LOM3100 Dinâmica - 2019

3. Dinâmica do ponto.

PARTE 2

Lei de Newton da gravitação

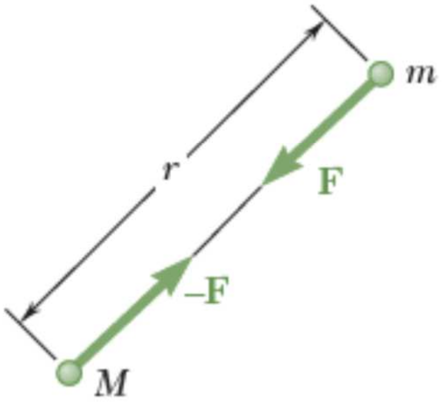


Figura 12.18

Como vimos na seção anterior, a força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta, ou pela Terra sobre um satélite em órbita, é um exemplo importante de uma força central. Nesta seção você vai aprender como determinar a intensidade de uma força gravitacional.

Em sua *lei de gravitação universal*, Newton estabeleceu que duas partículas de massas M e m a uma distância r uma da outra se atraem com forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ dirigidas ao longo da linha que as une (Fig. 12.18). A intensidade comum F das duas forças é

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{r^2}} \tag{12.28}$$

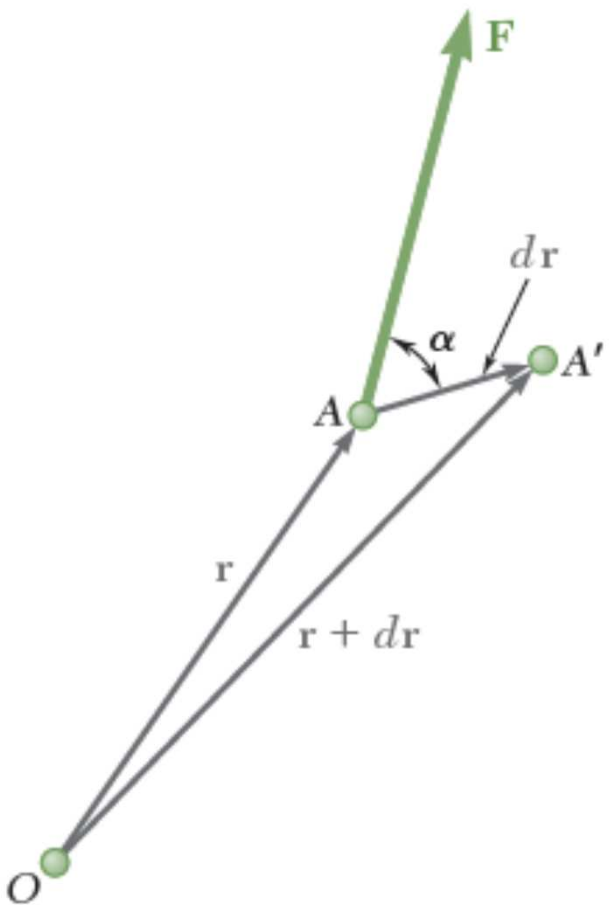
onde G é uma constante universal, chamada *constante de gravitação*. Experimentos mostram que o valor de G é $(66{,}73 \pm 0{,}03) \times 10^{-12}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$

$$W = mg = \frac{GM}{R^2}m \qquad \text{ou} \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

$$GM = gR^2$$

$$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \text{ e } R = 6{,}37 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

Trabalho de uma força



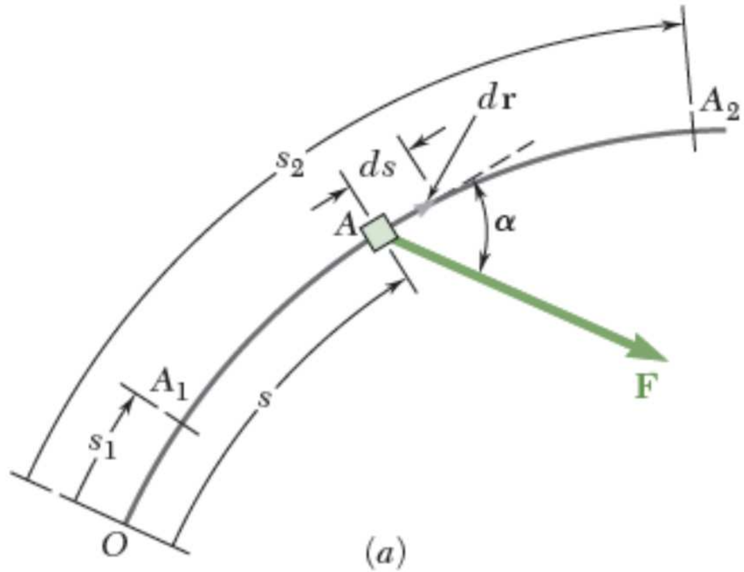
$$\boxed{dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$

$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ *joule* (J)

$$dU = F\, ds \cos \alpha$$

$$dU = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

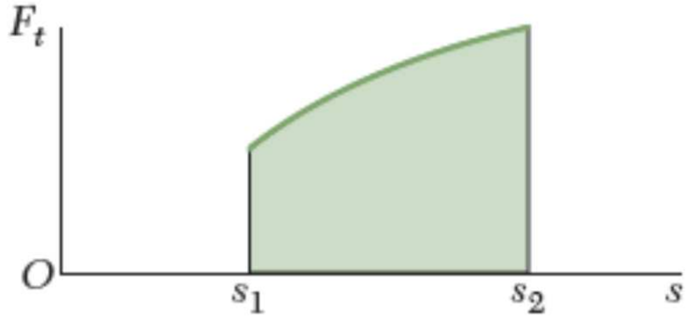
$$\boxed{U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$



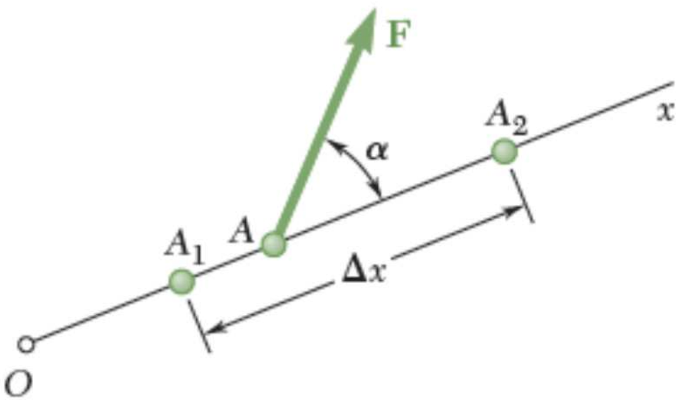
(a)

Trabalho de uma força

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds$$



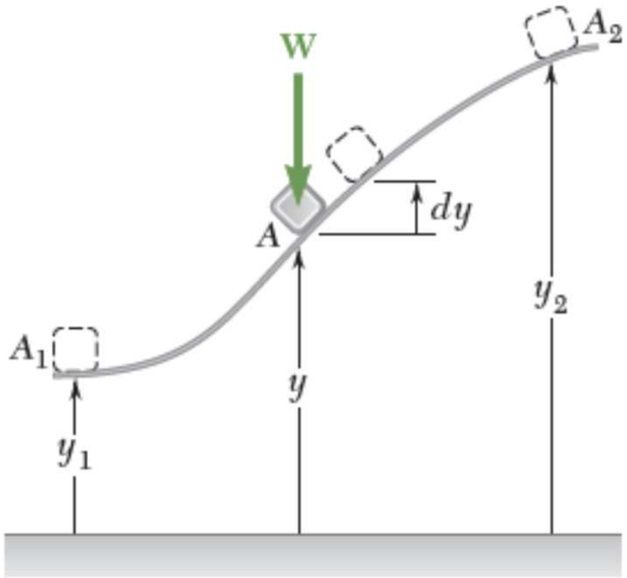
$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$



$$U_{1\to2} = (F\cos\alpha)\,\Delta x$$

onde: α = ângulo entre a força e a direção do movimento
Δx = deslocamento de A_1 até A_2

Trabalho da força de gravidade



$$dU = -W\,dy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2$$

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y$$

onde Δy é o deslocamento vertical de A_1 até A_2. Logo, o trabalho do peso **W** é igual ao *produto de W e do deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo*. O trabalho é *positivo* quando $\Delta y < 0$, isto é, *quando o corpo move-se para baixo.*

Trabalho de uma força

Trabalho da força exercida por uma mola. Considere um corpo A conectado a um ponto fixo B por meio de uma mola; admite-se que a mola não esteja deformada quando o corpo está em A_0 (Fig. 13.5*a*). Evidências experimentais mostram que a magnitude da força $\mathbf{F}$ exercida pela mola sobre o corpo A é proporcional à deflexão x da mola medida em relação à posição A_0. Temos

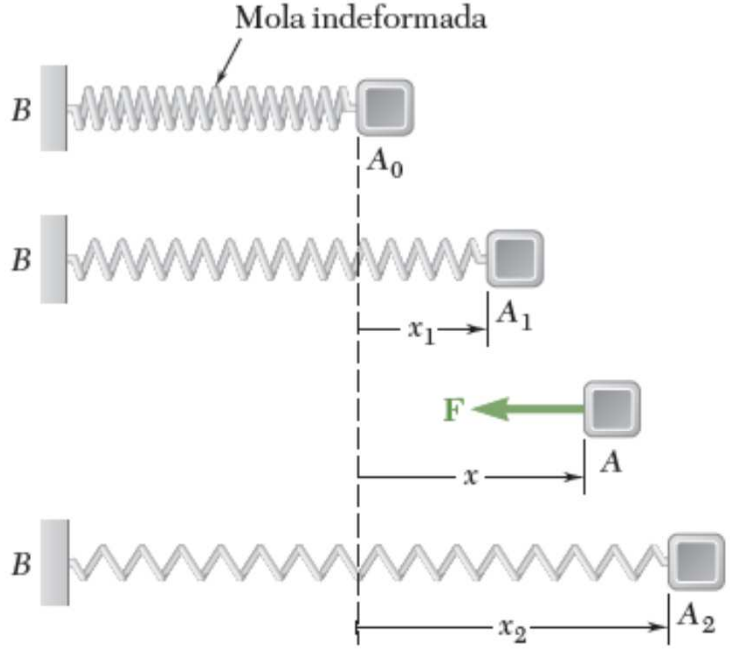
$$F = kx \tag{13.5}$$

onde k é a *constante de mola*, expressa em N/m ou kN/m em unidades do SI*.

O trabalho da força $\mathbf{F}$ exercida pela mola durante um deslocamento finito do corpo de A_1 ($x = x_1$) até A_2 ($x = x_2$) é obtido escrevendo-se

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{13.6}$$



(*a*)

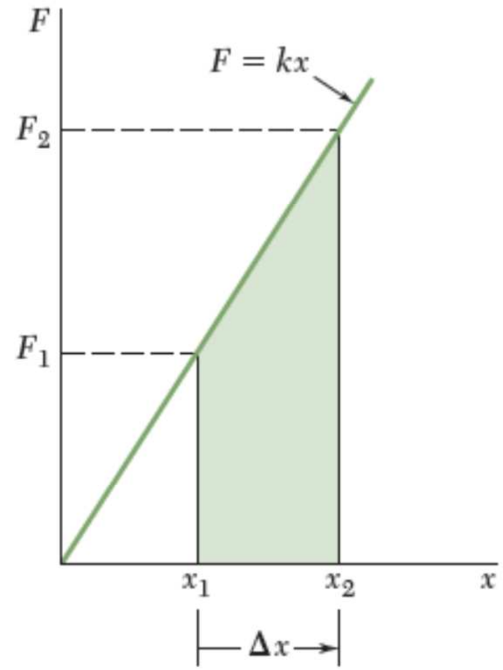
Trabalho da força exercida por uma mola

Deve-se ter cuidado ao expressar k e x em unidades consistentes. Observemos que o trabalho da força **F** exercida pela mola sobre o corpo é *positivo* quando $x_2 < x_1$, isto é, *quando a mola está retornando à sua posição indeformada.*

Como a Eq. (13.5) é a equação de uma linha reta de coeficiente angular k passando pela origem, o trabalho $U_{1\to 2}$ da força **F** durante o deslocamento de A_1 até A_2 pode ser obtido pelo cálculo da área do trapézio mostrado na Fig. 13.5*b*. Isso é feito calculando-se F_1 e F_2 e multiplicando a base Δx do trapézio pela sua altura média $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Já que o trabalho da força **F** exercida pela mola é positivo para um valor negativo de Δx, escrevemos

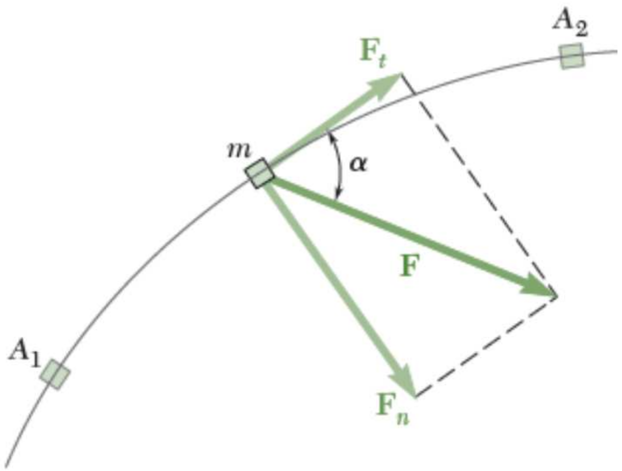
$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \qquad (13.6')$$

Em geral, a Eq. (13.6′) é de uso mais conveniente que a (13.6) e propicia menor chance de confusão das unidades envolvidas.



(b)

Energia cinética de uma partícula



$$F_t = ma_t \qquad \text{ou} \qquad F_t = m\frac{dv}{dt}$$

onde v é a velocidade da partícula. Relembrando da Seção 11.9, que $v = ds/dt$, obtemos

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$F_t\,ds = mv\,dv$$

Integrando desde A_1, onde $s = s_1$ e $v = v_1$, até A_2, onde $s = s_2$ e $v = v_2$, escrevemos

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (13.8)$$

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}mv^2}$$

$$\boxed{U_{1\to2} = T_2 - T_1}$$

$$\boxed{T_1 + U_{1\to2} = T_2}$$

$$\text{kg(m/s)}^2 = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)\text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

Potência e eficiência

$$\text{Potência média} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

Fazendo Δt tender a zero, obtemos no limite

$$\boxed{\text{Potência} = \frac{dU}{dt}}$$

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\boxed{\text{Potência} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}$$

watt (W)

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{N} \cdot \text{m/s}$$

$$\eta = \frac{\text{trabalho de saída}}{\text{trabalho de entrada}}$$

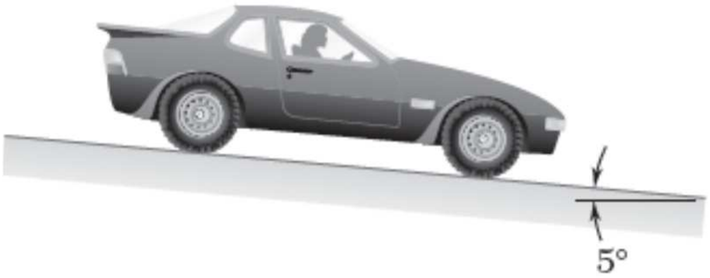
$$\boxed{\eta = \frac{\text{potência de saída}}{\text{potência de entrada}}}$$

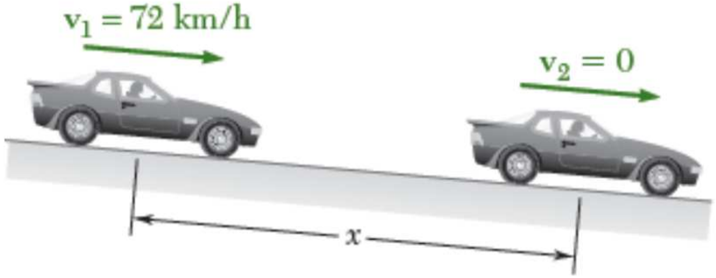
$$1\ \text{hp} = 550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s}$$

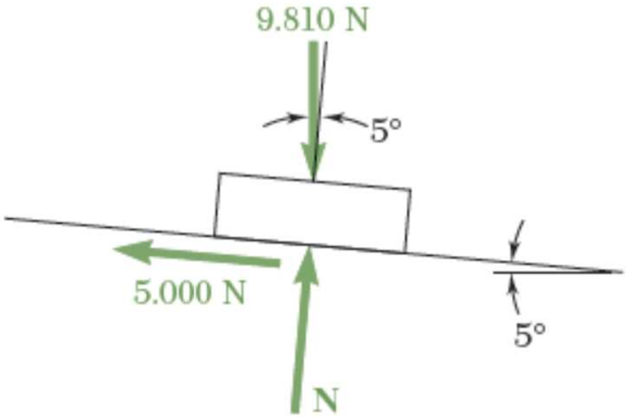
Recordando da Sec. 13.2 que 1ft · 1b = 1.356 J, verificamos que

$$1\ \text{ft} \cdot \text{lb/s} = 1{,}356\ \text{J/s} = 1{,}356\ \text{W}$$
$$1\ \text{hp} = 550(1{,}356\ \text{W}) = 746\ \text{W} = 0{,}746\ \text{kW}$$

Energia cinética de uma partícula







PROBLEMA RESOLVIDO 13.1

Um automóvel de massa 1.000 kg é conduzido em um declive de 5° a uma velocidade de 72 km/h quando os freios são usados, causando uma força total de frenagem constante de 5.000 N (aplicada pela estrada sobre os pneus). Determine a distância percorrida pelo automóvel até ele parar.

SOLUÇÃO

Energia cinética

Posição 1:

$$v_1 = \left(72\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1.000\ \text{m}}{1\ \text{km}}\right)\left(\frac{1\ \text{h}}{3.600\ \text{s}}\right) = 20\ \text{m/s}$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(1.000\ \text{kg})(20\ \text{m/s})^2 = 20.000\ \text{J}$$

Posição 2:

$$v_2 = 0 \qquad T_2 = 0$$

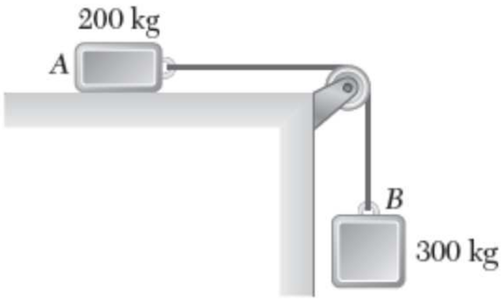
Trabalho $U_{1\to 2} = -5.000x + (1.000\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)(\text{sen}\ 5°)x = -4.145x$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

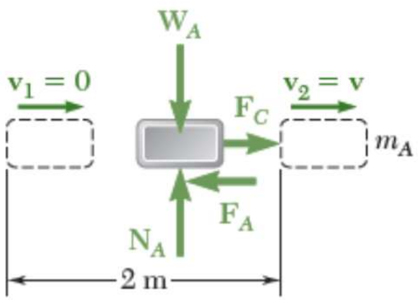
$$200.000 - 4.145x = 0 \qquad x = 48{,}25\ \text{m}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.2



Dois blocos estão conectados por um cabo inextensível como mostrado na figura. Se o sistema é liberado do repouso, determine a velocidade do bloco A depois que ele se desloca 2 m. Admita que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e o plano seja de $\mu_k = 0{,}25$ e que a roldana não tenha nem peso nem atrito.

SOLUÇÃO



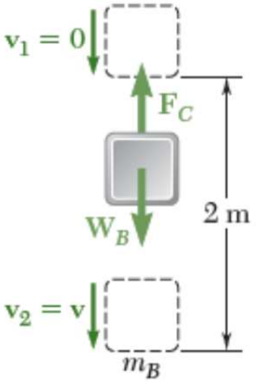
Trabalho e energia para o bloco *A*. Representamos a força de atrito por $\mathbf{F}_A$ e a força exercida pelo cabo por $\mathbf{F}_C$, e escrevemos

$$m_A = 200 \text{ kg} \qquad W_A = (200 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 1.962 \text{ N}$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0{,}25(1.962 \text{ N}) = 490 \text{ N}$$

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2: \qquad 0 + F_C(2 \text{ m}) - F_A(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2} m_A v^2$$

$$F_C(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200 \text{ kg})v^2 \qquad (1)$$



Trabalho e energia para o bloco *B*. Escrevemos

$$m_B = 300 \text{ kg} \qquad W_B = (300 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 2.940 \text{ N}$$

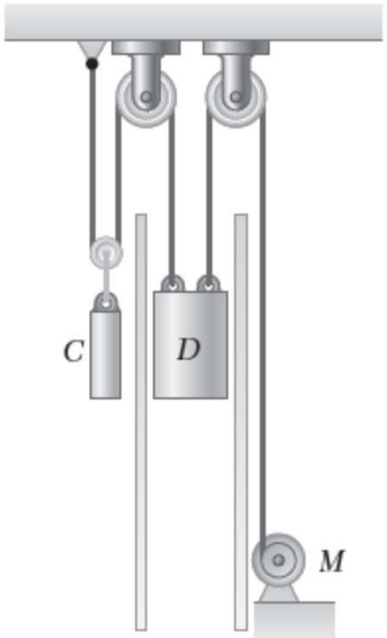
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2: \qquad 0 + W_B(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2} m_B v^2$$

$$(2.940 \text{ N})(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(300 \text{ kg})v^2 \qquad (2)$$

Adicionando os primeiro e segundo membros de (1) e (2), observamos que o trabalho das forças exercidas pelo cabo sobre A e B se anula:

$$(2.940 \text{ N})(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200 \text{ kg} + 300 \text{ kg})v^2$$

$$4.900 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(500 \text{ kg})v^2 \qquad v = 4{,}43 \text{ m/s} \quad ◀$$

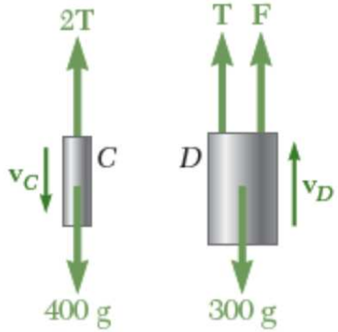


PROBLEMA RESOLVIDO 13.5

O elevador D e sua carga têm uma massa combinada de 300 kg, enquanto o contrapeso C tem massa de 400 kg. Determine a potência liberada pelo motor elétrico M quando o elevador (a) se move para cima com uma velocidade constante de 2,5 m/s e (b) se move com uma velocidade instantânea de 2,5 m/s e aceleração de 1 m/s^2, ambas orientadas para cima.

SOLUÇÃO

Como a força **F** exercida pelo cabo do motor tem o mesmo sentido da velocidade $\mathbf{v}_D$ do elevador, a potência é igual a Fv_D, sendo $v_D = 2{,}5$ m/s. Para obter a potência, devemos antes determinar **F** em cada uma das duas situações dadas.

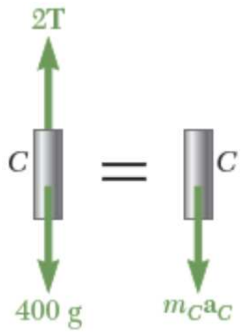


a. Movimento uniforme. Temos $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D = 0$; ambos os corpos estão em equilíbrio.

Corpo livre C: $\quad +\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad 2T - 400\text{ g} = 0 \quad T = 200\text{ g} = 1.962\text{ N}$

Corpo livre D: $\quad +\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad F + T - 300\text{ g} = 0$

$$F = 300\text{ g} - T = 300\text{ g} - 200\text{ g} = 100\text{ g} = 981\text{ N}$$
$$Fv_D = (981\text{ N})(2{,}5\text{ m/s}) = 2.452\text{ W}$$
$$\text{Potência} = 2.450\text{ W}$$



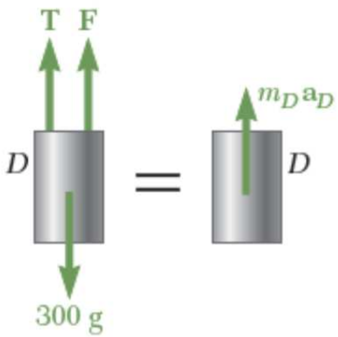
b. Movimento acelerado. Temos

$$\mathbf{a}_D = 1\text{ m/s}^2\uparrow \qquad \mathbf{a}_C = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}_D = 0{,}5\text{ m/s}^2\downarrow$$

As equações de movimento são

Corpo livre C: $\quad +\downarrow\Sigma F_y = m_C a_C: \; 400\text{ g} - 2T = 400\,(0{,}5)$

$$T = \frac{(400)(9{,}81) - 400\,(0{,}5)}{2} = 1.862\text{ N}$$



Corpo livre D: $\quad +\uparrow\Sigma F_y = m_D a_D: \quad F + T - 300\text{ g} = 300\,(1)$

$$F + 1.862 - 300\,(9{,}81) = 300 \quad F = 1.381\text{ N}$$
$$Fv_D = (1.381\text{ N})(2{,}5\text{ m/s}) = 3.452\text{ W}$$
$$\text{Potência} = 3.450\text{ W}$$

13.1 Um pequeno carro híbrido de 1.300 kg está viajando a 108 km/h. Determine (*a*) a energia cinética do veículo, (*b*) a velocidade escalar para um caminhão de 9.000 kg que tem a mesma energia cinética que o carro.

13.2 Um satélite de 450 kg é posto em uma órbita circular a 6.360 km acima da superfície da Terra. Nessa elevação, a aceleração da gravidade é de 2,4 m/s^2. Determine a energia cinética do satélite, sabendo que sua velocidade orbital é de 20.000 km/h.

13.3 Partindo do repouso, uma pedra de 1 kg cai de uma altura h e bate no chão com uma velocidade de 15 m/s. (*a*) Encontre a energia cinética da pedra quando ela bate no chão e a altura h da queda. (*b*) Resolva o item *a*, admitindo que a mesma pedra caia na Lua. (Aceleração da gravidade na Lua = 1,62 m/s^2.)

13.4 Partindo do repouso, uma pedra de 4 kg cai de uma altura h e bate no chão com uma velocidade de 25 m/s. (*a*) Encontre a energia cinética da pedra quando ela bate no chão e a altura h da queda. (*b*) Resolva o item *a*, admitindo que a mesma pedra caia na Lua. (Aceleração da gravidade na Lua = 1,62 m/s^2.)

13.9 Um pacote é lançado 10 m para cima num aclive de 15° de forma que alcança o topo da inclinação com velocidade nula. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,12, determine (*a*) a velocidade inicial do pacote em *A*, (*b*) a velocidade do pacote quando este retornar a sua posição original.

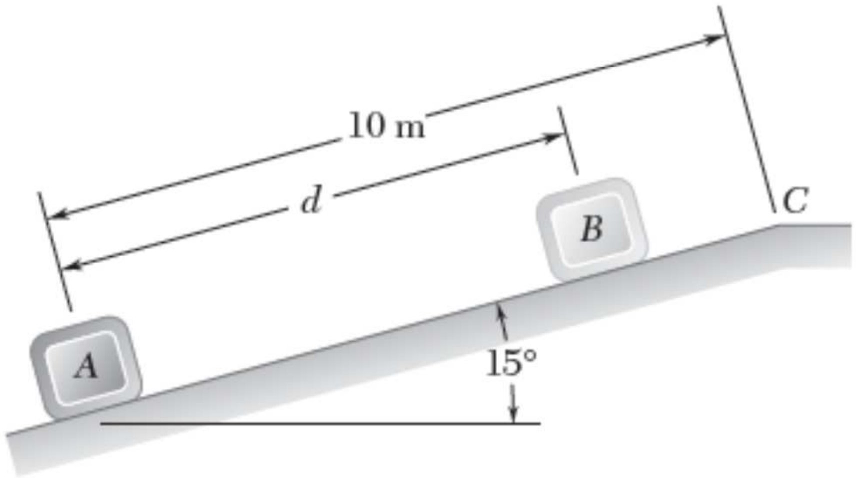


Figura P13.9 e P13.10

13.10 Um pacote é lançado para cima num aclive de 15° em *A* com velocidade de 8 m/s. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,12, determine (*a*) a máxima distância *d* que o pacote se moverá para cima na inclinação, (*b*) a velocidade do pacote quando este retornar a sua posição original.

13.21 O sistema mostrado na figura está em repouso quando uma força constante de 150 N é aplicada em um colar B. (a) Se a força atua por meio de todo movimento, determine a velocidade do colar B que atinge o suporte em C. (b) Depois de qual distância d a força de 150 N deveria ser retirada se o colar alcança o suporte C com velocidade nula?