m.s)	g (m/s^2)	$K_{(tanque)}$	$K_{(duto)}$

$$\mu = \frac{1{,}78x10^{-3}}{1 + 0{,}0337T + 0{,}000221T^2}$$

$$\rho = 999{,}71704 + 0{,}07894xT - 0{,}00864xT^2 + 5{,}6752.10^{-5}xT^3 - 1{,}94502.10^{-7}xT^4$$

$$\rho \equiv \left[\frac{kg}{m^3}\right] \quad \text{(massa específica da água)}$$

$$\mu \equiv \left[\frac{kg}{m.s}\right] \quad \text{(viscosidade da água)}$$

$$T \equiv \left[^{o}C\right]$$

L (mm)	d (mm)	h (cm)	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4
		t_{A1} (s)	0									
75	4,8	t_{A2} (s)	0									
		t_{A3} (s)	0									
		t_{B1} (s)	0									
150	4,8	t_{B2} (s)	0									
		t_{B3} (s)	0									
		t_{C1} (s)	0									
300	4,8	t_{C2} (s)	0									
		t_{C3} (s)	0									
		t_{D1} (s)	0									
600	3,1	t_{D2} (s)	0									
		t_{D3} (s)	0									
		t_{E1} (s)	0									
600	4,8	t_{E2} (s)	0									
		t_{E3} (s)	0									
		t_{F1} (s)	0									
600	7,8	t_{F2} (s)	0									
		t_{F3} (s)	0									

Dados a serem obtidos pela planilha de cálculo

Duto	Comprimento L (m)	Diâmetro d (m)	L/d	h (m)	t_{exp} (s)	V_{exp} (m/s)	R_e	f	h_ℓ (m^2/s^2)	$h_{\ell m}$ (m^2/s^2)	$t_{teórico}$ (s)	DR (%)
A	0,075	$4,8x10^{-3}$	15,625	0,22								
				0,20								
				0,18								
				0,16								
				0,14								
				0,10								
				0,08								
				0,06								
				0,04								
				0,02								

Duto	Comprimento L (m)	Diâmetro d (m)	L/d	h (m)	t_{exp} (s)	V_{exp} (m/s)	R_e	f	h_ℓ (m^2/s^2)	$h_{\ell m}$ (m^2/s^2)	$t_{teórico}$ (s)	DR (%)
F	0,60	$7,8x10^{-3}$	76,92	0,22								
				0,20								
				0,18								
				0,16								
				0,14								
				0,10								
				0,08								
				0,06								
				0,04								
				0,02								

Gráfico 1: **Influência do comprimento do duto na relação entre os tempos de escoamento experimental e teórico, para um diâmetro de duto fixo.**

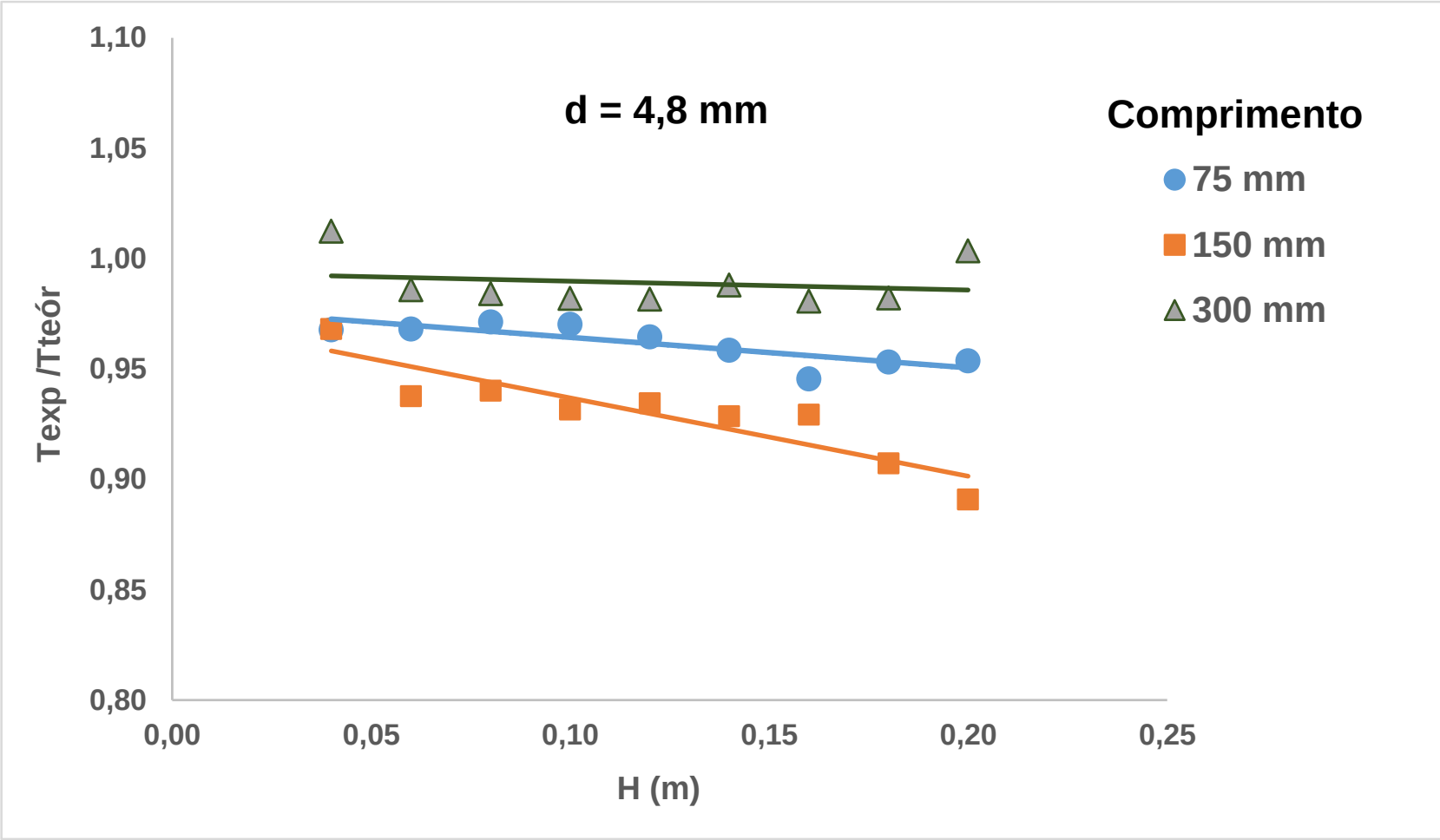


Gráfico 2: **Influência do diâmetro do duto na relação entre os tempos de escoamento experimental e teórico, para um comprimento de duto fixo.**

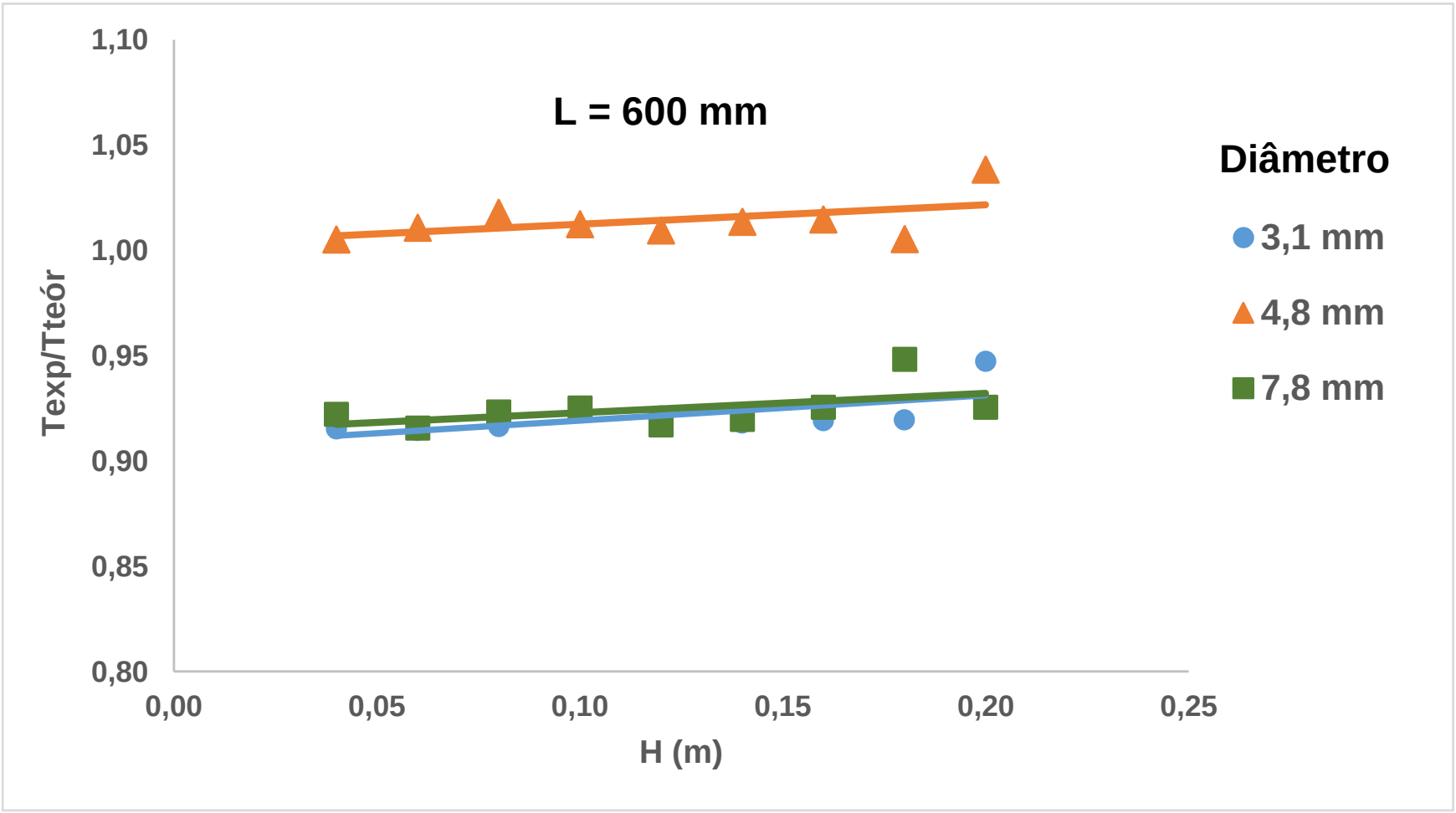
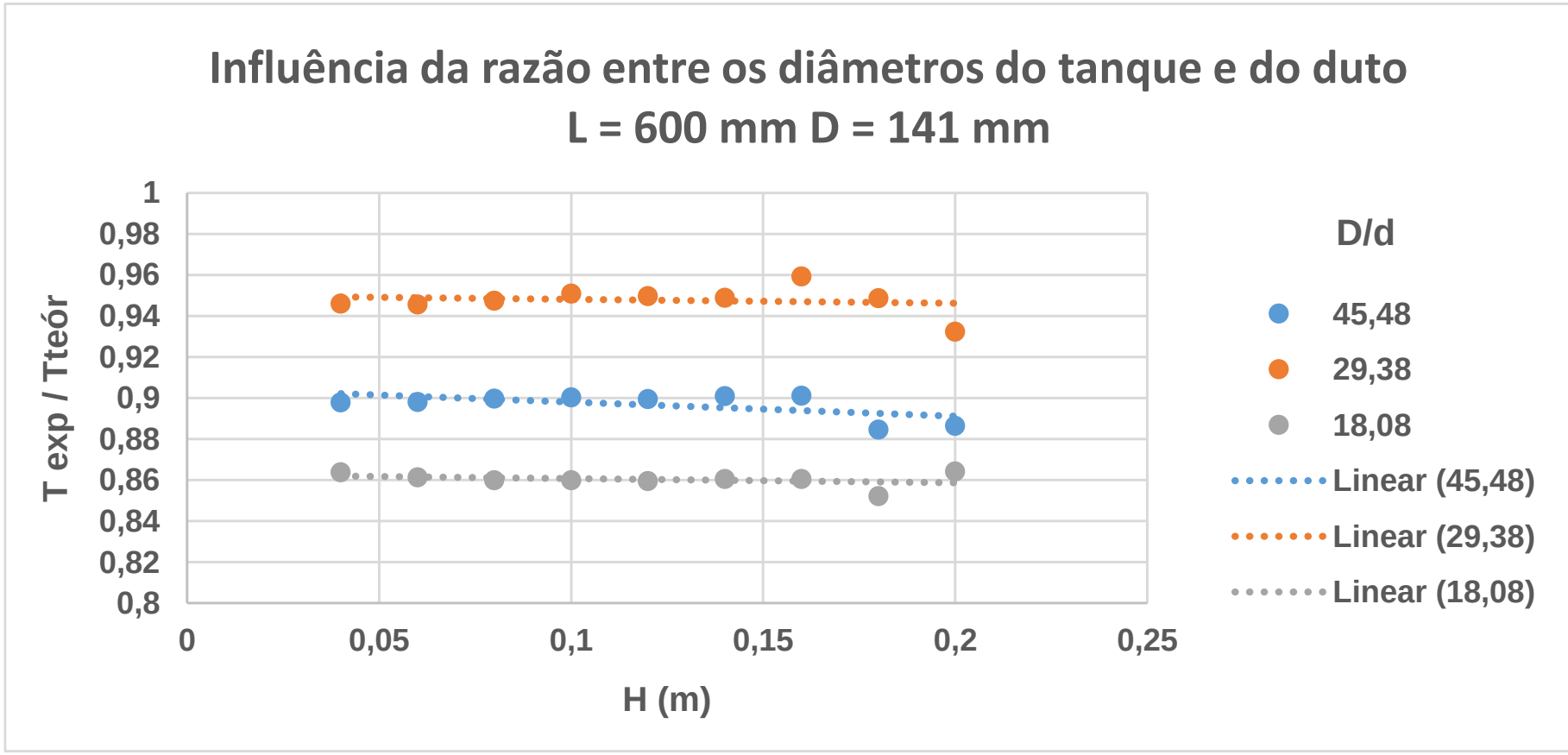
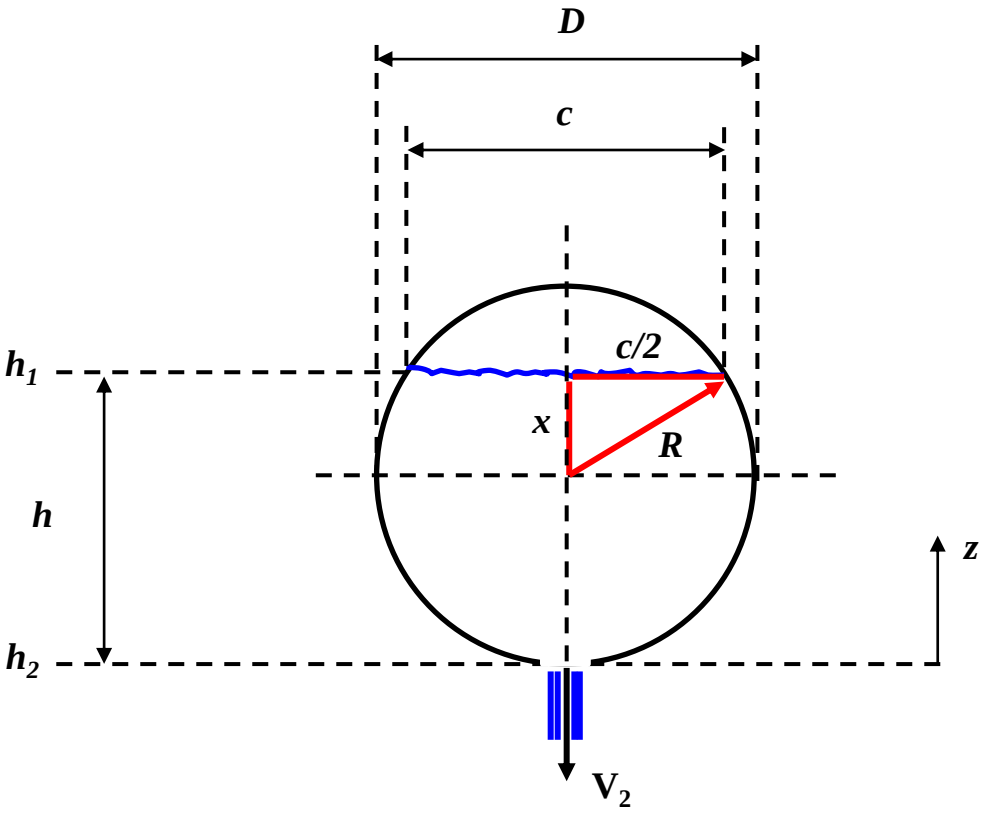


Gráfico 3: **Influência da razão entre os diâmetros do tanque (D) e do duto (d_i) na relação entre os tempos de escoamento experimental e o teórico, ($t_{texp}/t_{teórico}$) versus altura de escoamento (H_i) para um comprimento de duto fixo de 600 mm.**



Tempo teórico de escoamento de líquidos em recipientes esféricos



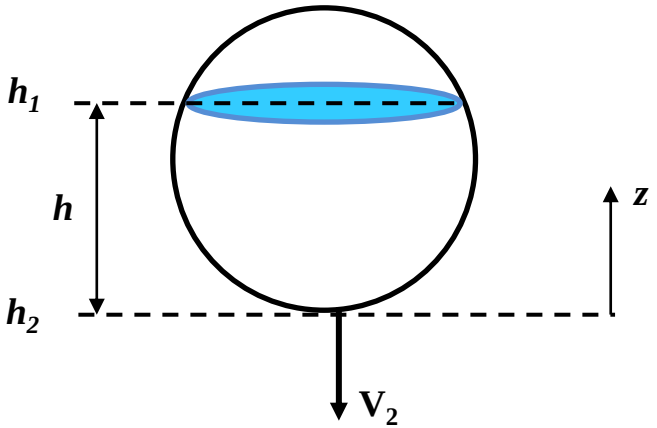
Equação da energia em regime permanente e fluido incompressível

$$\left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gh_1\right) - \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{v}_2^2}{2} + gh_2\right) = h_{\ell T}$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}\,;\, \bar{v}_1 = 0\,;\; h_{\ell T} = 0$$

$$h_1 - \frac{\bar{v}_2^2}{2} - h_2 = 0$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$



$v_2 = \sqrt{2gh}$ (sem perdas de carga na saída)

$v_2 = C_V\sqrt{2gh}$ (com perdas de carga na saída)

C_V = coeficiente de velocidade

Balanço de massa

$$\frac{dM_\ell}{dt} = \rho_\ell . \bar{v}_1 . A_1 - \rho_\ell . \bar{v}_2 . A_2$$

$$\frac{dM_\ell}{dt} = - \rho_\ell . \bar{v}_2 . A_2 \quad \text{(Ideal)}$$

$$\frac{dM_\ell}{dt} = - \rho_\ell . \bar{v}_2 . A_C \quad \text{(Real)} \quad ; \quad A_C = C_C . A_2$$

A_C = Área da vena contracta, C_C = Coeficiente de contração

$$\frac{dM_\ell}{dt} = - \rho_\ell . \bar{v}_2 . A_C = - \rho_\ell . C_V . A_C . \sqrt{2gh} = - \rho_\ell . \underbrace{C_V . C_C}_{C_d} . A_2 . \sqrt{2gh}$$

C_d = Coeficiente de descarga

$$\frac{dM_\ell}{dt} = - \rho_\ell . C_d . A_2 . \sqrt{2gh}$$

C_d = 0,61 para orifícios com arestas vivas
C_d = 0,80 para tubo curto
C_d = 0,98 para orifícios de contorno redondo

$$\frac{dM_\ell}{dt} = -\rho_\ell.C_d.A_2.\sqrt{2gh} \;;\; M_\ell = \rho_\ell.V_\ell$$

$$\rho_\ell.\frac{dV_\ell}{dt} = -\rho_\ell.C_d.A_2.\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dV_\ell}{dt} = -C_d.A_2.\sqrt{2gh} \;;\; V_\ell = A_1.h$$

$$A_1.\frac{dh}{dt} = -C_d.A_2.\sqrt{2gh} \;;\; \boxed{A_1 = \frac{\pi}{4}c^2} \;;\; A_2 = \frac{\pi}{4}d^2$$

Pitágoras

$$x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = R^2 \rightarrow \frac{c^2}{4} = R^2 - x^2 \quad (x\pi)$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}c^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right) \;;\; A_1 = \frac{\pi}{4}c^2 \;;\; \boxed{x = h - R}$$

$$\pi\left(R^2 - x^2\right)\frac{dh}{dt} = - C_d.A_2.\sqrt{2gh}$$

$$\pi\left[R^2 - (h - R)^2\right]\frac{dh}{dt} = - C_d.A_2.\sqrt{2g}.h^{1/2}$$

$$\pi\left[R^2 - h^2 + 2hR - R^2\right]\frac{dh}{dt} = - C_d.A_2.\sqrt{2g}.h^{1/2}$$

$$\pi\left[\frac{2hR - h^2}{h^{1/2}}\right]dh = - C_d.A_2.\sqrt{2g}.dt$$

$$\pi\left[2Rh^{1/2} - h^{3/2}\right]dh = - C_d.A_2.\sqrt{2g}.dt$$

$$\pi\int_h^0\left[2Rh^{1/2} - h^{3/2}\right]dh = - C_d.A_2.\sqrt{2g}\int_0^t dt$$

$$\pi\left[2R\frac{2}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} \right]_h^0 = - C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d$$

$$-\pi\left[R\frac{4}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} \right] = - C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d$$

$$\pi\left[R\frac{4}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} \right] = C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d \;\; ; \;\; R = \frac{D}{2}$$

$$\pi\left[\frac{2}{3}Dh^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} \right] = C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d$$

$$\pi\left[\left(\frac{2}{3}D - \frac{2}{5}h \right)h^{3/2} \right] = C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d$$

$$\frac{3}{3}\pi\left[\left(\frac{2}{3}D - \frac{2}{5}h\right)h^{3/2}\right] = C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d$$

$$\frac{2}{3}\pi\left(\frac{3}{3}D - \frac{3}{5}h\right)h^{3/2} = C_d.A_2.\sqrt{2g}.t_d$$

$$\frac{2}{3}\pi\left(D - \frac{3}{5}h\right)h^{3/2} = C_d.A_2.\sqrt{g}.2^{1/2}.t_d$$

$$\frac{2}{2^{1/2}}\frac{\pi}{3}\left(D - \frac{3}{5}h\right)h^{3/2} = C_d.A_2.\sqrt{g}.t_d$$

$$\sqrt{2}\frac{\pi}{3}\left(D - \frac{3}{5}h\right)h^{3/2} = C_d.A_2.\sqrt{g}.t_d$$

$$t_d = \frac{\sqrt{2}.\pi\left(D - \frac{3}{5}h\right)h^{3/2}}{3.C_d.A_2.\sqrt{g}}$$ (tempo de descarga de um tanque esférico)