Nona Edição

MECÂNICA VETORIAL PARA ENGENHEIROS: **ESTÁTICA**

CAPÍTULO

4

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

Notas de Aula:

J. Walt Oler

Texas Tech University

Equilíbrio de Corpos Rígidos

Conteúdo

Introdução

- Para um corpo rígido em equilíbrio estático, as forças e momentos externos estão balenceadas e não impõem movimento de translação ou de rotação ao corpo.

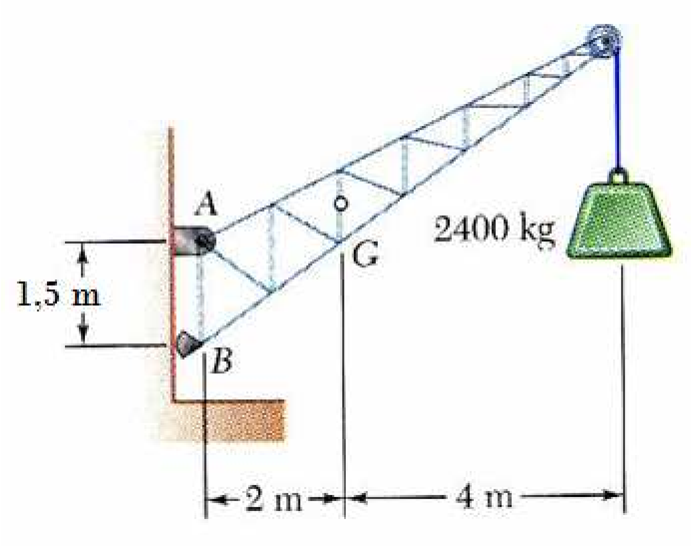
- As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio estático de um corpo são que a força e o binário resultantes de todas as forças externas formam um sistema equivalente a zero,

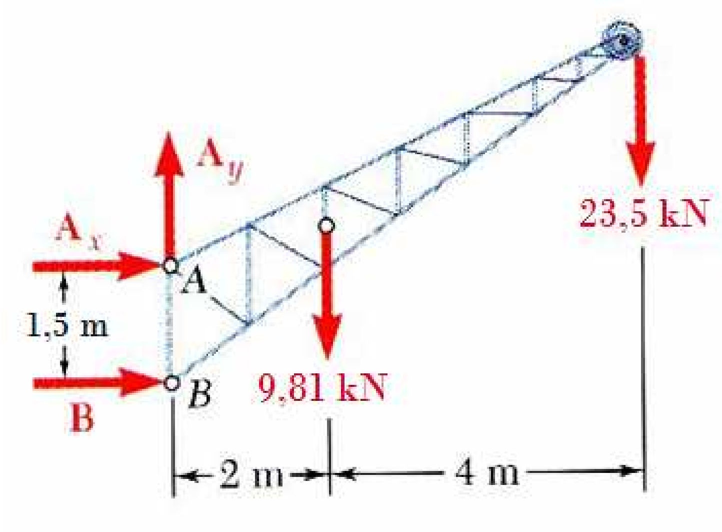
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = 0$$

- Decompondo cada força e cada momento em seus componentes retangulares, podemos indicar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio por meio de 6 equações escalares,

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

Diagrama de Corpo Livre

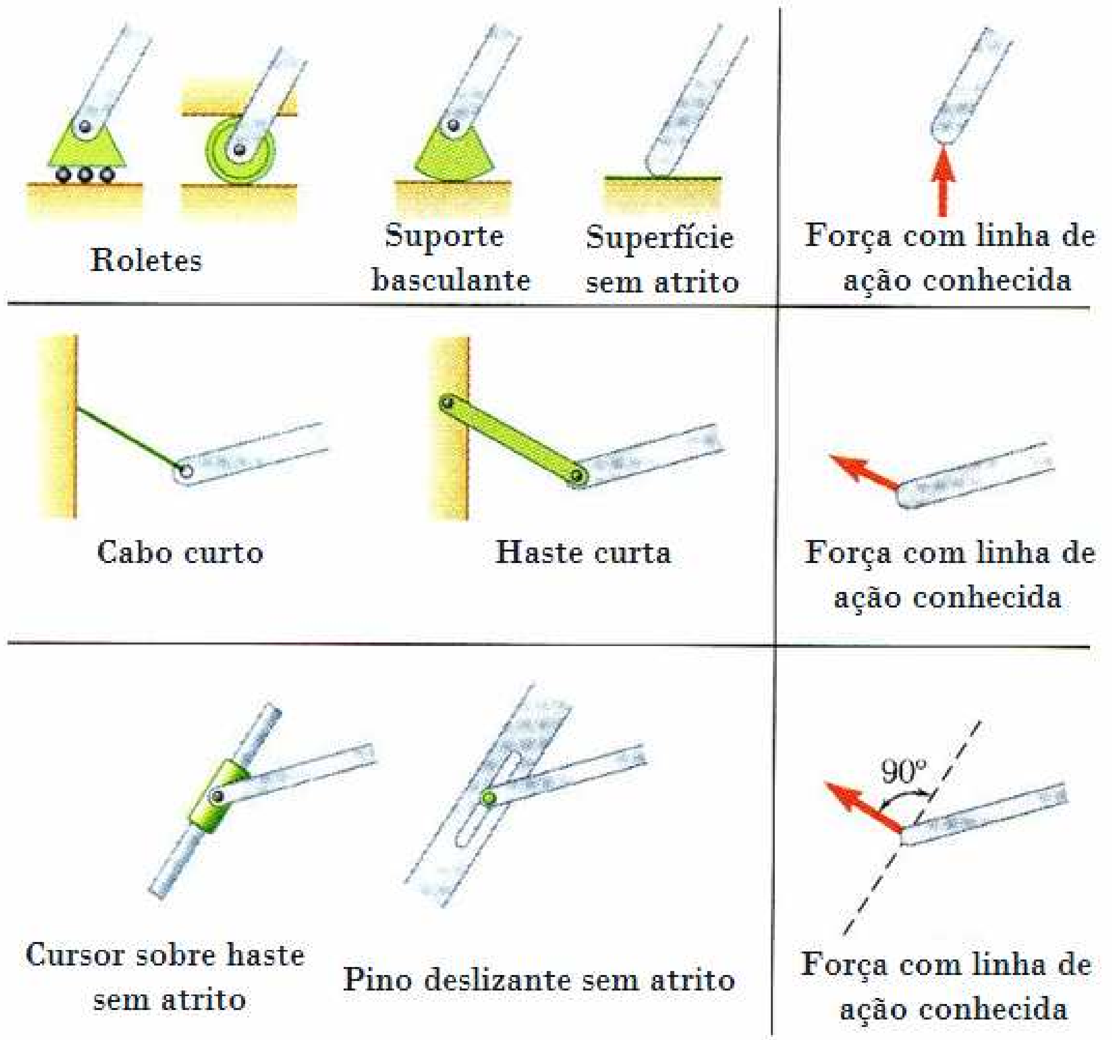




O primeiro passo na análise do equilíbrio estático de um corpo rígido é identificar todas as forças que atuam no corpo com um diagrama de *corpo livre*.

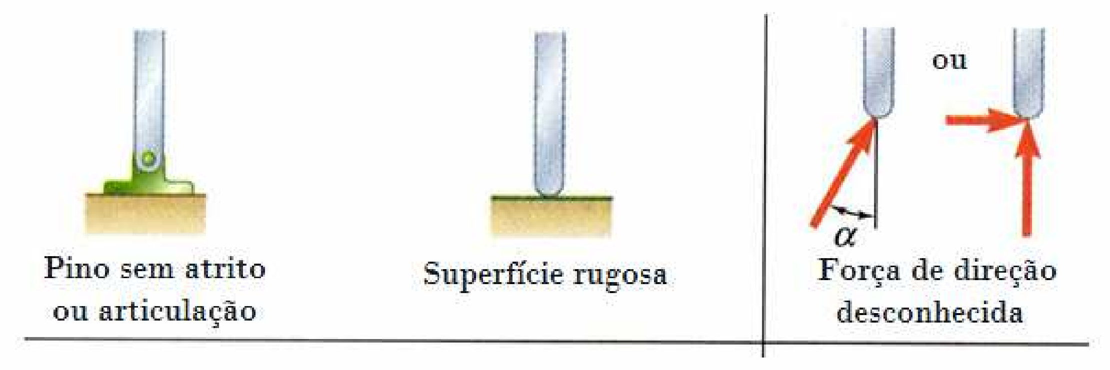
- Selecionamos a extensão do corpo livre e o destacamos do solo e de todos os outros corpos.
- Indicamos o ponto de aplicação, intensidade, direção e sentido das forças externas, incluindo o peso do corpo rígido.
- Indicamos o ponto de aplicação e as direções e sentidos arbitrados para as forças desconhecidas. Estas geralmente consistem nas reações de apoio por meio das quais o solo e os outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo rígido.
- Incluimos as dimensões necessárias ao cálculo dos momentos das forças.

Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Bidimensional



- Reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida.

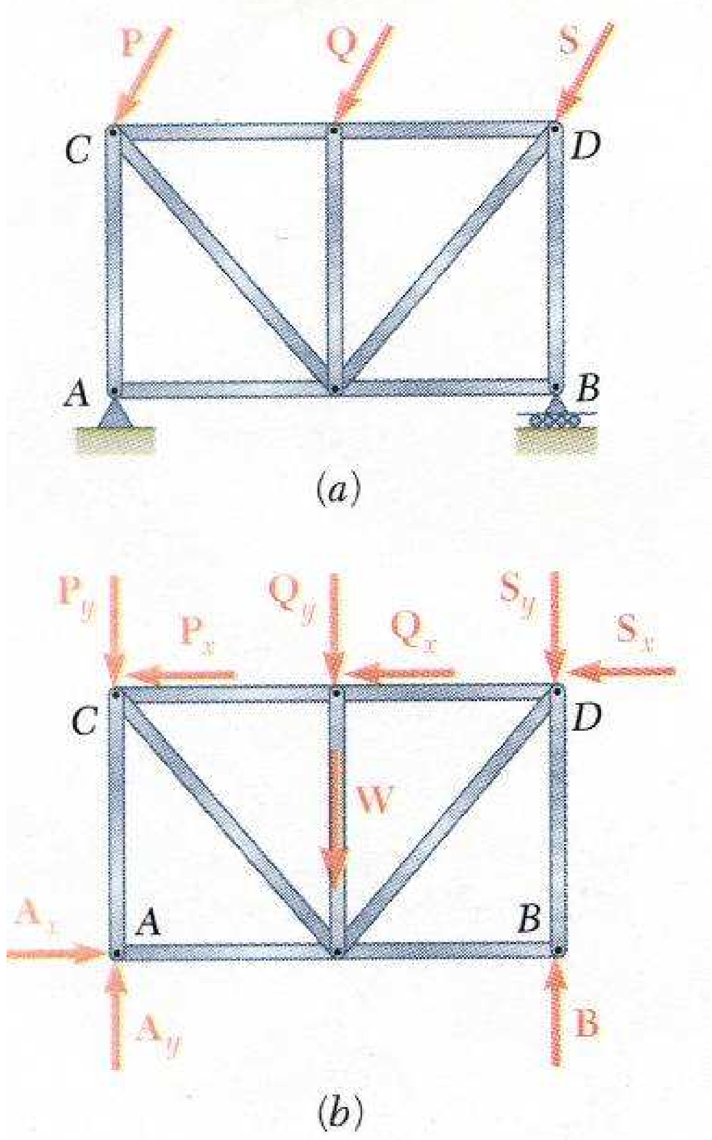
Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Bidimensional



- Reações equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos

- Reações equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos e a um binário de intensidade desconhecida

Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas Dimensões



- Para todas as forças e momentos aplicados a uma estrutura bidimensional:

  $$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

- As equações de equilíbrio se reduzem a:

  $$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

  sendo *A* qualquer ponto no plano da estrutura.

- As 3 equações podem ser resolvidas para no máximo 3 incógnitas.

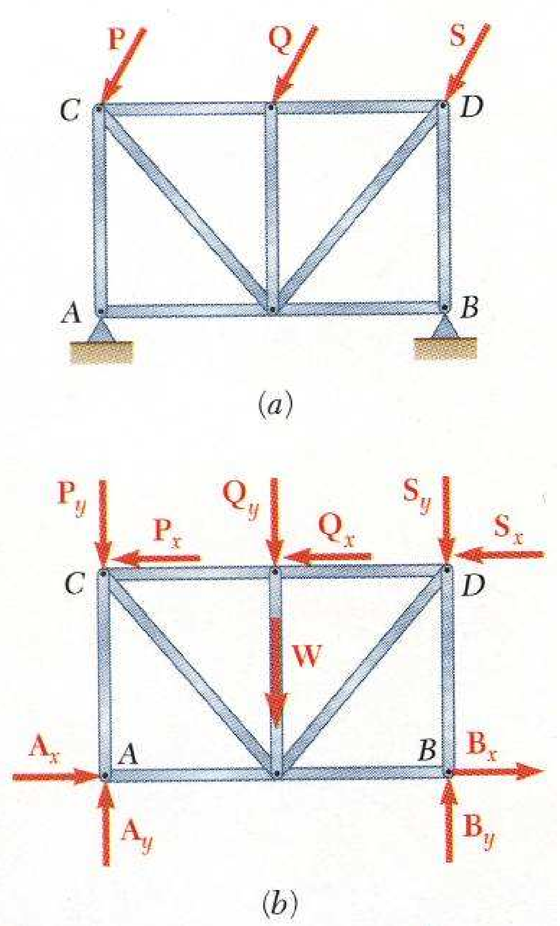
- As 3 equações não podem ser ampliadas com equações adicionais, mas qualquer uma delas pode ser substituída por outra equação.

  $$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

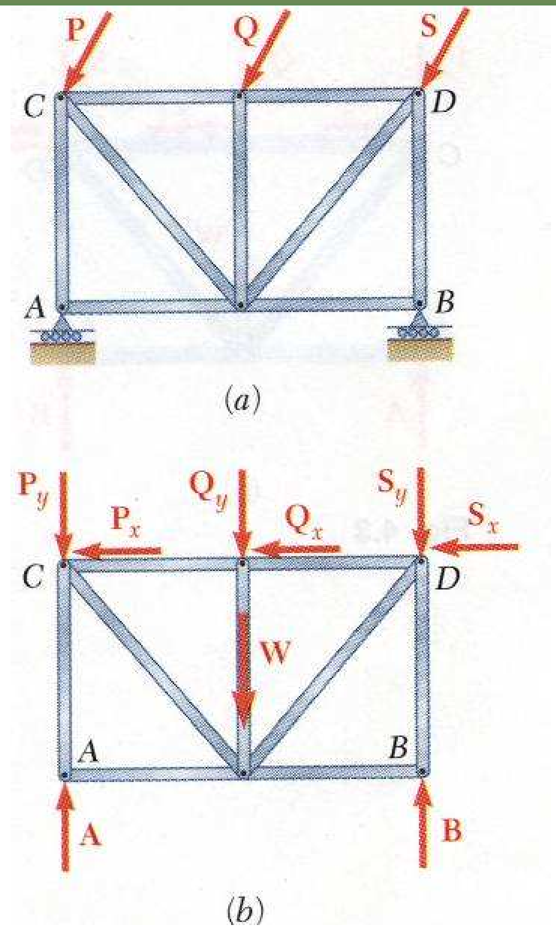
Nona Edição

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

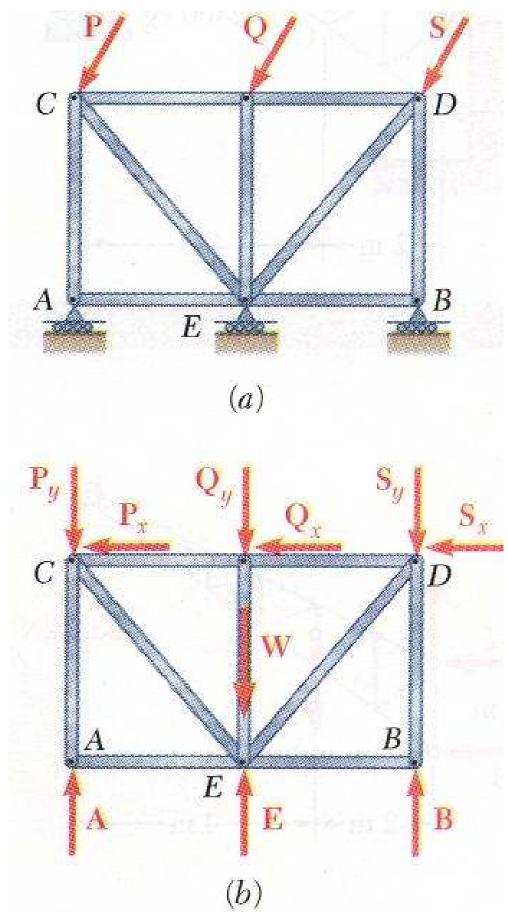
Reações Estaticamente Indeterminadas



- Estrutura com mais incógnitas do que equações

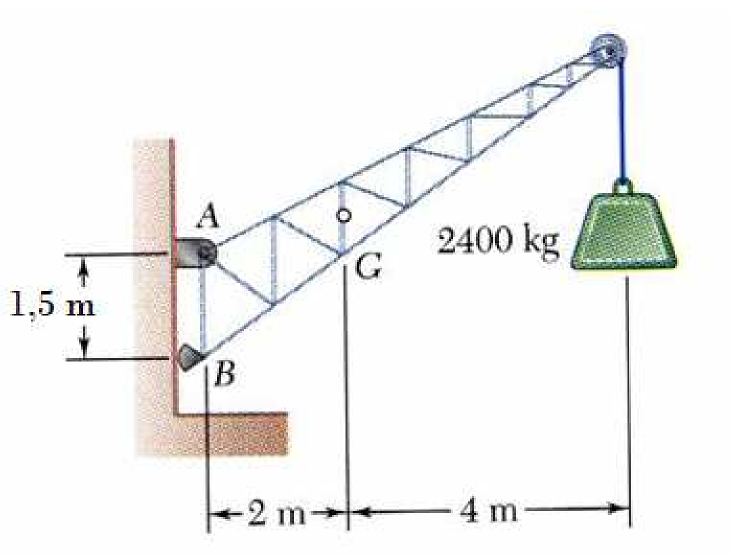


- Estrutura com menos incógnitas do que equações: parcialmente vinculada



- Estrutura com número de incógnitas igual ao número de equações mas impropriamente vinculada

Problema Resolvido 4.1



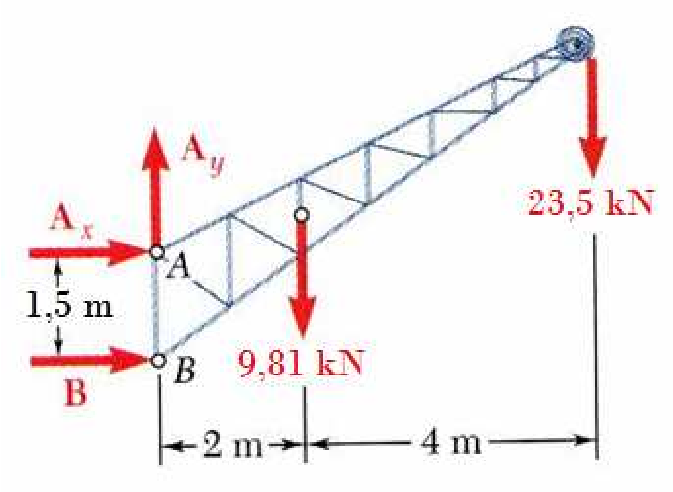
Um guindaste fixo tem massa de 1000 kg e é usado para suspender um caixote de 2400 kg. Ele é mantido no lugar por um pino em *A* e um suporte basculante em *B*. O centro de gravidade do guindaste está localizado em *G*.

Determine os componentes das reações em *A* e *B*.

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre do guindaste.
- Determinamos a reação em *B* resolvemos a equação para a soma dos momentos de todas as forças em relação a *A*. Observamos que as reações em *A* não geram momento em relação àquele ponto.
- Determinamos as reações em *A* resolvendo as equações para a soma dos componentes horizontais e verticais de todas as forças.
- Conferimos se os resultados obtidos estão corretos verificando se a soma dos momentos de todas as forças em relação a *B* é zero.

Problema Resolvido 4.1



- Traçamos um diagrama de corpo livre do guindaste.

- Determinamos a reação em *B* resolvendo a equação para a soma dos momentos de todas as forças em relação a *A*.

$$\sum M_A = 0: \quad +B(1{,}5\ \text{m}) - 9{,}81\ \text{kN}(2\ \text{m}) - 23{,}5\ \text{kN}(6\ \text{m}) = 0$$

$$\boxed{B = +107{,}1\ \text{kN}}$$

- Determinamos as reações em *A* resolvendo as equações para a soma dos componentes horizontais e verticais de todas as forças.

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

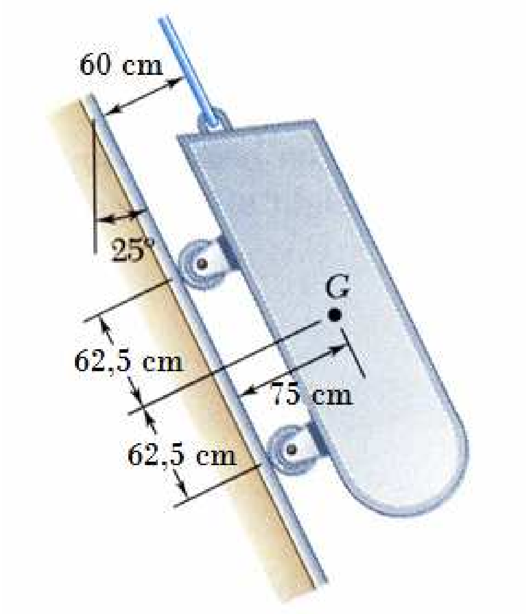
$$\boxed{A_x = -107{,}1\ \text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 9{,}81\ \text{kN} - 23{,}5\ \text{kN} = 0$$

$$\boxed{A_y = +33.3\ \text{kN}}$$

- Conferimos os resultados obtidos.

Problema Resolvido 4.3



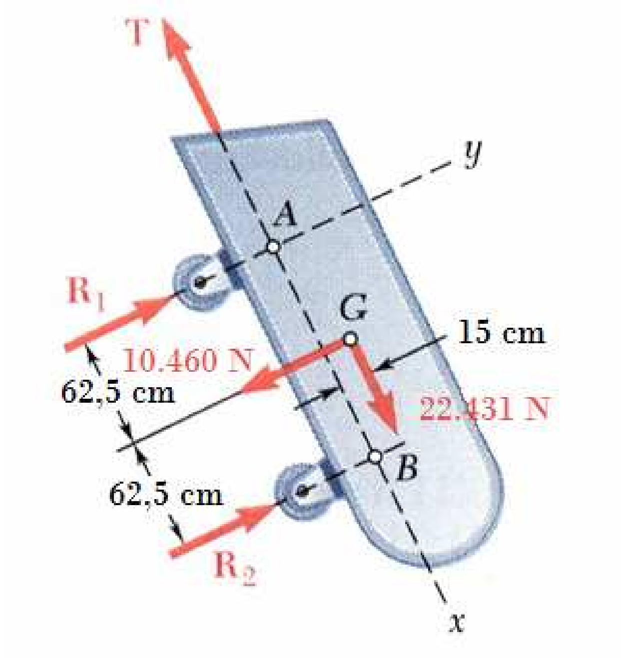
Um vagão de carga está em repouso sobre um trilho inclinado. O peso bruto do vagão e sua carga é 24.750 N e está aplicado em *G*. O vagão é mantido no lugar pelo cabo.

Determine a tração no cabo e a reação em cada par de rodas.

SOLUÇÃO:

- Criamos um diagrama de corpo livre para o vagão com sistema de coordenadas alinhado com o trilho.
- Determinamos as reações nas rodas resolvendo as equações para a soma dos momentos em relação aos eixos das rodas.
- Determinamos a tração no cabo resolvendo a equação para a soma dos componentes das forças paralelos ao trilho.
- Conferimos os resultados obtidos verificando se a soma dos componentes das forças perpendiculares ao trilho é zero.

Problema Resolvido 4.3



- Traçamos um diagrama de corpo livre

$$W_x = +(24.750\text{ N})\cos 25^\circ$$
$$= +22.431\text{ N}$$
$$W_y = -(24.750\text{ N})\,\text{sen }25^\circ$$
$$= -10.460\text{ N}$$

- Determinamos as reações nas rodas.

$$\sum M_A = 0: \quad -(10.460\text{ N})62{,}5\text{ cm} - (22.431\text{ N})15\text{ cm} + R_2(125\text{ cm}) = 0$$

$$\boxed{R_2 = 7.922\text{ N}}$$

$$\sum M_B = 0: \quad +(10.460\text{ N})62{,}5\text{ cm} - (22.431\text{ N})15\text{ cm} - R_1(125\text{ cm}) = 0$$

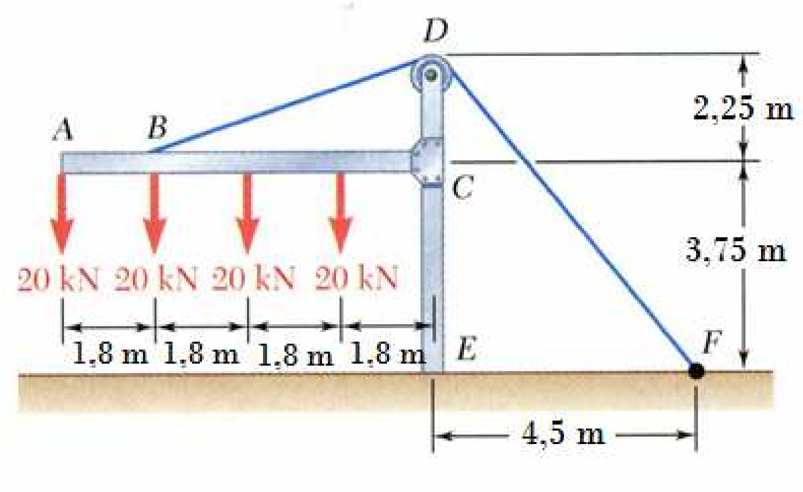
$$\boxed{R_1 = 2.538\text{ N}}$$

- Determinamos a tração no cabo

$$\sum F_x = 0: \quad +22.431\text{ N} - \text{T} = 0$$

$$\boxed{T = +22.431\text{ N}}$$

Problema Resolvido 4.4



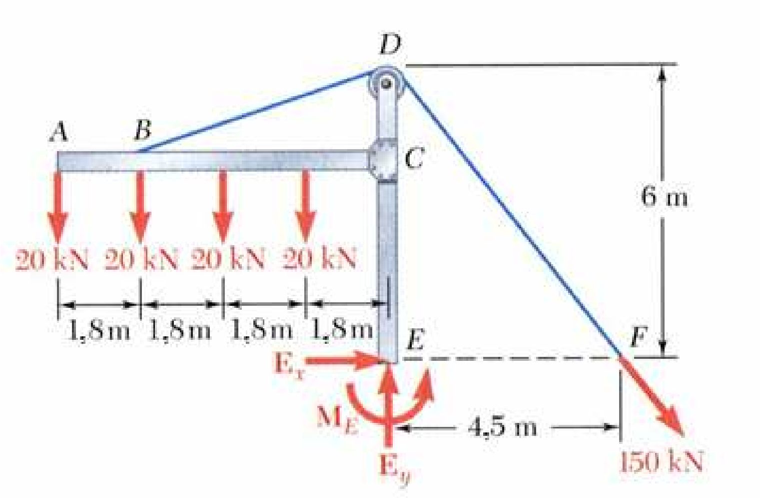
A estrutura representada na figura sustenta parte do teto de uma pequeno edifício. Sabendo que a tração no cabo é 150 kN.

Determine a reação na extremidade *E*.

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre da estrutura e do cabo *BDF*.
- Resolvemos as 3 equações de equilíbrio para os componentes da força e do binário em *E*.

Problema Resolvido 4.4



- Traçamos um diagrama de corpo livre da estrutura e do cabo *BDF*.

- Resolvemos as 3 equações de equilíbrio para os componentes da força e do binário em *E*.

$$\sum F_x = 0: \quad E_x + \frac{4,5}{7,5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$\boxed{E_x = -90,0 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad E_y - 4(20 \text{kN}) - \frac{6}{7,5}(150 \text{kN}) = 0$$

$$\boxed{E_y = +200 \text{ kN}}$$

$$\sum M_E = 0:$$

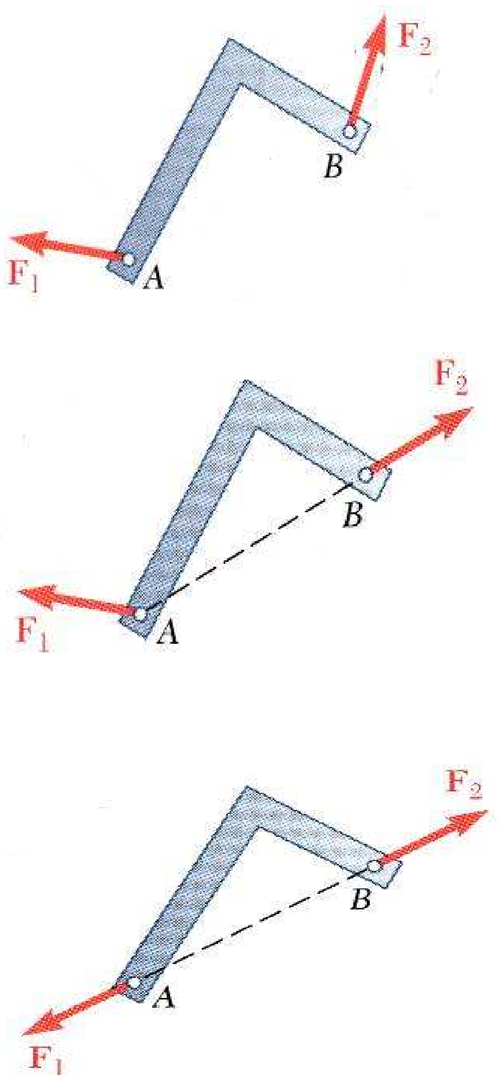
$$+ 20 \text{ kN}(7,2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5,4 \text{ m})$$

$$+ 20 \text{ kN}(3,6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1,8 \text{ m})$$

$$- \frac{6}{7,5}(150 \text{ kN})4,5 \text{ m} + M_E = 0$$

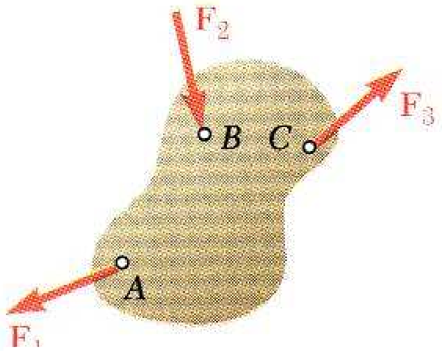
$$\boxed{M_E = 180,0 \text{ kN} \cdot \text{m}}$$

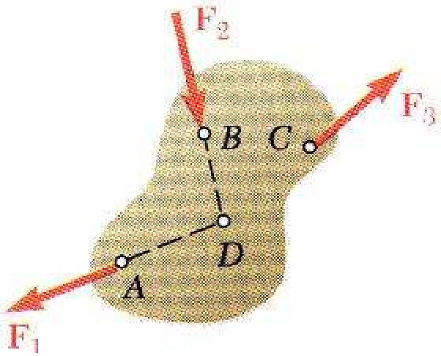
Equilíbrio de um Corpo Sujeito à Ação de Duas Forças

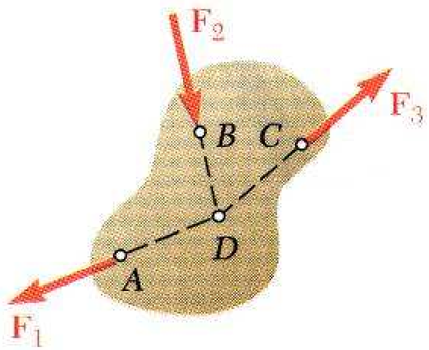


- Considere uma placa do tipo cantoneira sujeita à ação de duas forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$
- Se a placa estiver em equilíbrio, a soma dos momentos em relação a *A* deve ser zero. Como o momento de $\boldsymbol{F_1}$ é obviamente zero, o momento de $\boldsymbol{F_2}$ também deve ser zero, ou seja, a linha de ação de $\boldsymbol{F_2}$ deve passar por *A*.
- De forma similar, a linha de ação de $\boldsymbol{F_1}$ deve passar por *B* para que a soma dos momentos em relação a *B* seja zero.
- Como a soma das forças em qualquer direção deve ser zero, conclui-se que $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ devem ter a mesma intensidade, mas sentidos opostos

Equilíbrio de um Corpo Sujeito à Ação de Três Forças

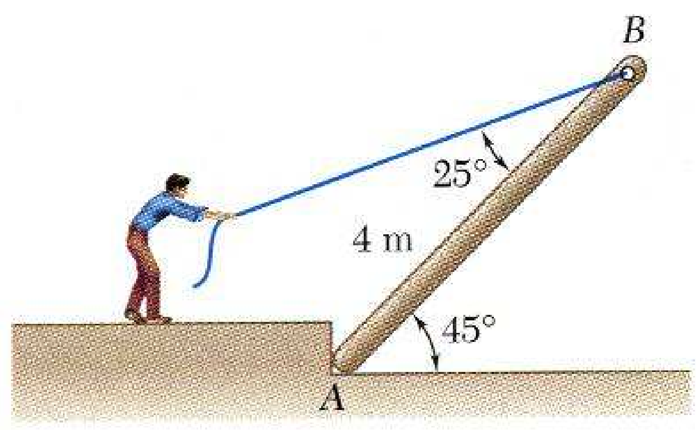






- Considere um corpo rígido sujeito a ação de forças atuando em apenas 3 pontos.
- Assumindo que as linhas de ação das forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ se interceptam, o momento de ambas em relação ao ponto de interseção representado por *D* é zero.
- Como o corpo rígido está em equilíbrio, a soma dos momentos de $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ e $\boldsymbol{F_3}$ em relação a qualquer eixo deve ser zero. Portanto, o momento de $\boldsymbol{F_3}$ em relação a *D* também deve ser zero e a linha de ação de $\boldsymbol{F_3}$ deve passar por *D*.
- As linhas de ação das três forças devem ser concorrentes ou paralelas

Problema Resolvido 4.6



Um homem leventa uma viga de 10 kg e 4 m de comprimento puxando-a com uma corda.

Encontre a tração *T* na corda e a reação em *A*.

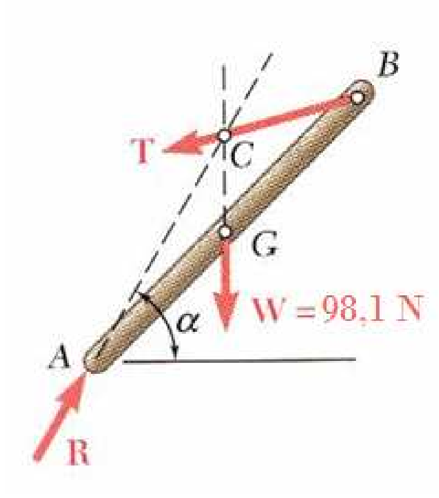
SOLUÇÃO:

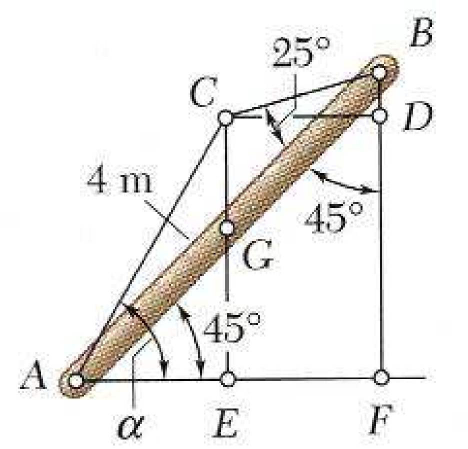
- Traçamos um diagrama de corpo livre da viga observando que a viga é um corpo sob a ação de 3 forças que são o seu peso, a força exercida pela corda e a reação em *A*.

- Para que o corpo esteja em equilíbrio, as três forças devem ser concorrentes. Portanto, a reação ***R*** deve passar pela interseção das linhas de ação do peso e da força exercida pela corda. Dessa forma determina-se a direção da reação ***R***.

- Utilizamos um triângulo de forças para determinar a intensidade da reação ***R***.

Problema Resolvido 4.6





- Traçamos um diagrama de corpo livre da viga.

- Determinamos a direção da reação ***R***.

$$AF = AB\cos 45° = (4\,\mathrm{m})\cos 45° = 2{,}828\,\mathrm{m}$$

$$CD = AE = \tfrac{1}{2}AF = 1{,}414\,\mathrm{m}$$

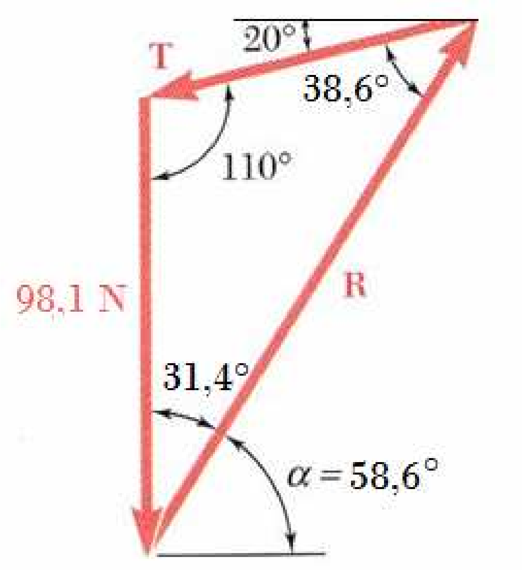
$$BD = CD\cot(45+25) = (1{,}414\,\mathrm{m})\tan 20° = 0{,}515\,\mathrm{m}$$

$$CE = BF - BD = (2{,}828 - 0{,}515)\,\mathrm{m} = 2{,}313\,\mathrm{m}$$

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2{,}313}{1{,}414} = 1{,}636$$

$$\boxed{\alpha = 58{,}6^{\circ}}$$

Problema Resolvido 4.6



- Determinamos a intensidade da reação ***R***.

$$\frac{T}{\operatorname{sen} 31{,}4^\circ} = \frac{R}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{98{,}1\ \text{N}}{\operatorname{sen} 38{,}6^\circ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= 81{,}9\ \text{N} \\ R &= 147{,}8\ \text{N} \end{aligned}}$$

Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três Dimensões

- São necessárias seis equações escalares para expressar as condições para o equilíbrio de um corpo rígido no caso geral tridimensional.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

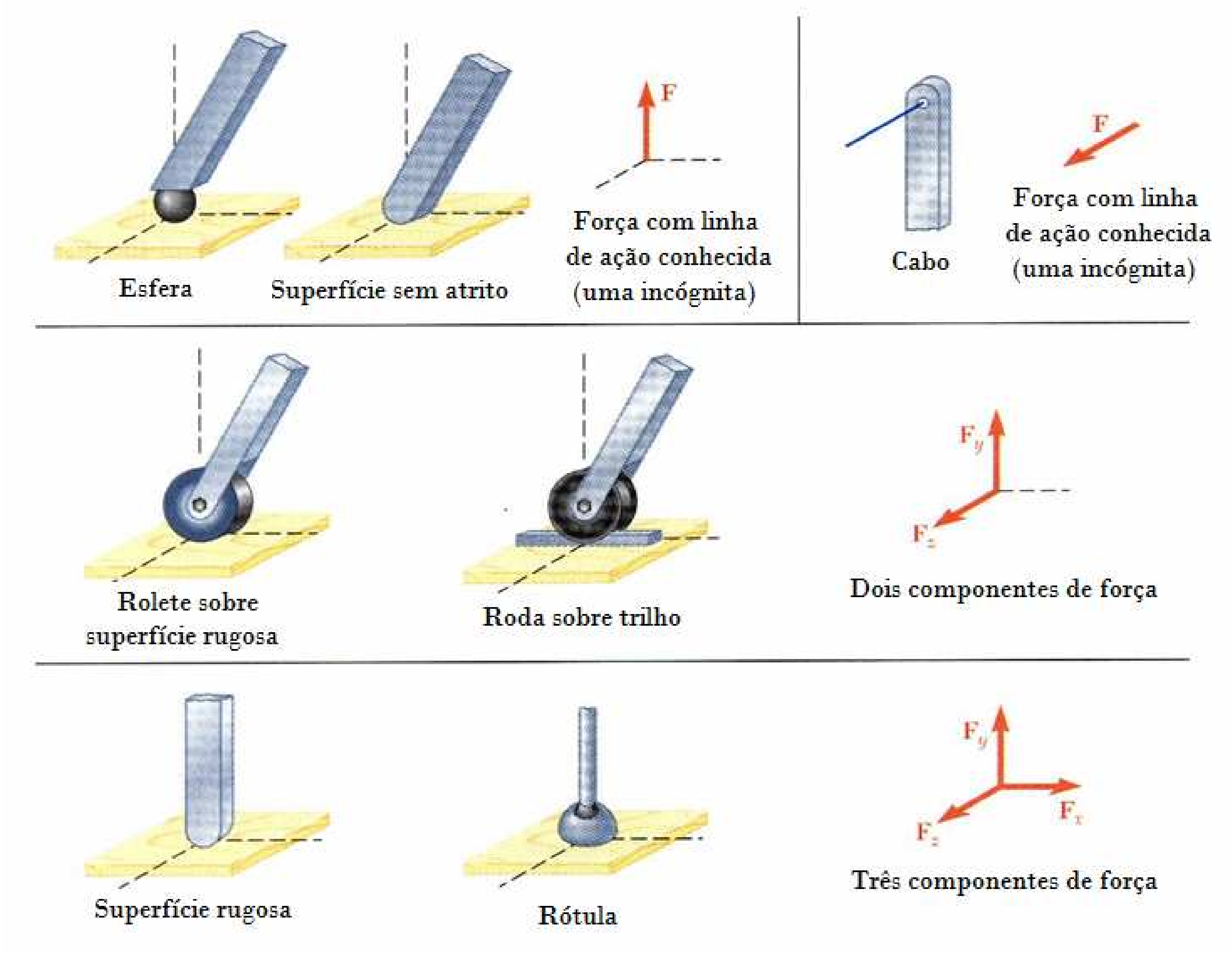
- Essas equações podem ser resolvidas para no máximo 6 incógnitas que, geralmente, representam reações em apoios ou conexões.

- As equações escalares serão obtidas mais convenientemente se expressarmos, inicialmente, as condições de equilíbrio na forma vetorial.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = 0$$

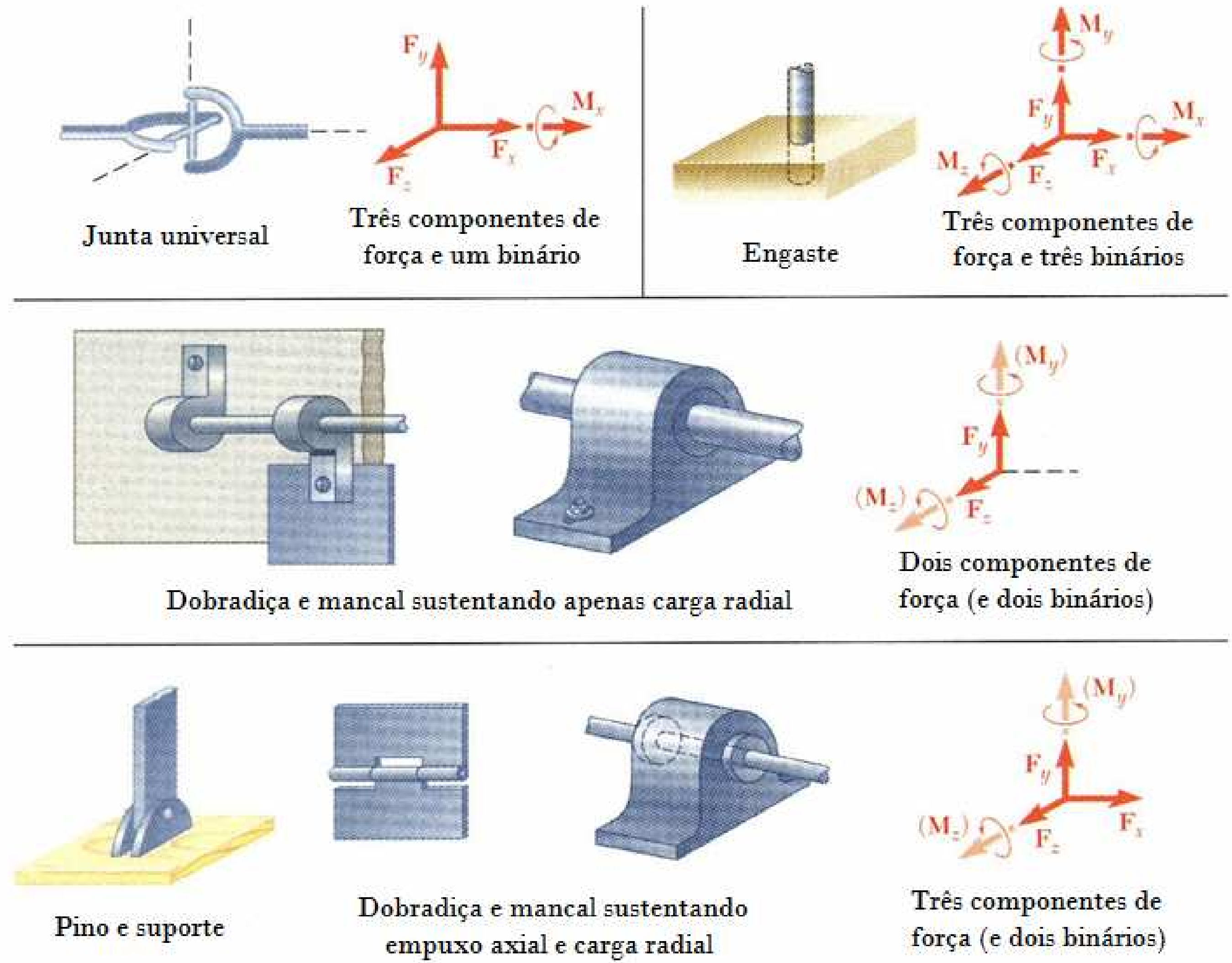
Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Tridimensional

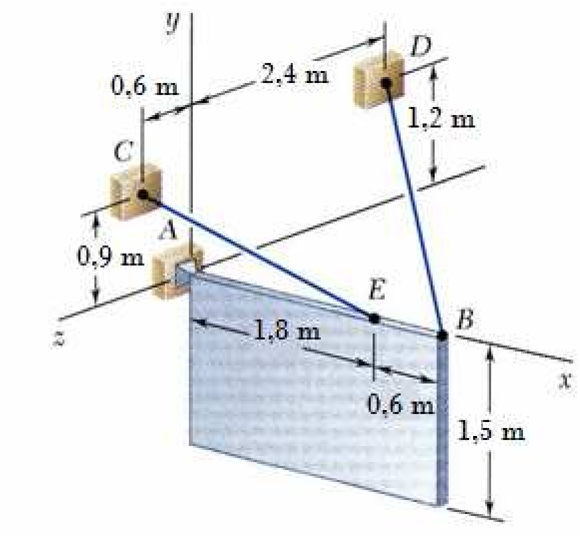


Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Tridimensional



Problema Resolvido 4.8



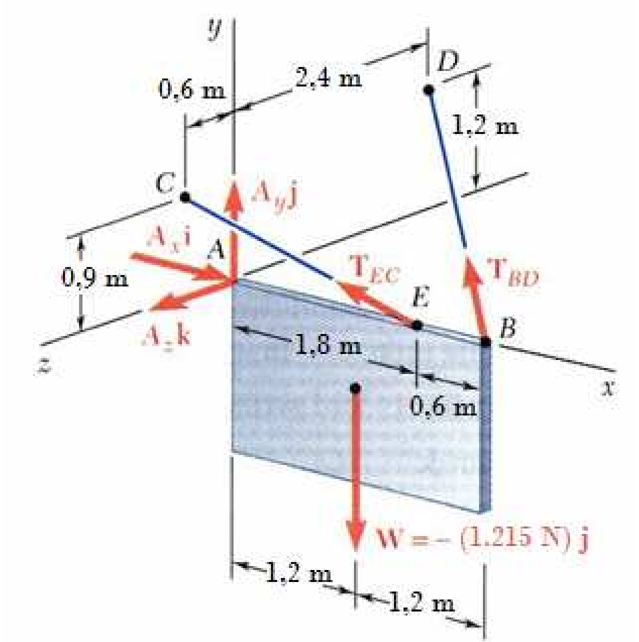
Uma placa de massa específica uniforme pesa 1.215 N e é sustentada por uma rótula em *A* e por dois cabos.

Determine a tração em cada cabo e a reação em *A*.

SOLUÇÃO:

- Traçamos um diagrama de corpo livre da placa.
- Aplicamos as condições de equilíbrio para obter equações que possibilitem o cálculo das reações desconhecidas.

Problema Resolvido 4.8



- Traçamos um diagrama de corpo livre da placa.

  Como há apenas 5 incógnitas, a placa está parcialmente vinculada. Ela pode girar livremente em torno do eixo *x*. No entanto, ela está em equilíbrio sob o carregamento dado.

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\left(\frac{\overline{BD}}{BD}\right)$$

$$= T_{BD}\,\frac{-2{,}4\vec{i} + 1{,}2\vec{j} - 2{,}4\vec{k}}{3{,}6}$$

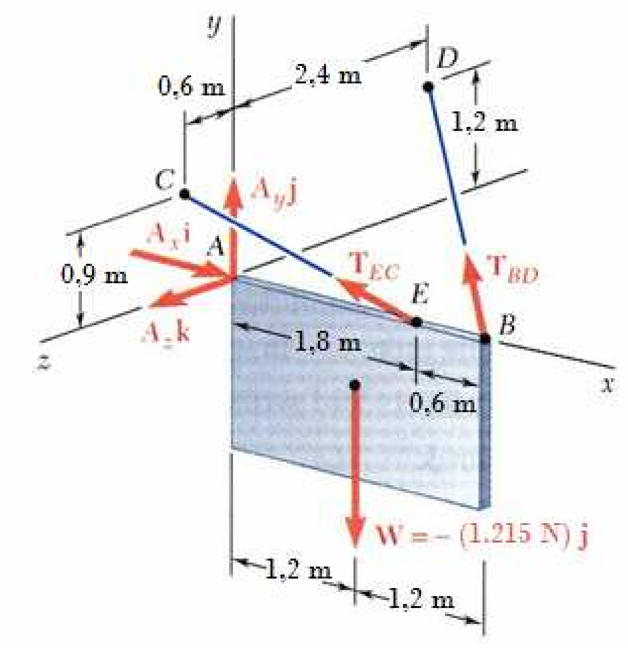
$$= T_{BD}\left(-\tfrac{2}{3}\vec{i} + \tfrac{1}{3}\vec{j} - \tfrac{2}{3}\vec{k}\right)$$

$$\vec{T}_{EC} = T_{EC}\left(\frac{\overline{EC}}{EC}\right)$$

$$= T_{EC}\,\frac{-1{,}8\vec{i} + 0{,}9\vec{j} + 0{,}6\vec{k}}{2{,}1}$$

$$= T_{EC}\left(-\tfrac{6}{7}\vec{i} + \tfrac{3}{7}\vec{j} + \tfrac{2}{7}\vec{k}\right)$$

Problema Resolvido 4.8



- Aplicamos as condições de equilíbrio para desenvolver equações para as reações desconhecidas

$$\sum \vec{F} = \vec{A} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{EC} - (1.215\text{ N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}: \quad A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC} = 0$$

$$\vec{j}: \quad A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 1.215\text{ N} = 0$$

$$\vec{k}: \quad A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{T}_{BD} + \vec{r}_E \times \vec{T}_{EC} + (1{,}2\text{ m})\vec{i} \times (-1.215\text{ N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{j}: \quad 1{,}6T_{BD} - 0{,}514T_{EC} = 0$$

$$\vec{k}: \quad 0{,}8T_{BD} + 0{,}771T_{EC} - 1{,}458\text{ N} = 0$$

Resolvemos as 5 equações para as 5 incógnitas e obtemos:

$$\boxed{\begin{gathered} T_{BD} = 455{,}9\text{ N} \qquad T_{EC} = 1.417{,}5\text{ N} \\ \vec{A} = (1.521\text{ N})\vec{i} + (455{,}4\text{ N})\vec{j} - (101{,}25\text{ N})\vec{k} \end{gathered}}$$