Faculdade de Engenharia - Campus de Guaratinguetá

Pesquisa Operacional

Fabrício Maciel – fabricio@feg.unesp.br

Departamento de Produção

Programação linear

Sumário

- *Modelagem e limitações da Programação Linear.*
- *Resolução Gráfica.*
- *Forma padrão de um modelo de Programação Linear.*
- *Definições e Teoremas.*
- *Forma canônica de um sistema de equações lineares.*
- *Método Simplex.*

Programação linear

Programação linear:

Preocupação em encontrar a melhor solução para problemas associados com modelos lineares.

Modelo de Programação Linear:

Maximização (ou minimização) de uma função objetivo linear com relação as variáveis de decisão do modelo.

Respeitando-se as limitações (restrições) do problema expressas por um sistema de equações e inequações associadas com as variáveis de decisão do modelo.

Modelagem em Programação linear

Razões para o uso da Programação Linear:

1. Grande variedade de situações podem ser aproximadas por modelos lineares.

2. Existência de técnicas (algoritmos) eficientes para a solução de modelos lineares.

3. Possibilidade de realização de análise de sensibilidade nos dados do modelo.

4. Estágio de desenvolvimento da tecnologia computacional.

Modelagem em Programação linear

Passos básicos na obtenção de modelos de PL:

1. Identificar as variáveis de decisão, representá-las em simbologia algébrica.

2. Identificar as restrições do problema, expressá-las como equações ou inequações lineares em termos das variáveis de decisão.

3. Identificar o objetivo de interesse no problema, representá-lo como função linear em termos das variáveis de decisão, que deverá ser maximizada ou minimizada.

Modelagem em Programação linear

Construção de modelos não é uma ciência, mas uma arte, podendo ser melhorada com a prática.

Exemplos a serem trabalhados:

Determinação do *mix* de produção
Seleção de mídia para propaganda
Um problema de treinamento
Uma indústria química
Uma oficina mecânica
Dimensionamento de equipes de inspeção

Modelagem em Programação linear

Determinação do *mix* de produção

Uma companhia deseja programar a produção de um utensílio de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos – mão-de-obra e material. A companhia está considerando a fabricação de três modelos e o seu departamento de engenharia forneceu os dados a seguir:

	Modelo		
	A	B	C
Mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
Material (kg por unidade)	4	4	5
Lucro ($ por unidade)	4	2	3

O suprimento de material é de 200 kg por dia. A disponibilidade diária de mão-de-obra é 150 horas. Formule um modelo de Programação Linear para determinar a produção diária de cada um dos modelos de modo a maximizar o lucro total da companhia.

Modelagem em Programação linear

Formulação do modelo

1. Identificação das variáveis de decisão:
   X_A – produção diária do modelo A
   X_B – produção diária do modelo B
   X_C – produção diária do modelo C

2. Identificação das restrições:
   (Limitação de mão-de-obra) $\longrightarrow$ $7X_a + 3X_b + 6X_c \leq 150$
   (Limitação de material) $\longrightarrow$ $4X_a + 4X_b + 5X_c \leq 200$
   (Não-negatividade) $\longrightarrow$ $X_a \geq 0, \; X_b \geq 0, \; X_c \geq 0.$

3. Identificação do objetivo: maximização do lucro total
   Lucro Total = $L = 4X_a + 2X_b + 3X_c$
   Max $L = 4X_a + 2X_b + 3X_c$

Enunciado

Modelagem em Programação linear

Modelo

Encontrar números X_a, X_b, X_c tais que:

Max $L = 4X_a + 2X_b + 3X_c$

Sujeito as restrições:

$$7X_a + 3X_b + 6X_c \leq 150$$
$$4X_a + 4X_b + 5X_c \leq 200$$
$$X_a \geq 0, \quad X_b \geq 0, \quad X_c \geq 0$$

Modelagem em Programação linear

Seleção de mídia para propaganda

Uma companhia de propaganda deseja planejar uma campanha em 03 diferentes meios: TV, rádio e revistas. Pretende-se alcançar o maior número de clientes possível. Um estudo de mercado resultou em:

	TV horário normal	TV horário nobre	Rádio	Revistas
Custo	40.000	75.000	30.000	15.000
Clientes Atingidos	400.000	900.000	500.000	200.000
Mulheres Atingidas	300.000	400.000	200.000	100.000

Obs: valores válidos para cada veiculação da propaganda.

Modelagem em Programação linear

A companhia não quer gastar mais de $ 800.000 e, adicionalmente, deseja:

(1) Que no mínimo 2 milhões de mulheres sejam atingidas;

(2) Gastar no máximo $ 500.000 com TV;

(3) Que no mínimo 03 veiculações ocorram no horário normal TV;

(4) Que no mínimo 02 veiculações ocorram no horário nobre TV;

(5) Que o nº. de veiculações no rádio e revistas fiquem entre 05 e 10, para cada meio de divulgação.

Formular um modelo de PL que trate este problema, determinando o nº. de veiculações a serem feitas em cada meio de comunicação, de modo a atingir o máximo possível de clientes.

Modelagem em Programação linear

Resolução do exemplo “seleção de mídia para propaganda”

Variáveis de decisão:

X_1 = nº. de exposições em horário normal na tv.

X_2 = nº. de exposições em horário nobre na tv.

X_3 = nº. de exposições feitas utilizando rádio

X_4 = nº. de exposições feitas utilizando revistas.

Função-objetivo:

“Maximizar nº. de clientes atingidos”

$$\text{Max } Z = 400.000X_1 + 900.000X_2 + 500.000X_3 + 200.000X_4$$

Modelagem em Programação linear

Restrições:

Orçamento:

$40.000X_1 + 75.000X_2 + 30.000X_3 + 15.000X_4 \leq 800.000$

Mulheres atingidas:

$300.000X_1 + 400.000X_2 + 200.000X_3 + 100.000X_4 \geq 2.000.000$

Gasto com TV

$40.000X_1 + 75.000X_2 \leq 500.000$

Nº. de veiculações em TV, rádio e revistas

$X_1 \geq 3,\ X_2 \geq 2,\ 5 \leq X_3 \leq 10,\ 5 \leq X_4 \leq 10$

Não-negatividade

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0.$

Um problema de treinamento

Uma empresa de máquinas ferramentas tem um programa de treinamento para operadores de máquinas. Alguns operadores já treinados podem trabalhar como instrutores neste programa ficando responsáveis por 10 *trainees* cada. A empresa pretende aproveitar apenas 07 *trainees* de cada turma de 10.

Estes operadores treinados também são necessários na linha de fabricação, e sabe-se que serão necessários para os próximos meses: 100 operadores em janeiro, 150 em fevereiro, 200 em março, e 250 em abril. Atualmente há 130 operadores treinados disponíveis na empresa.

Modelagem em Programação linear

Os custos associados a cada situação são:

Trainees ....$ 400.
Operador treinado trabalhando ....$ 700.
Operador treinado ocioso..$ 500.

Encontrar um modelo de PL que forneça um programa de treinamento de custo mínimo e satisfaça os requisitos da empresa em termos de nº. de operadores treinados disponíveis a cada mês.

Observação: acordo firmado com o sindicato proíbe demissões de operadores treinados no período.

Modelagem em Programação linear

Resolução do exemplo: Um problema de treinamento

Observe que a cada mês um operador treinado está: operando máquina, trabalhando como instrutor, ou está ocioso. Além disto, o nº. de operadores treinados trabalhando nas máquinas é fixo e conhecido: 100 em janeiro, 150 em fevereiro, 200 em março e 250 em abril.

Variáveis de decisão:

X_1 = operadores trabalhando como instrutores em janeiro

X_2 = operadores ociosos em janeiro

X_3 = operadores trabalhando como instrutores em fevereiro

X_4 = operadores ociosos em fevereiro

X_5 = operadores trabalhando como instrutores em março

X_6 = operadores ociosos em março

Enunciado

Modelagem em Programação linear

Função-objetivo:

"Custo total = custo *trainees* + custo instrutores + custo ociosos + custo operadores trabalhando em máquinas".

$$\text{Min } C = 400*(10X_1 + 10X_3 + 10X_5) + 700*(X_1 + X_3 + X_5) + \\ + 500*(X_2 + X_4 + X_6) + 700*(100 + 150 + 200)$$

$$\text{Min } C = 4700X_1 + 500X_2 + 4700X_3 + 500X_4 + 4700X_5 + 500X_6 + 315.000$$

Enunciado

Modelagem em Programação linear

Restrições: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$ (não-negatividade)

Equação de balanço mensal:
operadores treinados no início do mês = operadores nas máquinas + instrutores + operadores ociosos.

Janeiro: $130 = 100 + X_1 + X_2 \Leftrightarrow X_1 + X_2 = 30$

Fevereiro: $130 + 7X_1 = 150 + X_3 + X_4 \Leftrightarrow 7X_1 - X_3 - X_4 = 20$

Março: $130 + 7X_1 + 7X_3 = 200 + X_5 + X_6 \Leftrightarrow 7X_1 + 7X_3 - X_5 - X_6 = 70$

Abril: $250 = 130 + 7X_1 + 7X_3 + 7X_5 \Leftrightarrow 7X_1 + 7X_3 + 7X_5 = 120.$

Enunciado

Uma indústria química

Dois produtos, A e B, são feitos a partir de duas operações químicas. Cada unidade do produto A requer 02 horas da operação 1 e 03 horas da operação 2. Cada unidade do produto B requer 03 horas da operação 1 e 04 horas da operação 2. O tempo total disponível para a realização da operação 1 é de 16 horas, e o tempo total para a operação 2 é de 24 horas.

A produção do produto B resulta, também, num subproduto C sem custos adicionais. Sabe-se que parte do produto C pode ser vendido com lucro, mas o restante deve ser destruído. Previsões mostram que no máximo 05 unidades do produto C serão vendidas, e sabe-se que cada unidade do produto B fabricada gera 02 unidades do produto C.

Modelagem em Programação linear

Sabe-se que:

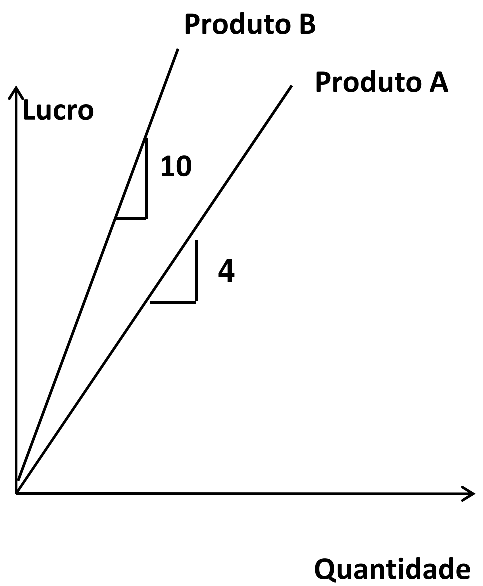
Produto *A* gera um lucro de $ 4 por unidade.
Produto *B* gera um lucro de $ 10 por unidade.
Produto *C* gera um lucro de $ 3 por unidade se for vendido.
Produto *C* gera um custo de $ 2 por unidade se for destruído

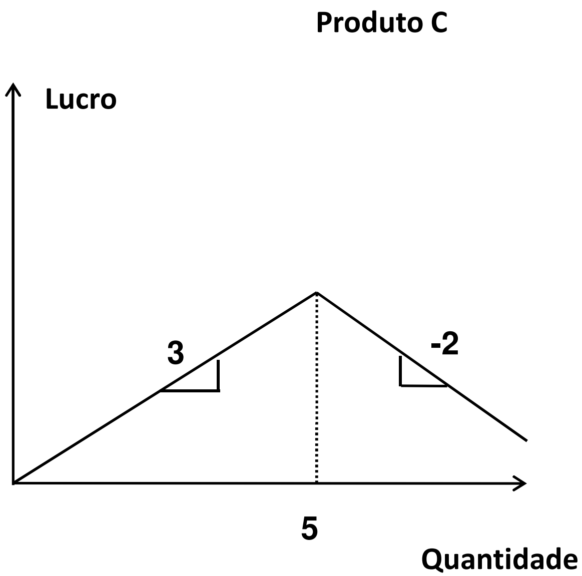
Determinar um modelo de PL para tratar este problema, e encontrar quanto produzir de cada produto, de modo a maximizar o lucro da indústria química.

Modelagem em Programação linear

Resolução do exemplo: Uma indústria química - produto A

Observe que o lucro da venda do produto A é uma função linear, mas com respeito ao produto C isto não ocorre.





Modelagem em Programação linear

Artifício: considerar as variáveis de decisão como sendo
X_1 = quantidade produto A produzida
X_2 = quantidade produto B produzida
X_3 = quantidade produto C vendida
X_4 = quantidade produto C destruída

Função-objetivo:

$$\text{Max } Z = 4\,X_1 + 10\,X_2 + 3\,X_3 - 2\,X_4$$

Restrições:

$2\,X_1 + 3\,X_2 \leq 16$ (disponibilidade de tempo para operação 1)
$3\,X_1 + 4\,X_2 \leq 24$ (disponibilidade de tempo para operação 2)
$X_3 + X_4 = 2\,X_2$ (produção do produto C a partir do produto B)
$X_3 \leq 5$ (previsão de produto C que pode ser vendido)
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ (não-negatividade)

Modelagem em Programação linear

Oficina mecânica

Uma oficina mecânica tem 01 furadeira vertical e 05 fresas, que são usadas para a produção de conjuntos formados de 2 partes. Sabe-se qual é a produtividade de cada máquina na fabricação destas partes do conjunto:

	Furadeira	Fresa
Parte 1	03	20
Parte 2	05	15

Obs: tempo para produzir as partes dado em minutos.

Modelagem em Programação linear

O encarregado pela oficina deseja manter uma carga balanceada nas máquinas de modo que nenhuma delas seja usada mais que 30 minutos por dia que qualquer outra, sendo o carregamento de fresamento dividido igualmente entre as 05 fresas.

Achar um modelo de PL para dividir o tempo de trabalho entre as máquinas de modo a obter o máximo de conjuntos completos ao final de um dia, num total de 08 horas de trabalho.

Modelagem em Programação linear

Resolução do exemplo: Oficina mecânica

Variáveis de decisão:

X_1 = número de partes 1 produzidas por dia

X_2 = número de partes 2 produzidas por dia

Restrições:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 480$$

(minutos por dia disponíveis para a furadeira)

$$(20X_1 + 15X_2)/5 = 4X_1 + 3X_2 \leq 480$$

(minutos por dia disponíveis para cada fresa)

Modelagem em Programação linear

$$|(4X_1 + 3X_2) - (3X_1 + 5X_2)| = |X_1 - 2X_2| \leq 30$$

(Balanceamento de carga entre as máquinas)

Observe que esta última restrição não é linear, mas é equivalente a duas equações lineares que podem substituí-la:

$X_1 - 2X_2 \leq 30$ e $-X_1 + 2X_2 \leq 30$

$X_1, X_2 \geq 0$ (não-negatividade).

Modelagem em Programação linear

Função-objetivo:

"maximização do número de conjuntos completos por dia"

$$\text{Max } Z = \min(X_1, X_2)$$

Observe que esta função não é linear, mas pode ser linearizada utilizando-se uma nova variável, da forma:

Seja $Y = \min(X_1, X_2)$, $Y \geq 0$, naturalmente tem-se duas novas restrições

Dadas por: $Y \leq X_1$ e $Y \leq X_2$.

A função-objetivo linear fica sendo: $\text{Max } Z = Y$

Problema de dimensionamento de equipes de inspeção

Uma companhia deseja determinar quantos inspetores alocar à uma dada tarefa do controle da qualidade. As informações disponíveis são:

Há 08 inspetores do nível 1 que podem checar as peças a uma taxa de 25 peças por hora, com uma acuracidade de 98%, sendo o custo de cada inspetor deste nível $4 por hora;

Há 10 inspetores do nível 2 que podem checar as peças a uma taxa de 15 peças por hora, com uma acuracidade de 95%, sendo o custo de cada inspetor deste nível $3 por hora.

Modelagem em Programação linear

A companhia deseja que no mínimo 1800 peças sejam inspecionadas por dia (= 08 horas).

Sabe-se, ainda, que cada erro cometido por inspetores no controle da qualidade das peças acarreta um prejuízo à companhia de $2 por peça mal inspecionada.

Formular um modelo de PL para possibilitar a designação ótima do nº. de inspetores de cada nível de modo a otimizar o custo da inspeção diária da companhia.

Modelagem em Programação linear

Resolução do exemplo: Dimensionamento de equipes de inspeção

Variáveis de decisão:
X_i = nº. de inspetores do nível i (= 1, 2) alocados à inspeção.

Função objetivo:

Minimizar C = custo total diário de inspeção ($/dia)
onde : custo total = custo do salário dos inspetores + custo dos erros

$$\text{Min } C = 8 * [(4X_1 + 3X_2) + 2 * (25*0{,}02X_1 + 15*0{,}05X_2)]$$
$$\text{Min } C = 40X_1 + 36X_2$$

Modelagem em Programação linear

Restrições:

1. Quanto ao nº. de inspetores disponíveis:
   $X_1 \leq 8$ (inspetores do nível 1)
   $X_2 \leq 10$ (inspetores do nível 2)

2. Quanto ao nº. de peças inspecionadas por dia:
   $8 * (25X_1 + 15X_2) \geq 1800 \quad \Leftrightarrow \quad 5X_1 + 3X_2 \geq 45$

3. Restrições implícitas de não negatividade:
   $X_1 \geq 0$
   $X_2 \geq 0.$

Resolução gráfica de modelos de PL

Aplicável para modelos com 02 variáveis de decisão

Útil para a ilustração de alguns conceitos básicos utilizados na resolução de modelos de maior porte.

Etapas a serem seguidas na resolução gráfica

1º Passo: identificar a *região viável* do modelo, isto é, quais são os pares (X_1, X_2) que satisfazem a todas as restrições.

2º Passo: achar a melhor solução viável, denominada *Solução Ótima* e denotada por (X_1^*, X_2^*), que leva ao *valor ótimo* da função-objetivo Z^*.

Resolução gráfica de modelos de PL

Problema de *mix* de Produção

Fabricação de dois modelos de brinquedos: B_1 e B_2.

- Recursos disponíveis:

  1000 kg de plástico especial.

  40 horas para produção semanal.

- Requisitos do Departamento de Marketing:

  Produção total não pode exceder 700 dúzias.

  A quantidade de dúzias de B_1 não pode exceder a quantidade de dúzias de B_2, ou seja não pode ser mais que 350 dúzias.

- Dados técnicos:

  B_1 requer 2 kg de plástico e 3 minutos por dúzia.

  B_2 requer 1 kg de plástico e 4 minutos por dúzia.

A Gerência está procurando um programa de produção que aumente o lucro da Companhia.

Resolução gráfica de modelos de PL

Variáveis de decisão:

X_1: produção semanal de B_1 (em dúzias).

X_2: produção semanal de B_2 (em dúzias).

Função Objetivo: Maximizar o Lucro semanal

Resolução gráfica de modelos de PL

Max $8X_1 + 5X_2$ (Lucro semanal)

sujeito a:

$2X_1 + 1X_2 \leq 1000$ (Plástico - Kg)

$3X_1 + 4X_2 \leq 2400$ (Tempo de produção - minutos)

$X_1 + X_2 \leq 700$ (Produção total)

$X_1 - X_2 \leq 350$ (*mix*)

$X_j \geq 0, \; j = 1,2$ (Não negatividade)

Resolução gráfica de modelos de PL

Conceitos importantes:

Os pontos (X_1, X_2) que satisfazem todas as restrições do modelo formam a **Região Viável.**

Esses pontos são chamados de **Soluções Viáveis.**

Usando a resolução gráfica pode-se representar todos as restrições (semi-planos), a função objetivo (reta) e os três tipos de pontos viáveis.

Resolução gráfica de modelos de PL

1º Passo:

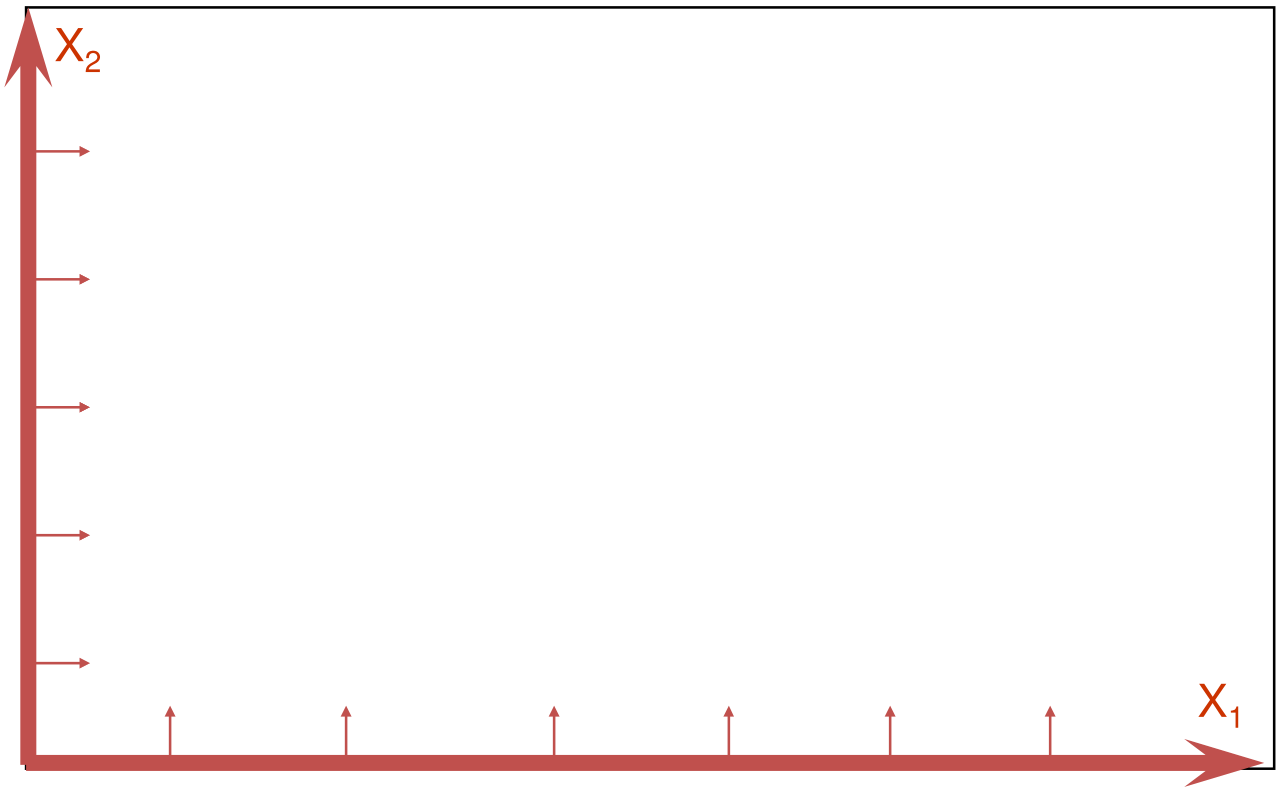
Traçar eixos cartesianos, associando a cada um deles uma variável de decisão.

No exemplo de fabricação de brinquedos: X_1 para o eixo das abscissas e X_2 para o eixo das ordenadas.

As restrições de não-negatividade, $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$, implicam que os pares (X_1, X_2) viáveis estão no 1º quadrante dos eixos considerados.

Resolução gráfica de modelos de PL

Representando as condições de não negatividade



Resolução gráfica de modelos de PL

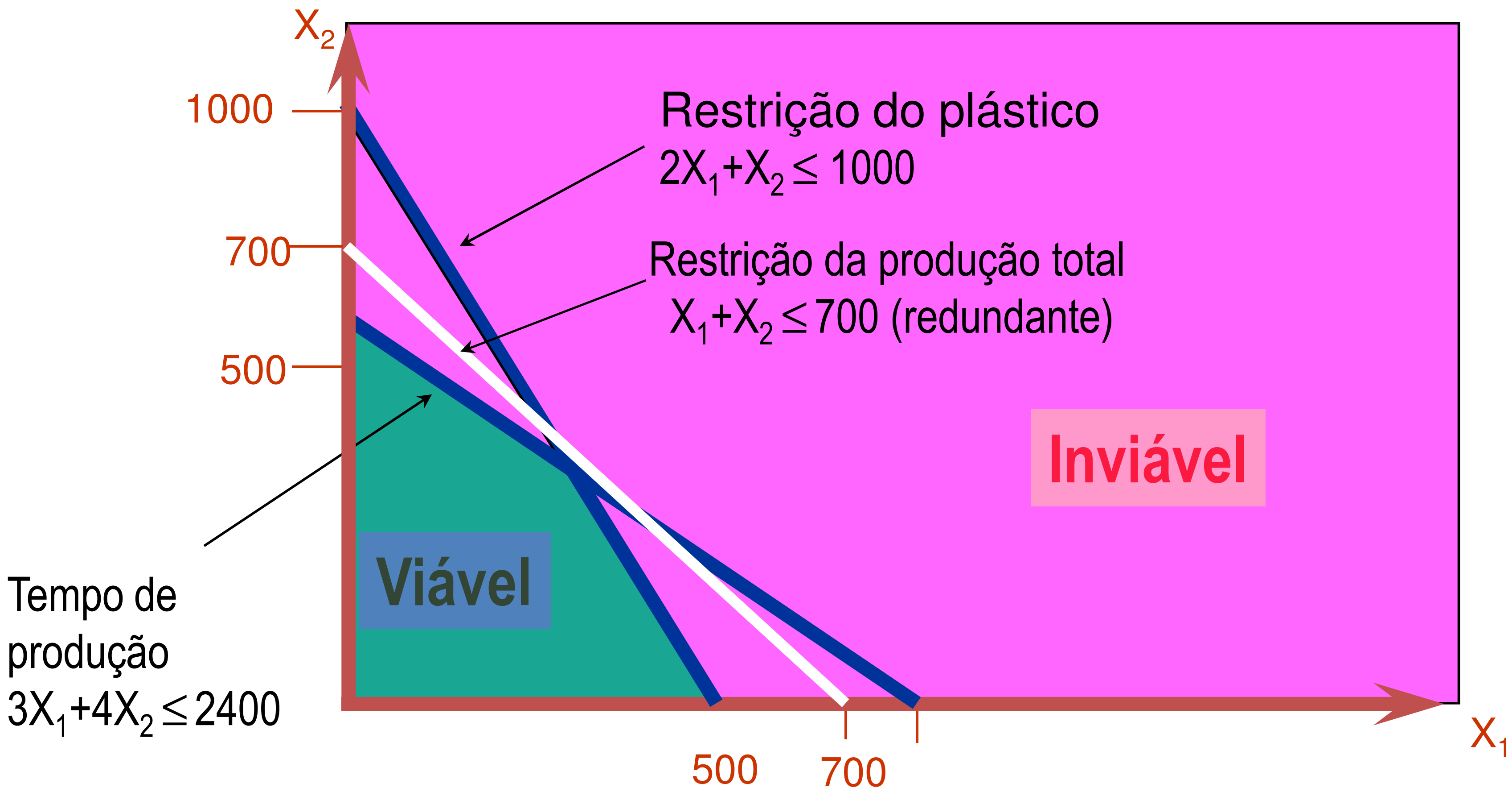
Observar que no exemplo dos brinquedos, as restrições correspondem a semi-planos associados, respectivamente, às retas suportes dadas por:

$$2X_1 + 1X_2 = 1000$$
$$3X_1 + 4X_2 = 2400$$
$$X_1 + X_2 = 700$$
$$X_1 - X_2 = 350$$
$$X_j \geq 0, \quad j = 1,2$$

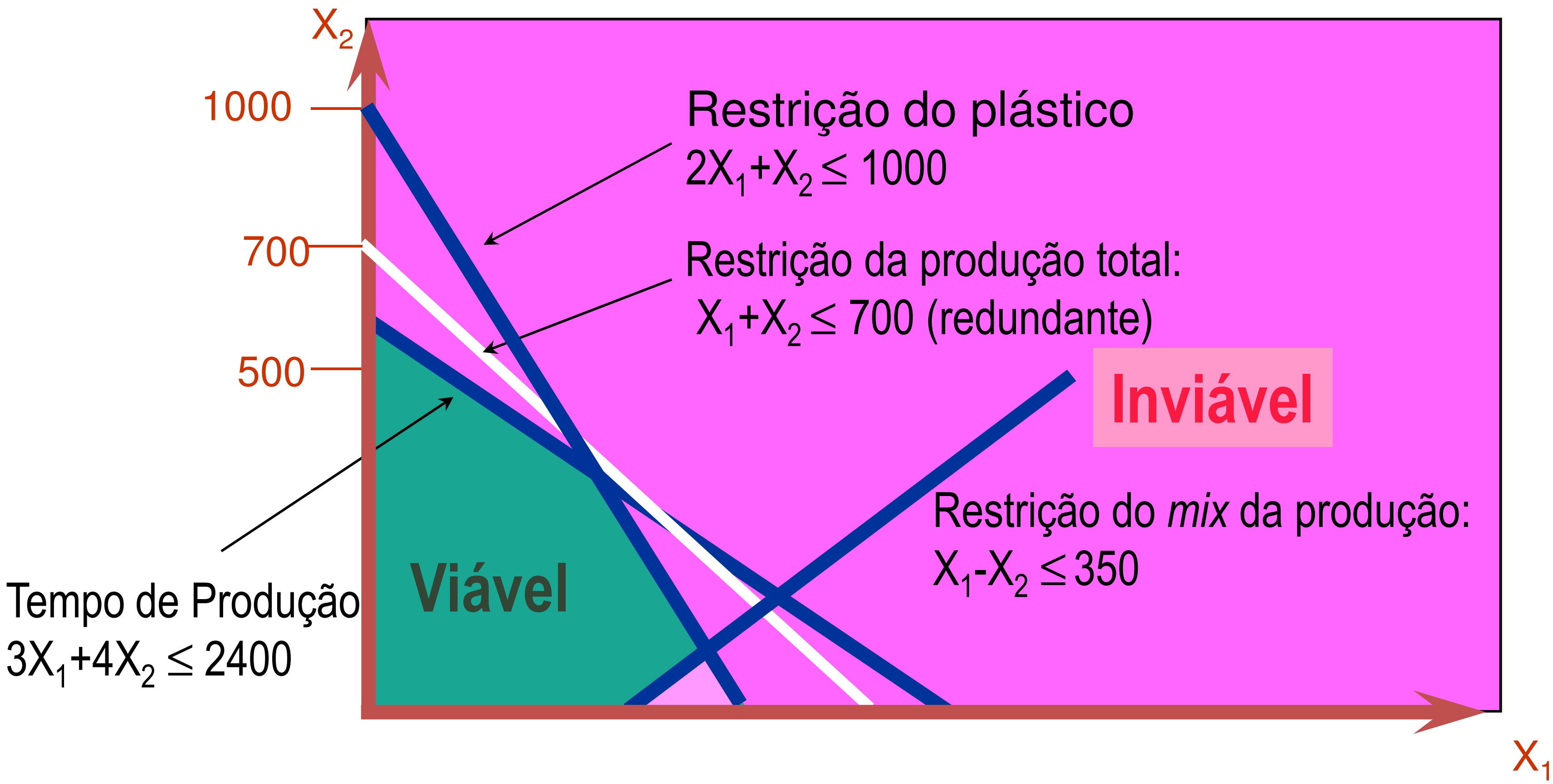
Notar que cada reta suporte define dois semi-planos no espaço (X_1, X_2). Para identificar qual destes semi-planos é de interesse no caso, ou seja, contém os pontos que satisfazem a desigualdade da restrição, basta testar algum ponto à esquerda ou à direita (acima ou abaixo) da reta suporte da desigualdade.

Um ponto que torna isto fácil é a origem (0, 0), mas poderia ser qualquer outro.

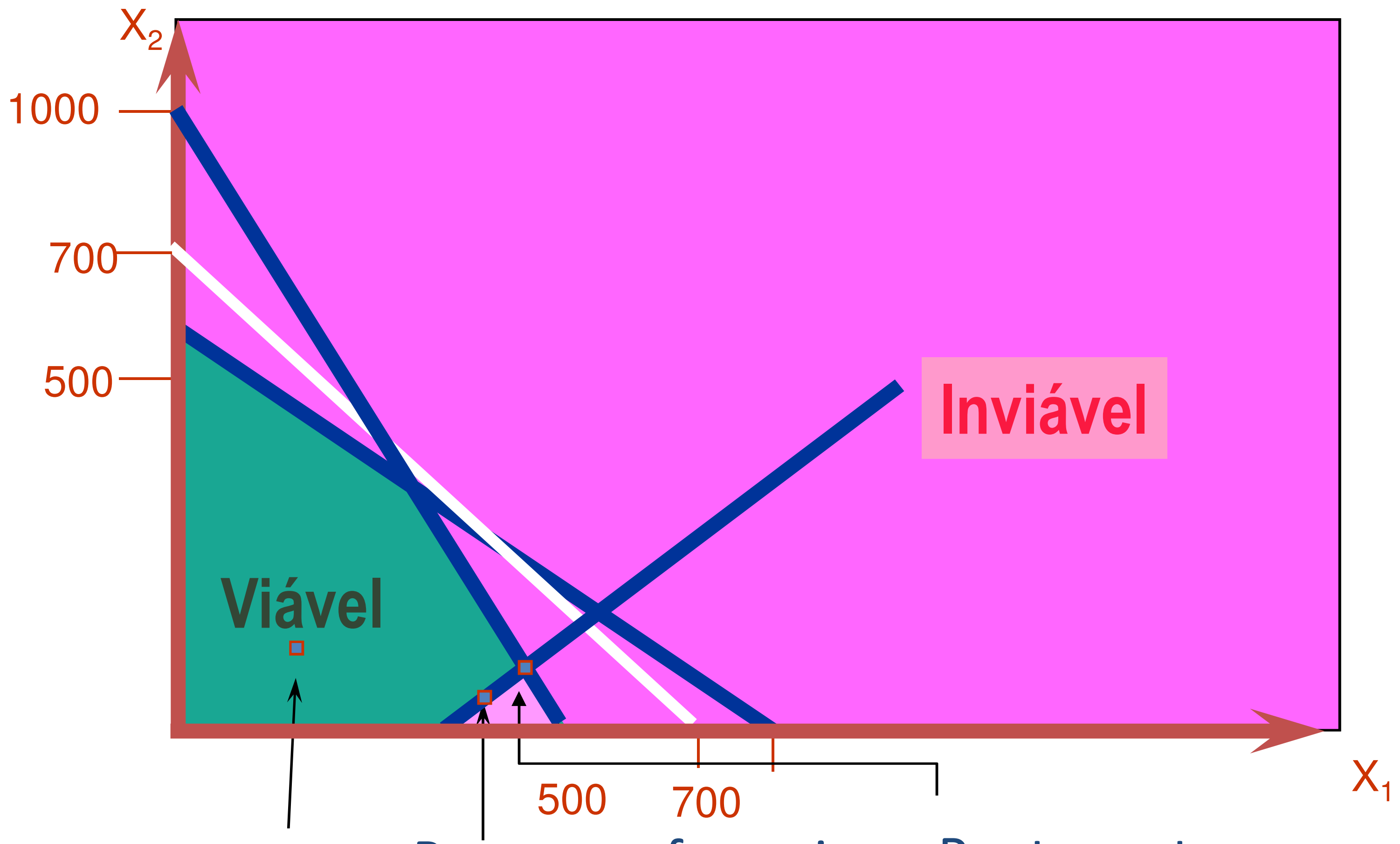
Resolução gráfica de modelos de PL



Resolução gráfica de modelos de PL



Resolução gráfica de modelos de PL



Pontos interiores. Pontos na fronteira. Pontos extremos.

Há três tipos de pontos viáveis.

Resolução gráfica de modelos de PL

2º Passo:

Observar que a função-objetivo, ao se fixar um valor para Z, representa uma reta. Alterações neste valor de Z gera uma família de retas paralelas.

No exemplo dos brinquedos: considere a reta obtida fazendo Z= 2000, isto é , a reta dada por $8X_1 + 5X_2 = 2000$. Percebe-se que ao se traçar retas paralelas no sentido de ficar mais afastado da origem (0, 0), o valor de Z aumenta.

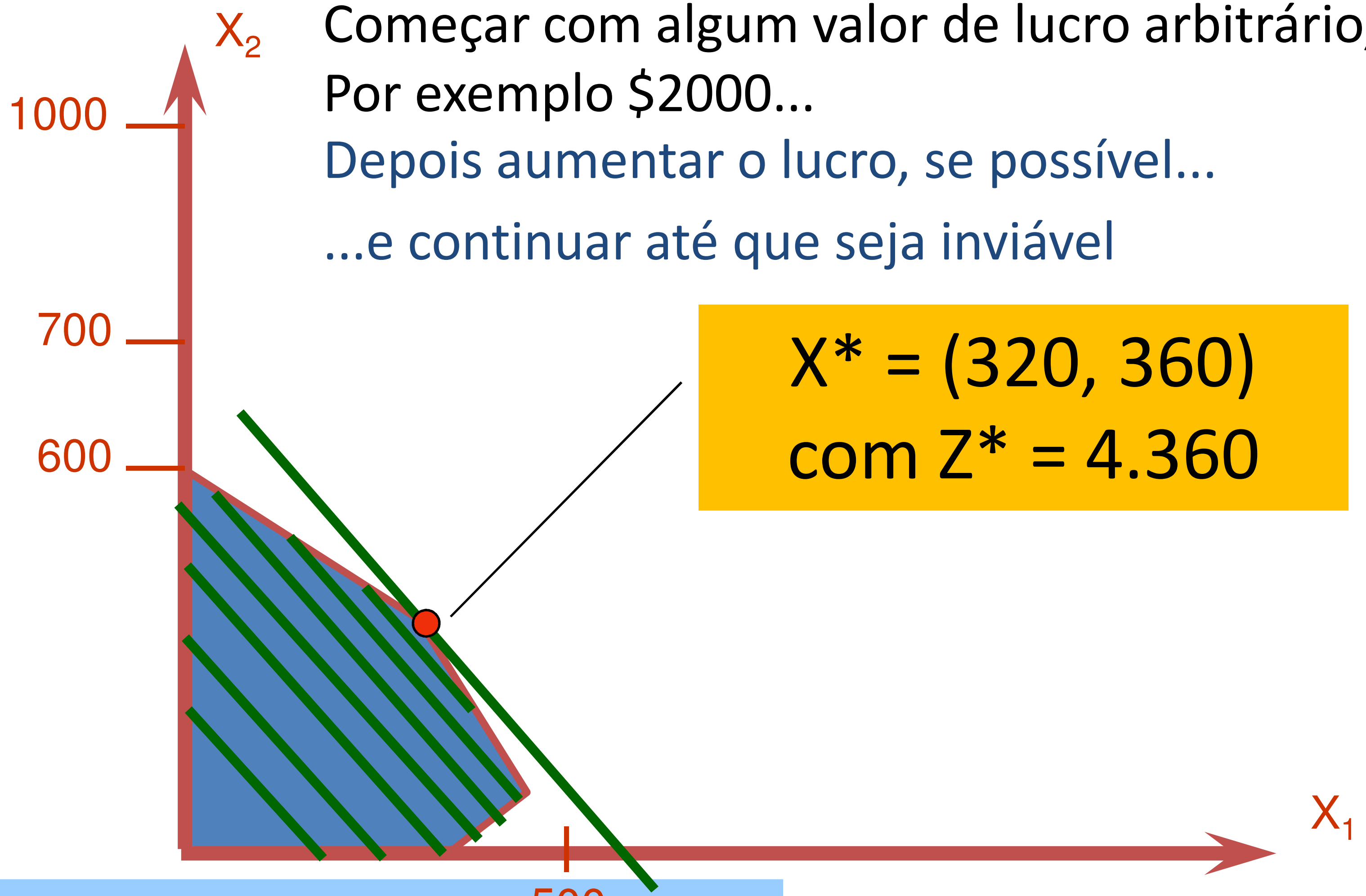
De fato pode-se verificar que a reta paralela, que contém algum ponto da região viável, no caso o ponto ótimo X* = (320, 360), e está mais afastada da origem, corresponde a um valor ótimo da função objetivo Z* = 4360.

Resolução gráfica de modelos de PL

A busca por uma Solução Ótima:

Começar com algum valor de lucro arbitrário,
Por exemplo $2000...
Depois aumentar o lucro, se possível...
...e continuar até que seja inviável

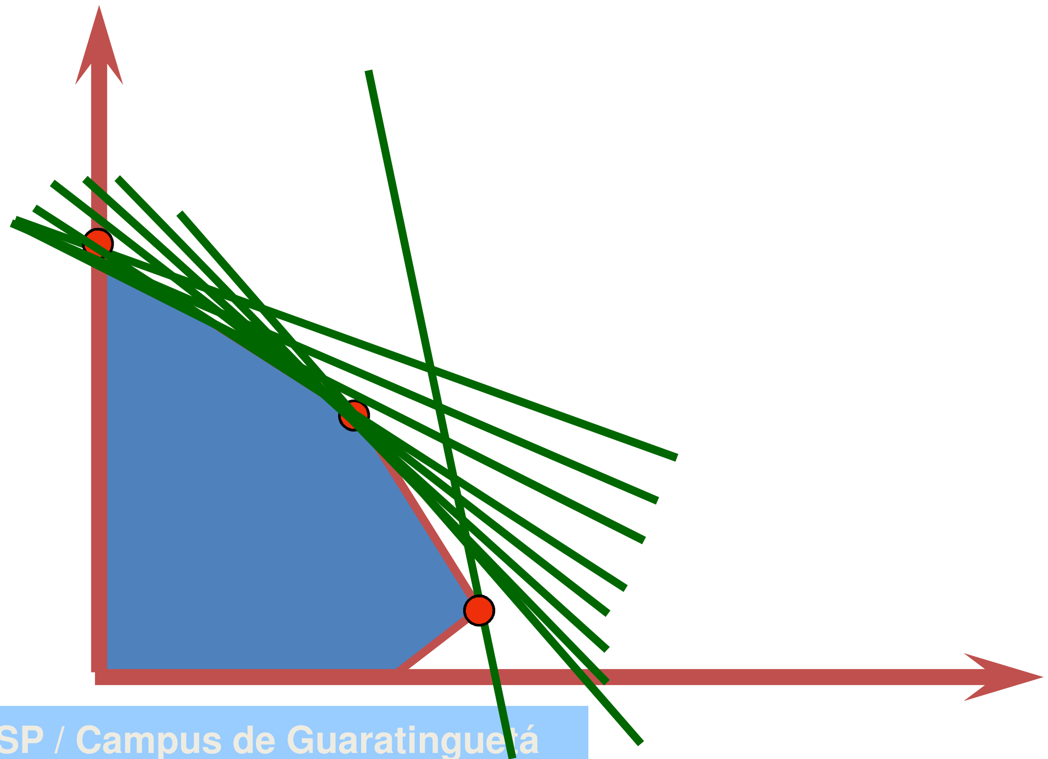
$X^* = (320, 360)$
com $Z^* = 4.360$



Resolução gráfica de modelos de PL

Pontos extremos e Soluções Ótimas

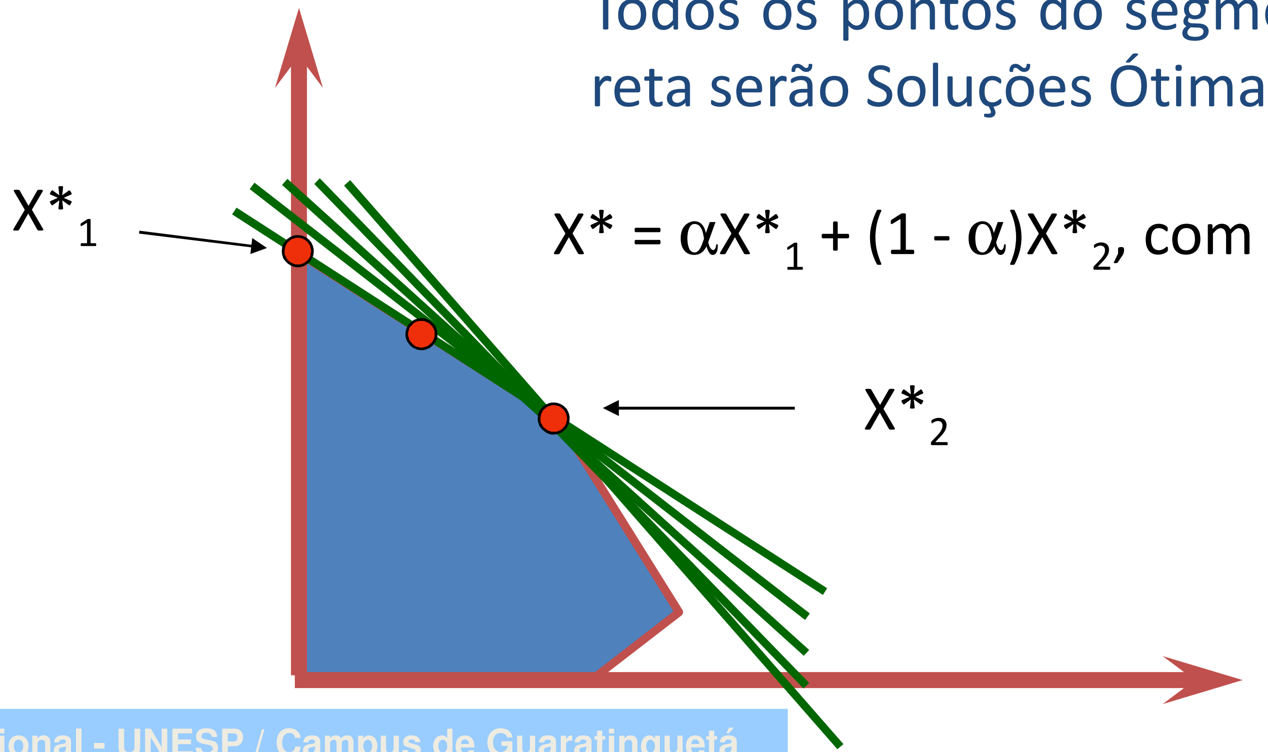
Se o problema de Programação Linear tem uma Solução Ótima, um ponto extremo é Solução Ótima.



Soluções Ótimas Múltiplas

Quando a função objetivo é paralela a alguma restrição.

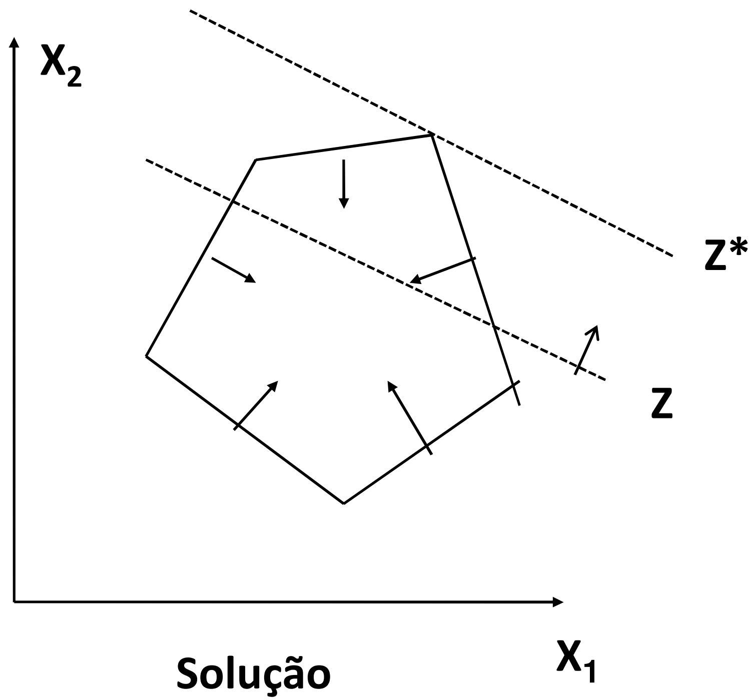
Todos os pontos do segmento de reta serão Soluções Ótimas.



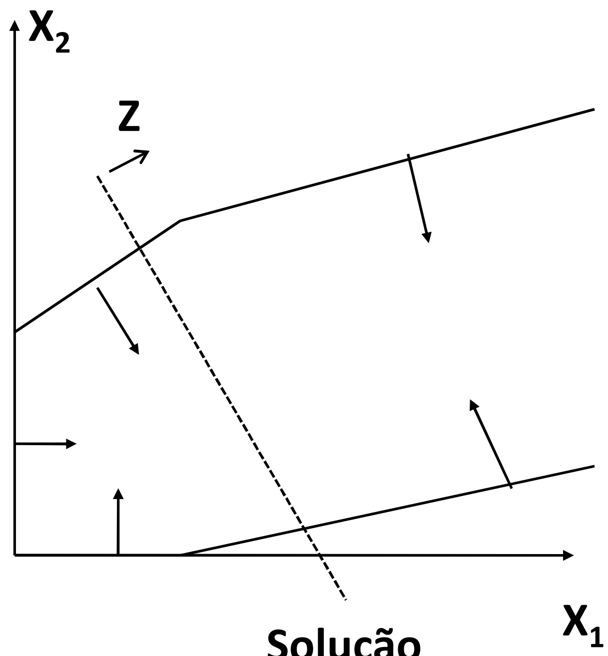
$X^* = \alpha X^*_1 + (1 - \alpha)X^*_2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$

Resolução gráfica de modelos de PL

Visualização de situações possíveis

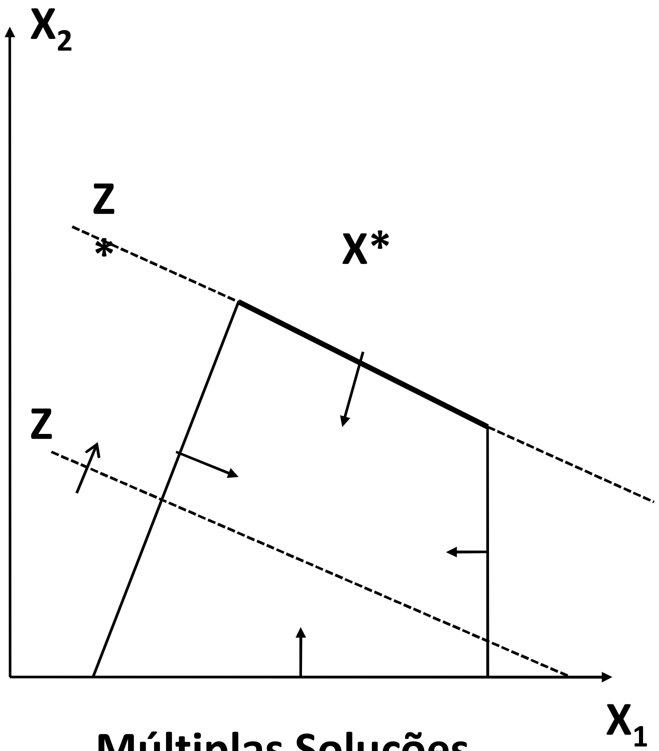


Solução
única

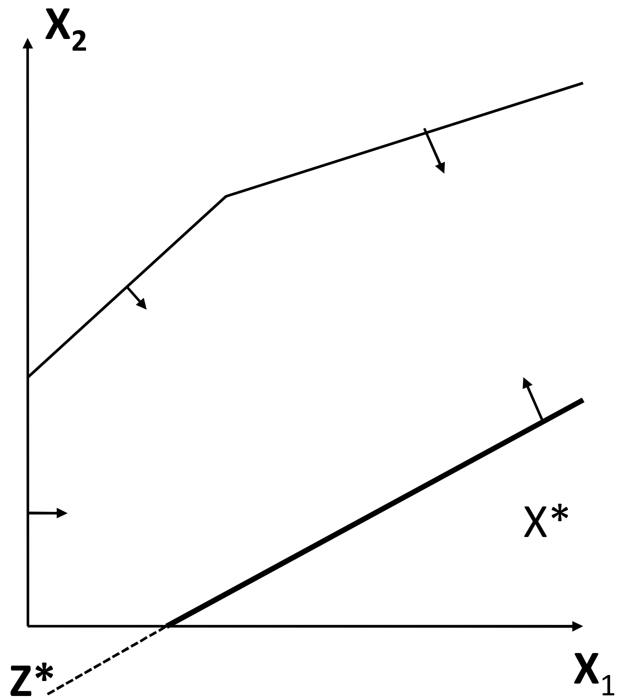


Solução
ilimitada

Resolução gráfica de modelos de PL

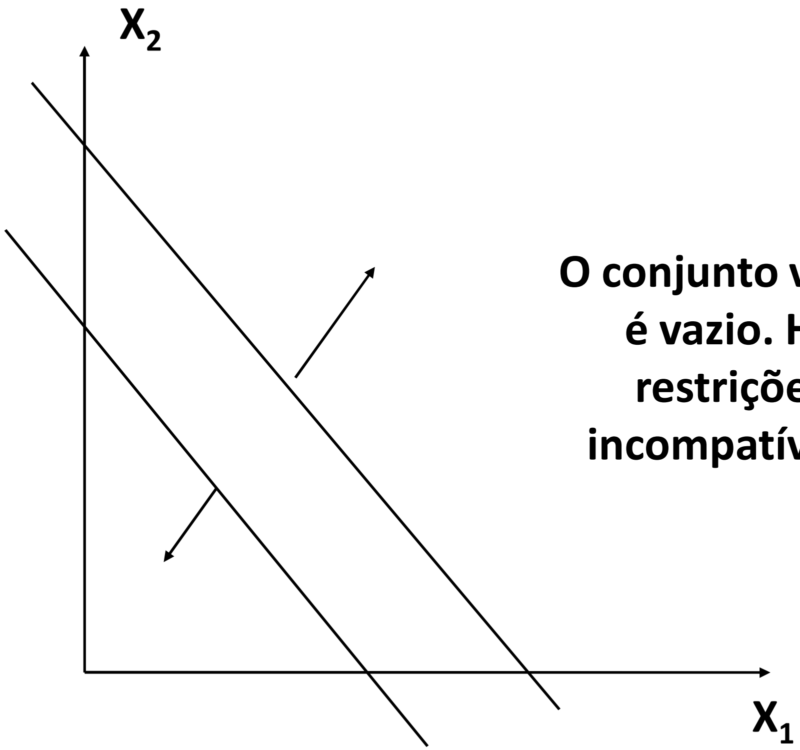


Múltiplas Soluções Ótimas 1 – Segmento de Reta Ótimo



Múltiplas Soluções Ótimas 2 Semi-reta Ótima

Resolução gráfica de modelos de PL



O conjunto viável é vazio. Há restrições incompatíveis.

⟹

Problema inviável