LOM3100 Dinâmica - 2019

3. Dinâmica do ponto.

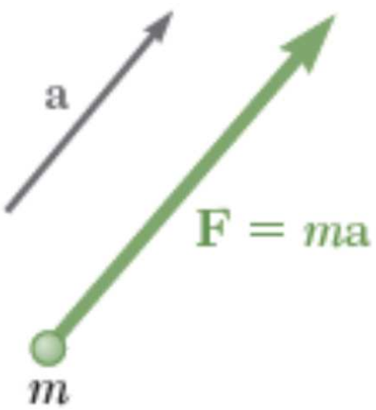
PARTE 1

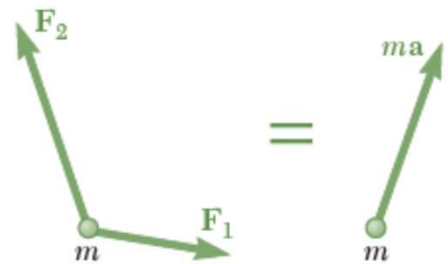
A segunda lei de Newton (do movimento)

- *Se a força resultante que atua sobre uma partícula não for nula, a partícula terá uma aceleração proporcional à intensidade da resultante e na mesma direção dessa força resultante.*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$





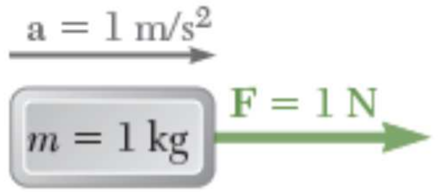
Componentes retangulares. Decompondo cada força **F** e a aceleração **a** em componentes retangulares, escrevemos

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

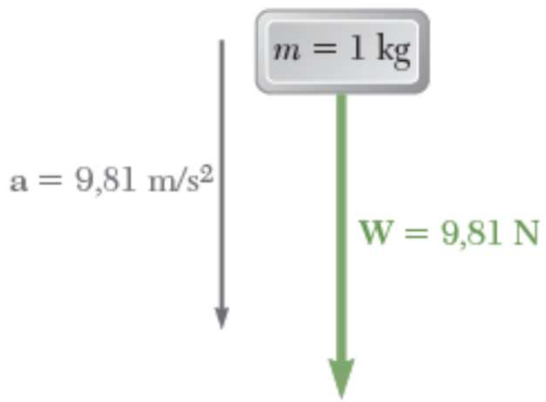
da qual se segue que

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \qquad (12.7)$$

Unidades, força de gravidade (peso)



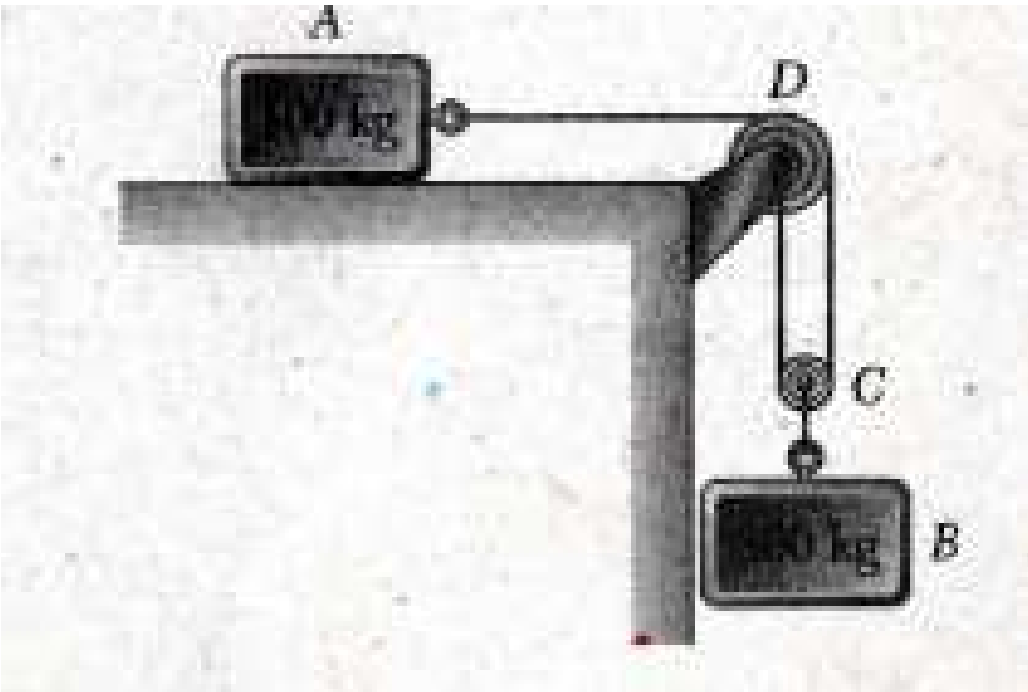
$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})\,(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

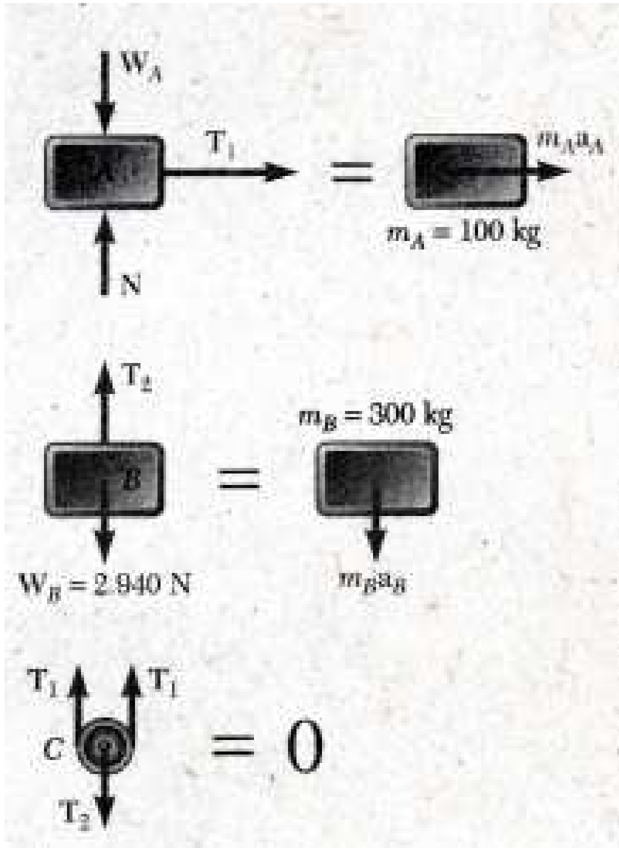


$$W = mg$$

$$W = (1\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2) = 9{,}81\ \text{N}$$

Os dois blocos mostrados na figura abaixo partem do repouso. O plano horizontal e a roldana são sem atrito, e a roldana é assumida como tendo massa desprezível. Determine a aceleração de cada bloco e a tração em cada corda





Dinâmica do ponto

Componentes normal e tangencial. Decompondo as forças e a aceleração da partícula em componentes ao longo da tangente à trajetó-

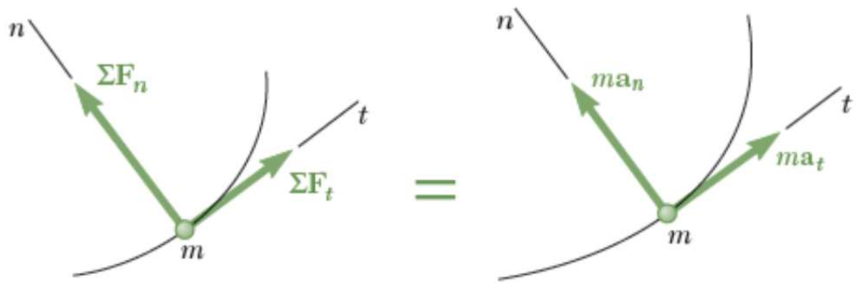


Figura 12.7

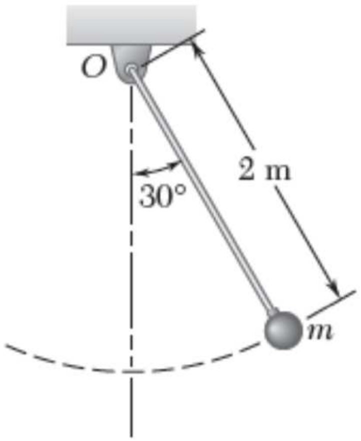
ria (na direção e sentido do movimento) e da normal (apontando para o interior da trajetória) (Fig. 12.7) e substituindo-as na Eq. (12.2), obtemos duas equações escalares

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n \tag{12.8}$$

Substituindo as expressões de a_t e a_n das Eqs. (*11.40*), temos

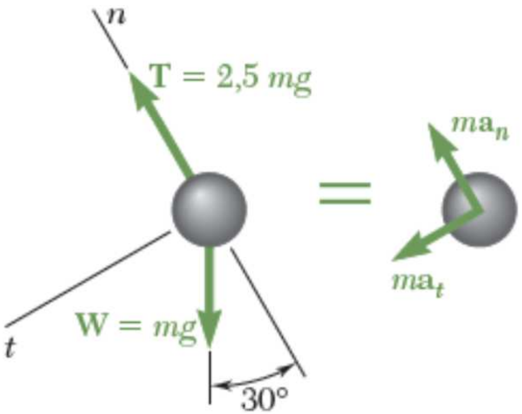
$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.8$'$}$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.



PROBLEMA RESOLVIDO 12.4

A extremidade de um pêndulo de 2 m de comprimento descreve um arco de circunferência em um plano vertical. Se a tração na corda é 2,5 vezes o peso do pêndulo para a posição mostrada na figura, encontre a velocidade e a aceleração do pêndulo nessa posição.



SOLUÇÃO

O peso do pêndulo é $W = mg$; a tração na corda é, portanto, 2,5 mg. Recordando que $\mathbf{a}_n$ é dirigido para O e assumindo $\mathbf{a}_t$ como mostrado na figura, aplicamos a segunda lei de Newton e obtemos

$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t$:
$$mg \text{ sen } 30° = ma_t$$
$$a_t = g \text{ sen } 30° = +4{,}90 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_t = 4{,}90 \text{ m/s}^2 \swarrow \quad ◀$$

$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n$:
$$2{,}5\, mg - mg \cos 30° = ma_n$$
$$a_n = 1{,}634\, g = +16{,}03 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_n = 16{,}03 \text{ m/s}^2 \nwarrow \quad ◀$$

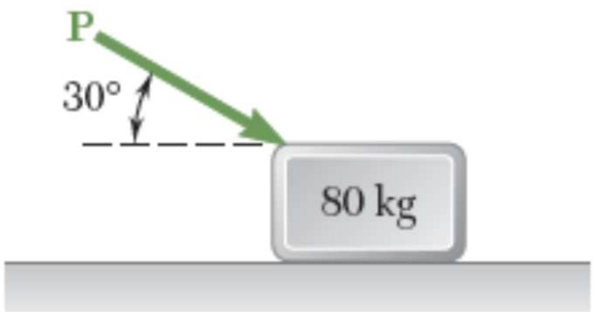
Como $a_n = v^2/\rho$, temos $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16{,}03 \text{ m/s}^2)$.

$$v = \pm 5{,}66 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v} = 5{,}66 \text{ m/s} \nearrow\!\!\swarrow \text{ (para cima ou para baixo)} \quad ◀$$

4. Quando um problema envolve atrito seco, lembre-se de revisar as seções relevantes de *Estática* [Seções de 8.1 a 8.3] antes de tentar solucioná-lo. Em particular, você deve saber quando cada uma das equações $F = \mu_s N$ e $F = \mu_k N$ podem ser usadas. Você também deve reconhecer que se o movimento de um sistema não está especificado, é primeiramente necessário assumir um movimento possível e então verificar a validade daquela suposição.

PROBLEMA RESOLVIDO 12.1

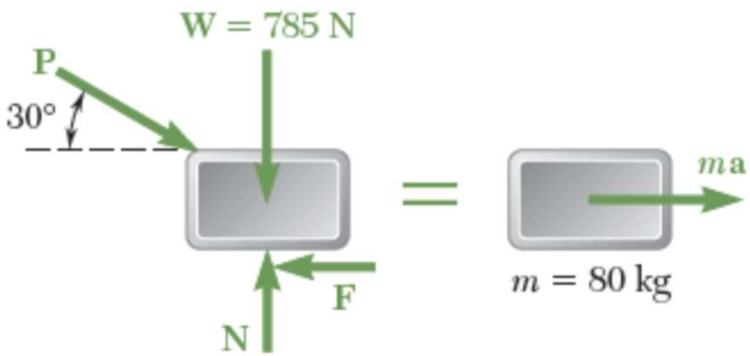
Um bloco de 80-kg está em repouso sobre um plano horizontal. Encontre a intensidade da força **P** necessária para dar ao bloco uma aceleração de 2,5 m/s^2 para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_k = 0{,}25$.



SOLUÇÃO

O peso do bloco é

$$W = mg = (80\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 785\text{ N}$$



Notamos que $F = \mu_k N = 0{,}25N$ e que $a = 2{,}5\text{ m/s}^2$. Expressando que as forças que atuam no bloco são equivalentes ao vetor $m\mathbf{a}$, escrevemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma: \qquad P\cos 30° - 0{,}25N = (80\text{ kg})(2{,}5\text{ m/s}^2)$$

$$P\cos 30° - 0{,}25N = 200\text{ N} \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad N - P\,\text{sen}\,30° - 785\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

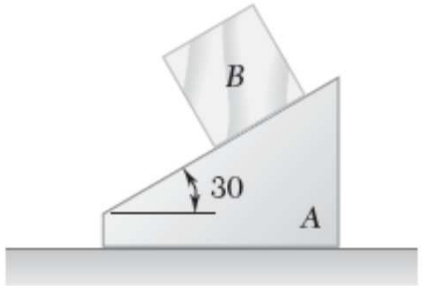
Resolvendo (2) para N e substituindo o resultado em (1), obtemos

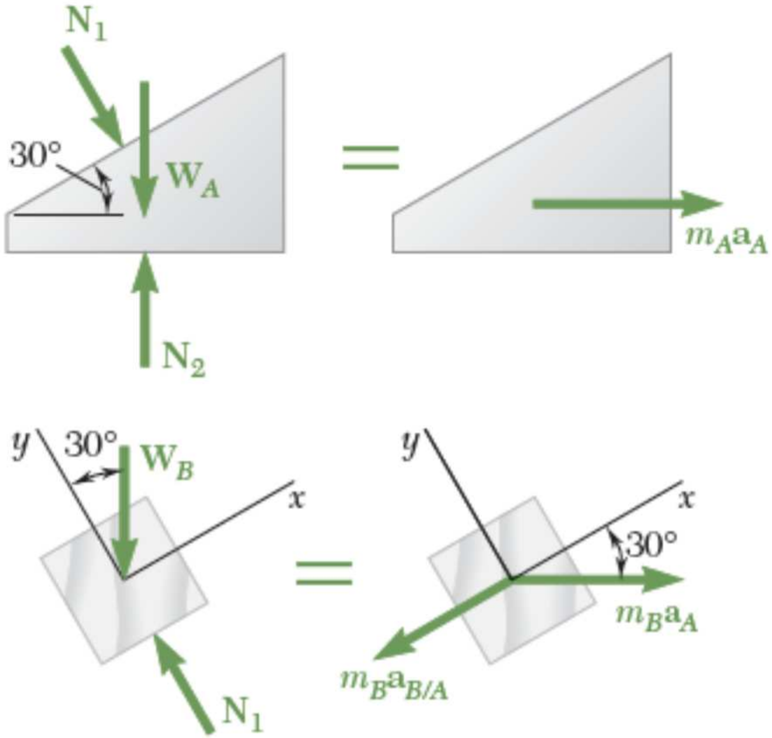
$$N = P\,\text{sen}\,30 + 785\text{ N}$$

$$P\cos 30° - 0{,}25(P\,\text{sen}\,30° + 785\text{ N}) = 200\text{ N} \qquad P = 535\text{ N} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 12.3

Um bloco B de 6-kg parte do repouso e desliza sobre uma cunha A de 15-kg que é suportada por uma superfície horizontal. Desprezando o atrito, determine (a) a aceleração da cunha e (b) a aceleração do bloco relativa à cunha.





SOLUÇÃO

Cinemática. Primeiramente examinamos a aceleração da cunha e a aceleração do bloco.

Cunha A. Como a cunha está restrita a se mover sobre a superfície horizontal, sua aceleração $\mathbf{a}_A$ é horizontal. Assumiremos que ela está dirigida para a direita.

Bloco B. A aceleração de $\mathbf{a}_B$ do bloco B pode ser expressa como a soma da aceleração de A e da aceleração de B relativa a A. Temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

onde $\mathbf{a}_{B/A}$ é dirigida ao longo da superfície inclinada da cunha.

Cinética. Desenhamos os diagramas de corpo livre da cunha e do bloco e aplicamos a segunda lei de Newton.

Cunha A. Representamos as forças exercidas pelo bloco e pela superfície horizontal sobre a cunha A por $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$, respectivamente.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m_A a_A: \qquad N_1 \operatorname{sen} 30° = m_A a_A$$

$$0{,}5 N_1 = m_A a_A \tag{1}$$

Bloco B. Usando o sistema de eixos coordenados mostrado na figura e decompondo $\mathbf{a}_B$ em seus componentes $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_{B/A}$, escrevemos

$$+\nearrow\Sigma F_x = m_B a_x: \qquad -m_B g \operatorname{sen} 30° = m_B a_A \cos 30° - m_B a_{B/A}$$

$$-m_B g \operatorname{sen} 30° = m_B (a_A \cos 30° - a_{B/A})$$

$$a_{B/A} = a_A \cos 30° + g \operatorname{sen} 30° \tag{2}$$

$$+\nwarrow\Sigma F_y = m_B a_y: \qquad N_1 - m_B g \cos 30° = -m_B a_A \operatorname{sen} 30°$$

a. Aceleração da cunha *A*. Substituindo para N_1 da Eq. (1) na Eq. (3), temos

$$2m_A a_A - m_B g \cos 30° = -\, m_B a_A \operatorname{sen} 30°$$

Resolvendo para a_A e substituindo os dados numéricos, escrevemos0

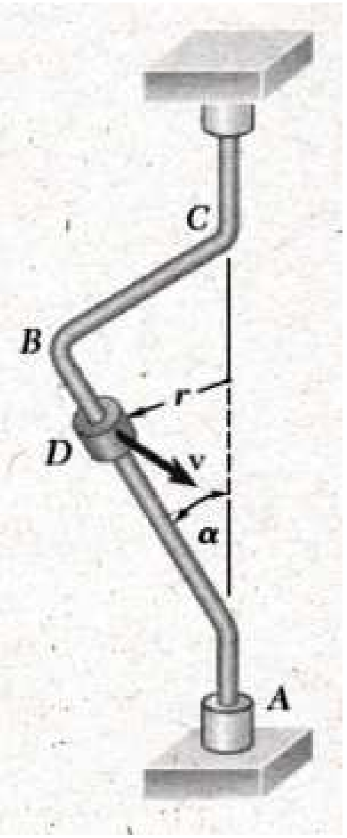
$$a_A = \frac{m_B g \;\cos\; 30°}{2m_A + m_B \;\operatorname{sen}\; 30°}\, g = \frac{(6\text{ kg})\,(9{,}81\text{ m/s}^2)\cos 30°}{2(15\text{ kg}) + (6\text{ kg})\operatorname{sen} 30°}$$

$$a_A = +1{,}545\text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_A = 1{,}545\text{ m/s}^2 \rightarrow \quad ◀$$

b. Aceleração do bloco *B* em relação a *A*. Substituindo o valor obtido para a_A na Eq. (2), temos

$$a_{B/A} = (1{,}545\text{ m/s}^2)\cos 30° + (9{,}81\text{ m/s}^2)\operatorname{sen} 30°$$

$$a_{B/A} = +6{,}24\text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 6{,}24\text{ m/s}^2 \swarrow 30° \quad ◀$$



Um pequeno colar D de 300 g pode deslizar sobre a parte AB de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que $\alpha = 40°$ e que a haste gira em torno da vertical AC a uma taxa constante de 5 rad/s, determine o valor r para o qual o colar não deslizará sobre a haste se o efeito do atrito entre a haste e o colar for desprezado.

12.7 Em antecipação a um aclive de 7°, um motorista de ônibus acelera a uma taxa constante de 1 m/s^2 enquanto ainda está na seção nivelada da rodovia. Sabendo que a velocidade escalar do ônibus é 90 km/h no inicio da subida e que o motorista não altera a posição do acelerador nem troca de marcha, determine a distância percorrida pelo ônibus na subida até sua velocidade escalar ter decrescido para 80 km/h.

12.8 Se a distância de frenagem de um automóvel a 96 km/h é de 45 m em um piso nivelado, determine a distância de frenagem desse automóvel a 96 km/h quando ele está (*a*) subindo um plano inclinado de 5° e (*b*) descendo um plano com inclinação de 3%. Considere que a força de frenagem é independente da situação.

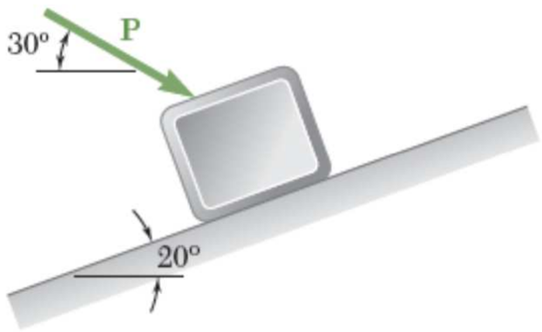


Figura P12.9

12.9 Um pacote de 20 kg está em repouso sobre um plano inclinado quando uma força **P** é aplicada sobre ele. Determine a intensidade de **P** no caso de serem necessários 10 s para o pacote percorrer 5 m subindo no plano inclinado. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o pacote e o plano inclinado são ambos iguais a 0,30.

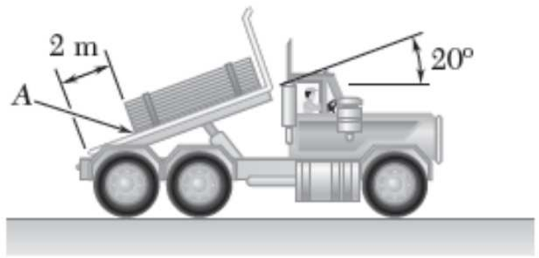
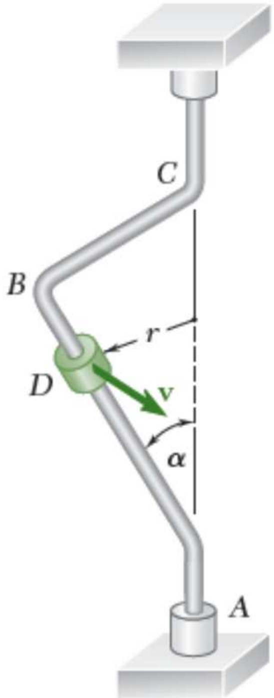


Figura *P12.23*

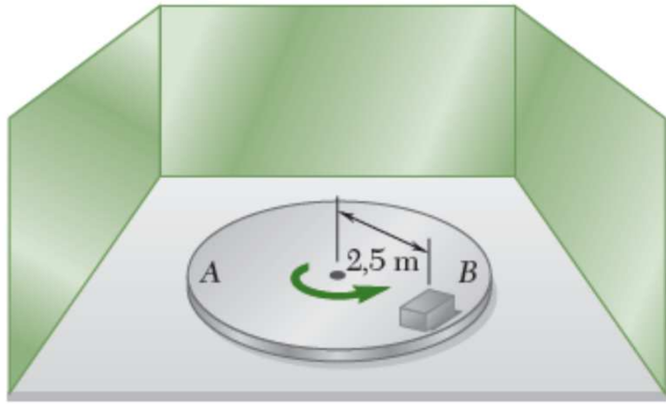
12.23 Para descarregar uma pilha amarrada de madeira compensada de um caminhão, o motorista primeiro inclina a caçamba do caminhão e então acelera, a partir do repouso. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a camada inferior da madeira compensada e o piso da caçamba são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$, determine (*a*) a menor aceleração do caminhão que fará a pilha de madeira compensada deslizar e (*b*) a aceleração do caminhão que faz o canto *A* da pilha de madeira compensada atingir a extremidade da caçamba em 0,9 s.



12.56 Um pequeno colar D de 200 g pode deslizar sobre a parte AB de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que a haste gira em torno da vertical AC a uma taxa constante e que $\alpha = 30°$ e $r = 600$ mm, determine o intervalo de valores da velocidade v para qual o colar não deslizará sobre a haste se o coeficiente de atrito estático entre a haste e o colar é 0,30.

12.57 Um pequeno colar D de 300 g pode deslizar sobre a parte AB de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que $r = 200$ mm e que a haste gira em torno da vertical AC a uma taxa constante de 10 rad/s, determine o menor valor admissível do coeficiente de atrito estático entre o colar e a haste se o colar não desliza quando (*a*) $\alpha = 15°$, (*b*) $\alpha = 45°$. Indique em cada caso a direção do movimento iminente.

12.60 Uma mesa rotativa A é construída em um palco para uso em uma produção teatral. Observa-se, durante um ensaio, que um baú B começa a deslizar sobre a mesa 10 s depois que ela começa a girar. Sabendo que o baú é submetido a uma aceleração tangencial constante de 0,24 m/s^2, determine o coeficiente de atrito estático entre o baú e a mesa rotativa.



Quantidade de movimento linear e angular

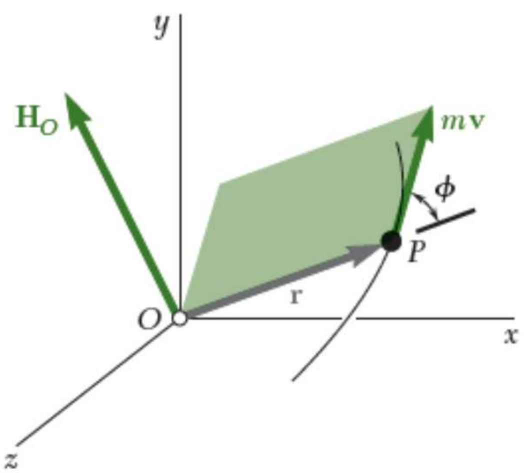
$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

uma vez que a massa m da partícula é constante

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

$$\boxed{\mathbf{L} = m\mathbf{v}}$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}}$$



de *momento da quantidade de movimento*, ou *quantidade de movimento angular*, da partícula em relação a O naquele instante, representado por $\mathbf{H}_O$. Recordando a definição de momento de um vetor (Seção 3.6) e representando por $\mathbf{r}$ o vetor de posição de P, escrevemos

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}} \qquad (12.12)$$

e notamos que $\mathbf{H}_O$ é um vetor perpendicular ao plano que contém $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ e de intensidade

$$\boxed{H_O = rmv \operatorname{sen} \phi}$$

$$(\text{m})(\text{kg} \cdot \text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}$$

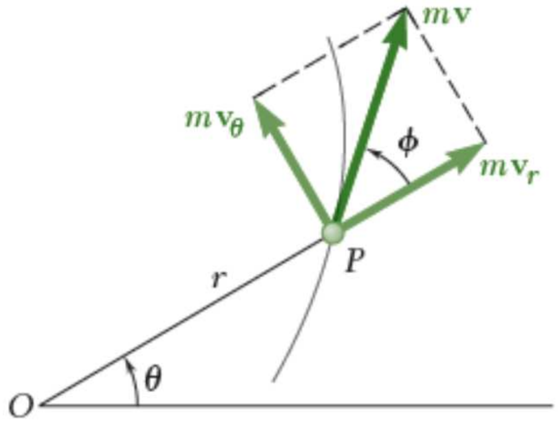
Quantidade de movimento angular

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$H_x = m(yv_z - zv_y)$$
$$H_y = m(zv_x - xv_z)$$
$$H_z = m(xv_y - yv_x)$$

no plano xy, temos $z = v_z = 0$

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x)$$



$$H_O = rmv \text{ sen}\,\phi = rmv_\theta$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\boxed{H_O = mr^2\dot{\theta}}$$

Quantidade de movimento angular

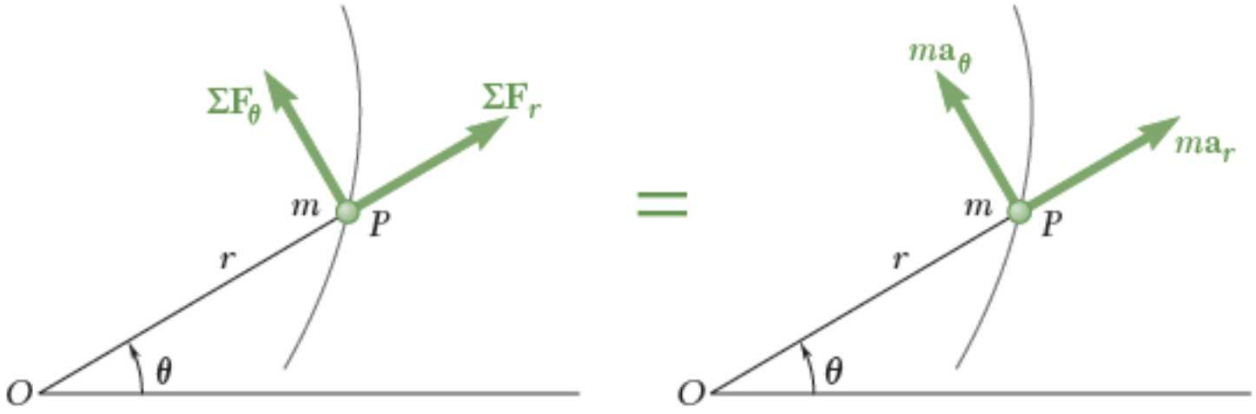
$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Como os vetores $\mathbf{v}$ e $m\mathbf{v}$ são colineares, o primeiro termo da expressão obtida é zero; e, pela segunda lei de Newton, $m\mathbf{a}$ é igual à soma $\Sigma\mathbf{F}$ das forças que atuam sobre P. Observando que $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ representa a soma $\Sigma\mathbf{M}_O$ dos momentos em relação a O dessas forças, escrevemos

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \qquad (12.19)$$

A Eq. (12.19), que resulta diretamente da segunda lei de Newton, afirma que *a soma dos momentos em relação a O das forças que atuam sobre a partícula é igual à taxa de variação do momento da quantidade de movimento, ou quantidade de movimento angular, da partícula em relação a O.*

Equações de movimento em coordenadas polares



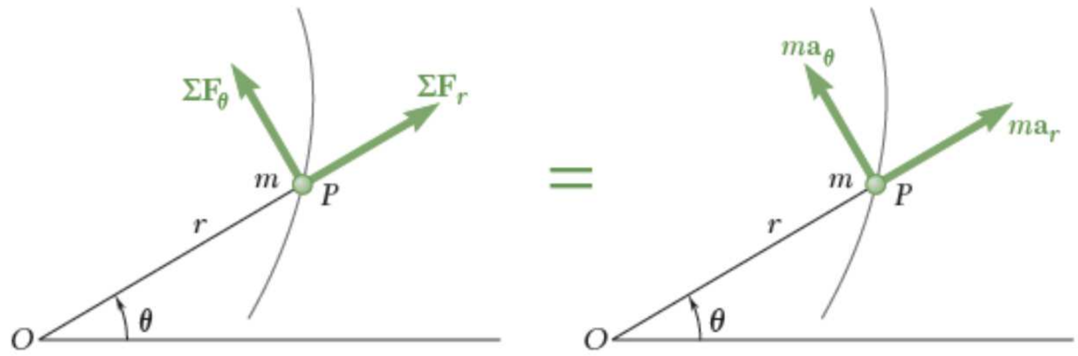
$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \tag{12.20}$$

Substituindo para a_r e a_θ das Eqs. (11.46), temos

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

Equações de movimento em coordenadas polares



$$\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta,$$

$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta$$

Substituindo para a_r e a_θ das Eqs. (11.46), temos

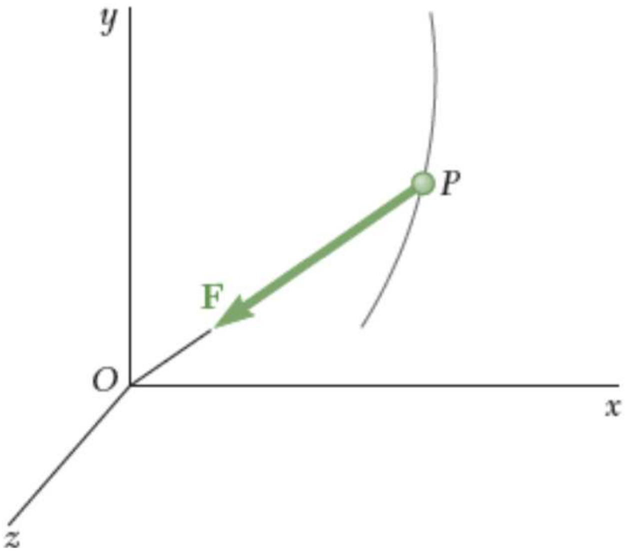
$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$r\Sigma F_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$
$$= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Conservação da quantidade de movimento angular



Quando a única força que atua sobre uma partícula P é uma força $\mathbf{F}$ dirigida para, ou afastando-se de, um ponto fixo O, diz-se que essa partícula se move sob a *ação de uma força central* e o ponto O é chamado de *centro de força* (Fig. 12.15). Como a linha de ação de $\mathbf{F}$ passa por O, devemos ter $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$ em qualquer instante dado. Substituindo na Eq. (12.19), obtemos, portanto

$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

para todos os valores de t e integrando em t

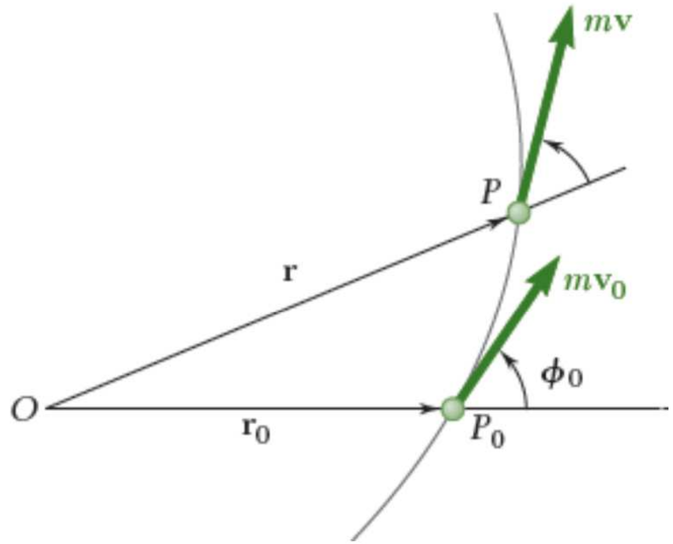
$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.23}$$

Concluímos, então, que *a quantidade de movimento angular de uma partícula que se move sob a ação de uma força central é constante, tanto em intensidade como em direção e sentido.*

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante}$$

Como a intensidade $\mathbf{H}_O$ da quantidade de movimento angular da partícula P é constante, o membro do lado direito da Eq. (12.13) deve ser constante. Escrevemos, assim,

$$rmv \operatorname{sen} \phi = r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 \tag{12.25}$$

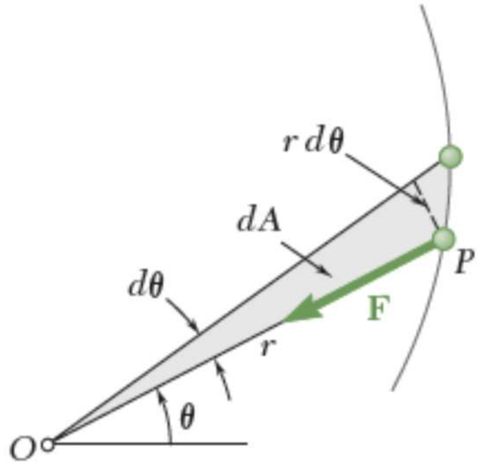


Alternativamente, recordando a Eq. (12.18), podemos expressar o fato de que a intensidade H_O da quantidade de movimento angular da partícula P é constante escrevendo

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \tag{12.26}$$

ou, dividindo por m e representando por h a quantidade de movimento angular por unidade de massa H_O/m

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = h} \tag{12.27}$$



Uma interpretação geométrica interessante pode ser dada à Eq. (12.27). Observando a partir da Fig. 12.17 que o raio vetor OP varre uma área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, quando ele gira de um ângulo $d\theta$, e definindo a *velocidade areolar* da partícula como o quociente dA/dt, constatamos que o membro do lado esquerdo da Eq. (12.27) representa o dobro da velocidade areolar da partícula. Concluímos, então, que *quando uma partícula se move sob a ação de uma força central, sua velocidade areolar é constante.*