Estatística

7 - Distribuições Amostrais

Distribuição constituída de todos os valores de $\overline{x}$, considerando todas as possíveis amostras de tamanho "n"

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$$

Onde $X_1, X_2, ..., X_n$ são V.A. com mesma Distr. da V.A. X

Parâmetros da Distribuição da Média Amostral $\overline{x}$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \cdot [E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)]$$

$$E(\overline{x}) = \frac{1}{n} \cdot [E(X) + E(X) + \cdots + E(X)] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X)$$

$$\boxed{E(\overline{x}) = E(X) = \mu}$$

Sendo: $x_1, x_2, ..., x_n$ Variáveis Aleatórias Independentes:

$$Var(\overline{X}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot [Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)]$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot [Var(X) + Var(X) + \cdots + Var(X)] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X)$$

$$\boxed{Var(\overline{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}}$$

Distribuição da Média Amostral $\bar{X}$

Exemplo: População = {2,3,6,8,11}

Amostra de 2 (dois) elementos com reposição.

N = 5 n = 2

Amostras possíveis: 5^2 = 25 amostras

(2,2)	2,0	(2,3)	2,5	(2,6)	4,0	(2,8)	5,0	(2,11)	6,5
(3,2)	2,5	(3,3)	3,0	(3,6)	4,5	(3,8)	5,5	(3,11)	7,0
(6,2)	4,0	(6,3)	4,5	(6,6)	6,0	(6,8)	7,0	(6,11)	8,5
(8,2)	5,0	(8,3)	5,5	(8,6)	7,0	(8,8)	8,0	(8,11)	9,5
(11,2)	6,5	(11,3)	7,0	(11,6)	8,5	(11,8)	9,5	(11,11)	11,0

População:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6{,}0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \cdot \left[(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2\right]$$

$$\sigma^2 = 10{,}8$$

Amostra:

$$E(\bar{X}) = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n} = \frac{2{,}0 + 2{,}5 + \ldots + 11{,}0}{5^2} = \frac{150}{25} = 6{,}0 = \mu_X$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sum (\bar{x}_i - E(\bar{X}))^2}{N^n} = \frac{\sum (\bar{x}_i - 6{,}0)^2}{25}$$

$$Var(\bar{X}) = 5{,}40 = \frac{10{,}8}{2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Distribuição da Média Amostral $\bar{X}$

- **Amostragem com reposição**
- **População infinita: N > 20.n**
- **X_i: V.A. Independentes**

Então:

$$E(\bar{x}) = E(X) = \mu_X$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

- **Amostragem sem reposição**
- **População finita: N < 20 •n**
- **Xi: V.A. não Independentes**

Então:

$$E(\bar{x}) = E(X) = \mu_X$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma_X^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Onde: N $\rightarrow$ tamanho da população

n $\rightarrow$ tamanho da amostra

Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Exemplo: População = {2,3,6,8,11}

Amostra de 2 (dois) elementos sem reposição.

N = 5   n = 2

Amostras possíveis:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Amostras	$\overline{x}$
(2,3)	2,5
(2,6)	4,0
(2,8)	5,0
(2,11)	6,5
(3,6)	4,5
(3,8)	5,5
(3,11)	7,0
(6,8)	7,0
(6,11)	8,5
(8,11)	9,5

$$\Pr(\overline{X}_i) = \frac{1}{10} \quad \textit{para todo } x_i$$

$$\boxed{E(\overline{X}) = \sum \overline{X}_i \cdot \Pr(\overline{x}_i) = \frac{2{,}5 + 4{,}0 + \cdots + 9{,}5}{10} = 6{,}0}$$

$$Var(\overline{x}) = \sum (\overline{x}_i - \mu_{\overline{x}})^2 \cdot \Pr(\overline{x}_i)$$

$$Var(\overline{x}) = \frac{1}{10}\left[(2{,}5-6)^2 + (4{,}0-6)^2 + \ldots + (9{,}5-6)^2\right] = 4{,}05$$

$$\boxed{Var(\overline{x}) = \frac{\sigma_X^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{10{,}8}{2} \cdot \frac{5-2}{5-1} = 4{,}05}$$

Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Exemplo: Admite-se que a altura de 300 alunos do sexo masculino de uma dada Escola tem Distribuição Normal, com μ = 172,72 cm e σ = 7,62 cm.

Se forem obtidas 80 amostras de 25 alunos cada, quais serão a média e o desvio-padrão da Distribuição Amostral de $\overline{X}$?

- <u>Com reposição:</u> $E(\overline{X}) = \mu_X = 172{,}72$

$$DP(\overline{X}) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{7{,}62}{\sqrt{25}} = 1{,}524$$

Número de possíveis amostras: $(300)^{25} = 8{,}4 \times 10^{61}$

- <u>Sem reposição:</u> $E(\overline{X}) = \mu_X = 172{,}72$

Como: $(\mathrm{N} = 300) < (20 \times \mathrm{n} = 20 \times 25 = 500)$

então:

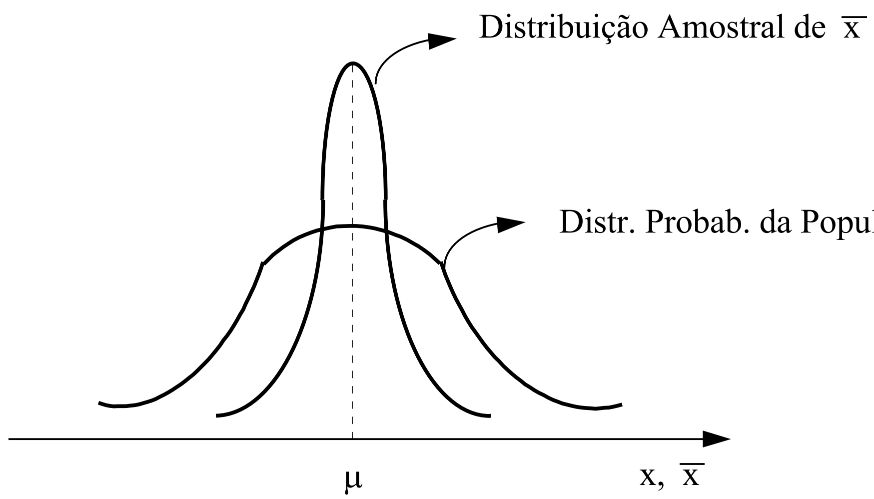
$$DP(\overline{X}) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{7{,}62}{\sqrt{25}} \sqrt{\frac{300-25}{300-1}} = 1{,}461$$

Número de possíveis amostras: $\binom{300}{25} = \frac{300!}{275! \times 25!} = 1{,}9 \times 10^{36}$

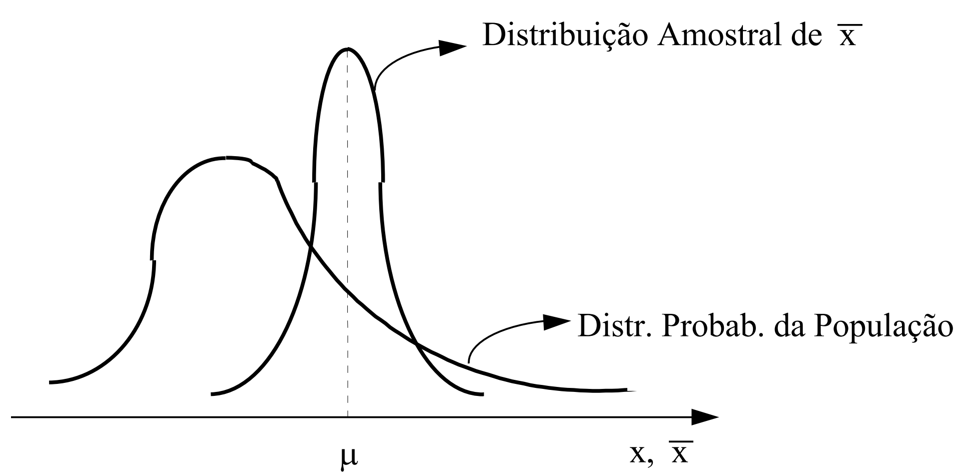
Distribuição da Média Amostral $\overline{x}$

Resultados importantes:

• Se a população for Normal então a Distribuição Amostral de $\overline{x}$ é Normal para qualquer tamanho da amostra, devido ao Teorema das Combinações Lineares de Variáveis Normais Independentes.



• Se a população não for Normal, mas a amostra for suficientemente grande então a Distribuição Amostral de $\overline{x}$ pode ser aproximada pela Normal, devido ao Teorema do Limite Central (no caso de população infinita) ou devido à consideração de amostragem com reposição.



Distribuição da Média Amostral $\bar{X}$

Exemplo: Admite-se que a altura de 300 alunos do sexo masculino de uma dada Escola tem Distribuição Normal, com μ = 172,72 cm e σ = 7,62 cm. Considere que foram obtidas 80 amostras de 25 alunos cada.

Em quantas amostras pode-se esperar que a média se encontre entre 169,67 e 173,48 cm?

$$Logo: \quad \Pr(169{,}67 \le \bar{X} \le 173{,}48) = ?$$

Do *slide* 6, tem-se (sem reposição):

$$\boxed{\bar{x} \longrightarrow Normal(E(\bar{X}) = 172{,}72;\;\; Var(\bar{X}) = 1{,}461^2)}$$

$$\Pr(169{,}67 \le \bar{X} \le 173{,}48) = \Pr\left(\frac{169{,}67 - 172{,}72}{1{,}461} \le Z \le \frac{173{,}48 - 172{,}72}{1{,}461}\right) =$$

$$= \Pr(-2{,}09 \le Z \le 0{,}52) =$$

$$= \Pr(0 \le Z \le 2{,}09) + \Pr(0 \le Z \le 0{,}52) =$$

$$= 0{,}4817 + 0{,}1985 = 0{,}6802$$

Resp.: espera-se que em 80 x 0,6802 = 54 amostras, a média se encontre entre 169,67 e 173,48 cm

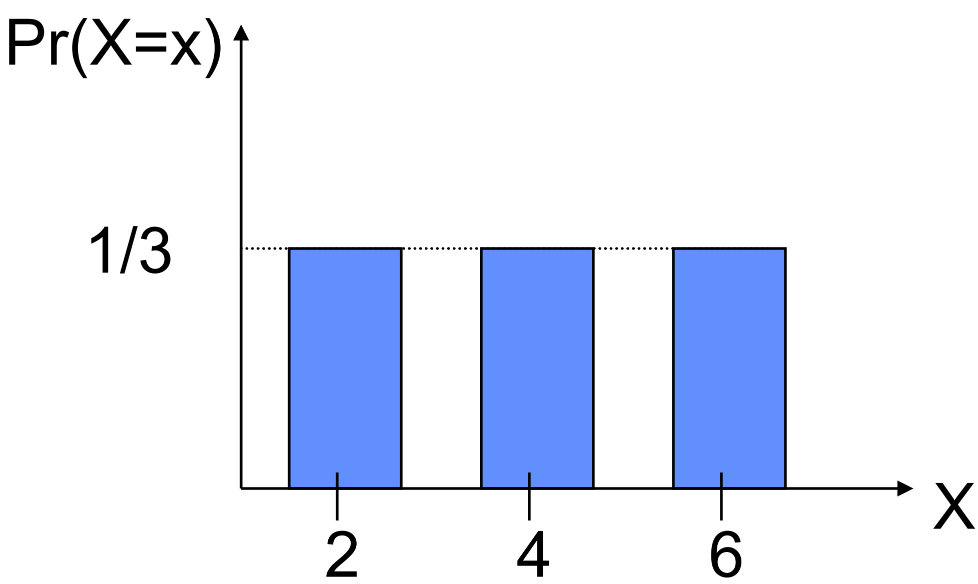
Exemplo: Uma urna contém <u>muitas</u> fichas numeradas: um terço com o número 2, um terço com 4 e um terço com 6.

X: número de uma ficha retirada ao acaso

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot(2+4+6) = 4$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 =$$

$$Var(X) = (2^2\cdot\frac{1}{3} + 4^2\cdot\frac{1}{3} + 6^2\cdot\frac{1}{3}) - \left(4\right)^2 = \frac{8}{3} = 2{,}66$$



Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Continuação do exemplo da urna com fichas: 2, 4, 6

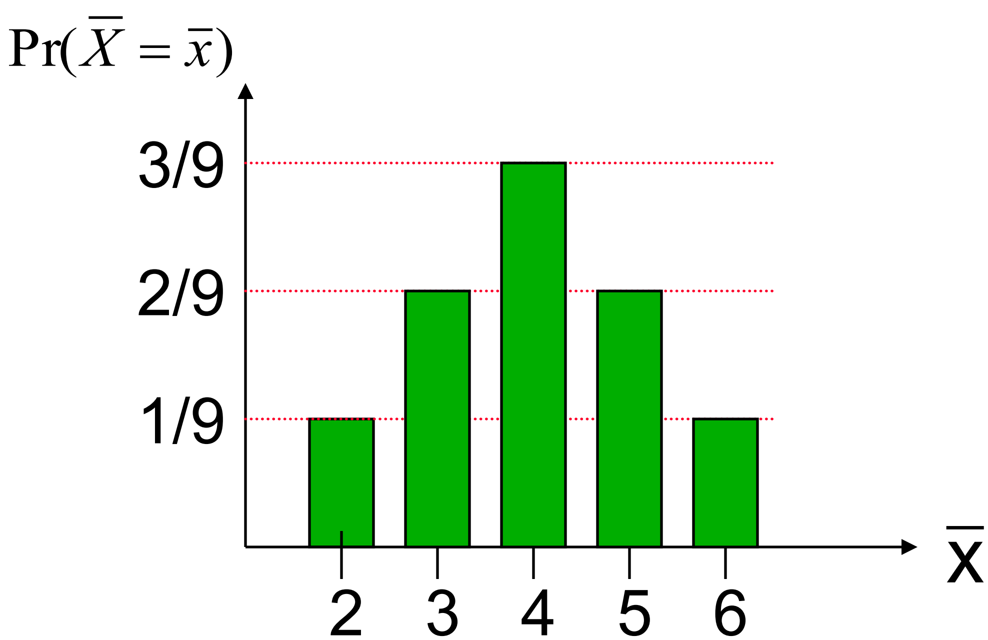
Extrair amostra de tamanho 2:

Número de diferentes amostras = 3^2 = 9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2,2)	(2,4)	(2,6)	(4,2)	(4,4)	(4,6)	(6,2)	(6,4)	(6,6)
$\bar{x}$	2	3	4	3	4	5	4	5	6

$$\boxed{E(\overline{X}) = 2\cdot\frac{1}{9} + 3\cdot\frac{2}{9} + 4\cdot\frac{3}{9} + 5\cdot\frac{2}{9} + 6\cdot\frac{1}{9} = \frac{36}{9} = 4 = \mu_X}$$

$$\boxed{Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{2,66}{2} = 1,33}$$



Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Continuação do exemplo da urna com fichas: 2, 4, 6

Extrair amostra de tamanho 5:

Número de diferentes amostras = $3^5 = 243$

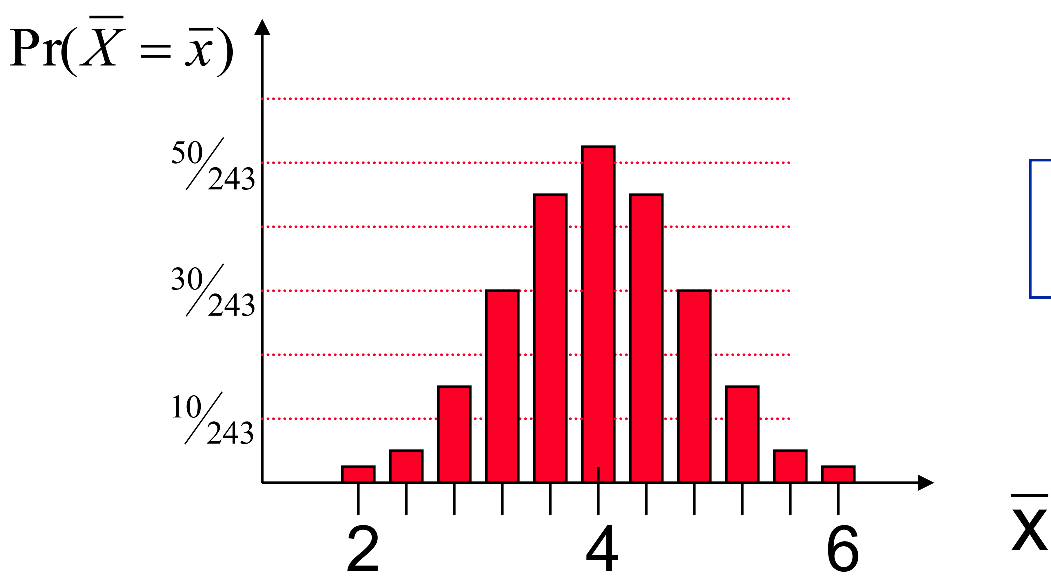
X_i: número de vezes que a ficha "i" saiu na amostra de tamanho 5

$$\boxed{\overline{X} = \frac{2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_4 + 6 \cdot X_6}{5}}$$

$$E(\overline{X}) = \mu_X = 4 \qquad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{5} = \frac{2{,}66}{5} = 0{,}53$$

X_i: Multinomial (Polinomial)

$$\boxed{\Pr(X_2 = x_2;\ X_4 = x_4;\ X_6 = x_6) = \frac{5!}{x_2! \cdot x_4! \cdot x_6!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x6}}$$



Cálculos no próximo slide

Distribuição da Média Amostral $\bar{X}$

Continuação do exemplo da urna com fichas: 2, 4, 6

Distribuição da Média Amostral (n=5)

$$\Pr(X_2 = x_2;\ X_4 = x_4;\ X_6 = x_6) = \frac{5!}{x_2! \cdot x_4! \cdot x_6!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x6}$$

X_2	X_4	X_6	$\sum i \cdot X_i$	$\bar{X}$	Prob.
5	0	0	10	2	1/243
4	1	0	12	2,4	5/243
4	0	1	14	2,8	5/243
3	2	0	14	2,8	10/243
3	1	1	16	3,2	20/243
3	0	2	18	3,6	10/243
2	3	0	16	3,2	10/243
2	2	1	18	3,6	30/243
2	1	2	20	4	30/244
2	0	3	22	4,4	10/243
1	4	0	18	3,6	5/243
1	3	1	20	4	20/243
1	2	2	22	4,4	30/244
1	1	3	24	4,8	20/243
1	0	4	26	5,2	5/243
0	5	0	20	4	1/243
0	4	1	22	4,4	5/243
0	3	2	24	4,8	10/243
0	2	3	26	5,2	10/243
0	1	4	28	5,6	5/243
0	0	5	30	6	1/243

$\bar{X}$	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
Prob.	1/243	5/243	15/243	30/243	45/243	51/243	45/243	30/243	15/243	5/243	1/243

Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Continuação do exemplo da urna com fichas: 2, 4, 6

<u>Extrair amostra de tamanho 10:</u> N^o. de amostras = 3^{10} = 59.049

X_i: número de vezes que a ficha "i" saiu na amostra de tamanho 10

$$\boxed{\overline{X} = \frac{2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_4 + 6 \cdot X_6}{10}}$$

$$E(\overline{X}) = \mu_X = 4$$

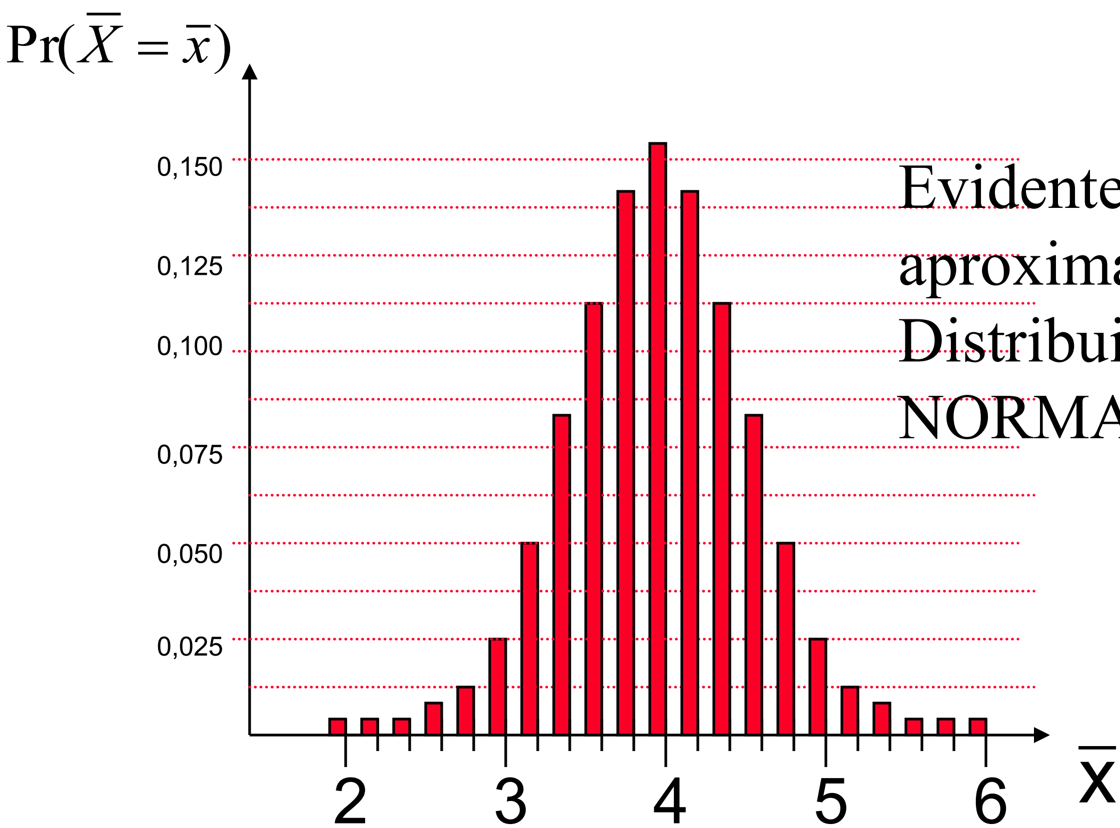
X_i: Multinomial (Polinomial)

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{10} = \frac{2{,}66}{10} = 0{,}266$$

$$\boxed{\Pr(X_2 = x_2;\ \ X_4 = x_4;\ \ X_6 = x_6) = \frac{10!}{x_2!\cdot x_4!\cdot x_6!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x6}}$$

Distribuição de Probabilidade de $\overline{X}$

2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	
0,00002	0,00017	0,00093	0,00356	0,01042	0,02459	0,04827	0,08027	0,11457	0,14141	
4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0
0,15162	0,14141	0,11457	0,08027	0,04827	0,02459	0,01042	0,00356	0,00093	0,00017	0,00002



Distribuição da Freqüência Amostral f

f : freqüência absoluta com que foi observada alguma característica em cada elemento de uma amostra de tamanho “n”

SUCESSO: quando a característica foi observada
FRACASSO: caso contrário

Seja: p = Prob. de Sucesso em cada elemento da amostra

q = Prob. de Fracasso

Amostragem <u>com</u> reposição:

f tem Distribuição Binomial

$$E(f) = np$$

$$Var(f) = npq$$

Amostragem <u>sem</u> reposição:

f tem Distribuição Hipergeométrica

$$E(f) = np$$

$$Var(f) = npq \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Distribuição da Freqüência Amostral *f*

Amostras suficientemente grandes, garantem que a Distribuição de *f* (Binomial ou Hipergeométrica) pode ser aproximada pela Distribuição Normal

Em termos práticos:

- $n.p \geq 5$ $n.q \geq 5$ N > 20 x n

garantem uma boa aproximação pela

$$Normal(E(f_{Normal}) = np;\ \ Var(f_{Normal}) = npq)$$

- $n.p \geq 5$ $n.q \geq 5$ N < 20 x n

garantem uma boa aproximação pela

$$Normal(E(f_{Normal}) = np;\ \ Var(f_{Normal}) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1})$$

Distribuição da Freqüência Amostral f

Exemplo: Verificou-se que 2% das peças produzidas por certa máquina são defeituosas.

Qual a Prob. de existirem no máximo 3% de peças defeituosas num lote com 400 peças?

$$\boxed{\Pr(f \leq 400 \times 3\%) = \Pr(f \leq 12) = ?}$$

p = 2%   n = 400   n.p = 8 **> 5**   n.q = 392 **> 5**

$$f \text{ (Binomial)} \longrightarrow \text{Aprox. pela Normal}$$

$$\boxed{\Pr(f \leq 12) \cong \Pr(f_{Normal} \leq 12{,}5)}$$

$$E(f) = np = 400 \times 0{,}02 = 8$$

$$DP(f) = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0{,}02 \times 0{,}98} = \sqrt{7{,}84} = 2{,}8$$

$$\boxed{\Pr(f_{Normal} \leq 12{,}5) = \Pr(Z \leq \frac{12{,}5 - 8}{2{,}8}) = \Pr(Z \leq 1{,}60) =}$$

$$\boxed{= \Pr(Z < 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 1{,}60) = 0{,}5 + 0{,}4452 = 0{,}9452}$$

Distribuição da Freqüência Amostral f

Exemplo: Uma Pesquisa Eleitoral mostrou que certo candidato receberá 46% dos votos.

Qual a Prob. de 200 votantes, escolhidos ao acaso, apresentar a maioria dos votos em favor deste candidato?

$$\boxed{\Pr(f > 200 \times 50\%) = \Pr(f > 100) = ?}$$

p = 46% ; n = 200 ; n.p = 92 **> 5**   n.q = 108 **> 5**

$$f \text{ (Binomial)} \longrightarrow \text{Aprox. pela Normal}$$

$$\boxed{\Pr(f > 100) \cong \Pr(f_{Normal} \geq 100{,}5)}$$

$$E(f) = np = 200 \times 0{,}46 = 92$$

$$DP(f) = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times 0{,}46 \times 0{,}54} = \sqrt{49{,}68} = 7{,}04$$

$$\boxed{\Pr(f_{Normal} \geq 100{,}5) = \Pr(Z \geq \frac{100{,}5 - 92}{7{,}04}) = P(Z \geq 1{,}21) =}$$

$$\boxed{= \Pr(Z > 0) - \Pr(0 \leq Z \leq 1{,}21) = 0{,}5 - 0{,}3869 = 0{,}1131}$$

Distribuição da Freqüência Amostral f

Exemplo: Uma Pesquisa Eleitoral mostrou que certo candidato receberá 46% dos votos.

Qual deveria ser o tamanho da amostra de votantes para garantir, com uma Prob. de 95% que tal candidato tenha no mínimo 120 votos?

Determinar "n" tal que: $\boxed{\Pr(f \geq 120) = 95\%}$

p = 46% n = ? Considere: np>5 nq>5 N>20n

Logo: $f \longrightarrow$ Aprox. pela Normal$(np; npq)$

$$\boxed{\Pr(f \geq 120) \cong \Pr(f_{Normal} \geq 119{,}5) = 0{,}95}$$

$$E(f) = np = n \cdot 0{,}46$$

$$DP(f) = \sqrt{npq} = \sqrt{n \times 0{,}46 \times 0{,}54} = \sqrt{n \times 0{,}2484}$$

$$\boxed{\Pr(f_{Normal} \geq 119{,}5) = \Pr\left(Z \geq \frac{119{,}5 - n \cdot 0{,}46}{\sqrt{n \cdot 0{,}2484}}\right) = 0{,}95}$$

Portanto, da Tabela Normal: $\boxed{\dfrac{119{,}5 - \mathrm{n} \cdot 0{,}46}{\sqrt{\mathrm{n} \cdot 0{,}2484}} = -1{,}65}$

Resolvendo esta equação, tem-se:

n=232 p/ Z=1,65 $\boxed{\text{n=290 p/ Z=-1,65}}$

Distribuição da Freqüência Amostral Relativa *p'*

p' : freqüência relativa com que foi observada alguma característica numa amostra de tamanho "n"

$$\boxed{p' = \frac{f}{n}}$$

Amostragem com reposição:

$$E(p') = E\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(f) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$$Var(p') = Var\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(f) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}$$

Amostragem sem reposição:

$$E(p') = E\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(f) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$$Var(p') = Var\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(f) = \frac{1}{n^2} \cdot npq \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{pq}{n} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Distribuição da Variância Amostral s^2

$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

A Distribuição de s_X^2 está relacionada com a importante Distribuição χ_ν^2 (QUI-QUADRADO):

$$\chi_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{x_i - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} z_i^2$$

Distribuição χ^2: Qui-Quadrado

Sejam x_i:

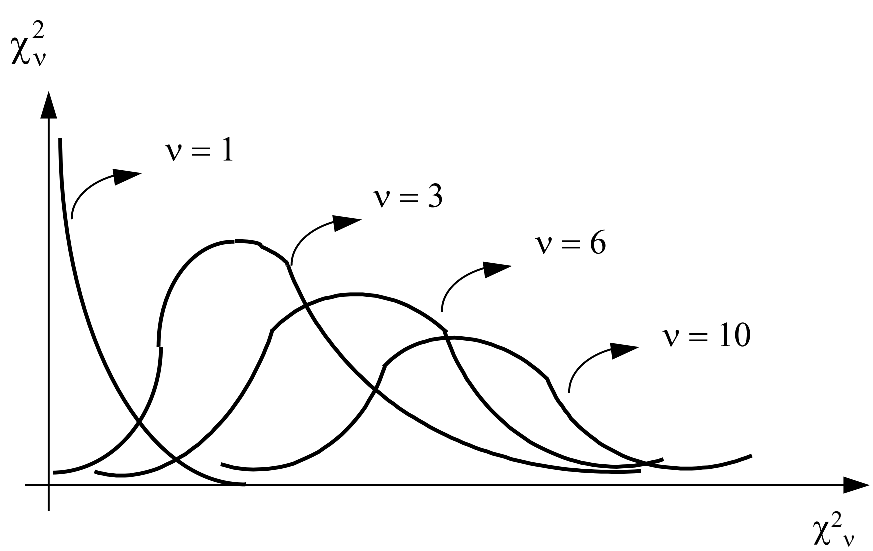
- valores aleatórios independentes
- retirados de uma população Normal (μ , σ^2)

Então:

$$\boxed{\chi_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} z_i^2}$$

tem Distribuição Qui-Quadrada com ν Graus de Liberdade.

χ_ν^2 : soma dos quadrados de ν valores independentes de variável Normal Reduzida



Distribuição χ^2:   Qui-Quadrado

Tabela distribuição Qui-Quadrado

Tabela A6.2 Distribuições χ^2 — valores de $\chi^2_{\nu,P}$, onde $P = P(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\nu,P})$

ν \ P	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	ν
1	$0{,}0^4393$	$0{,}0^3157$	$0{,}0^3982$	0,00393	0,0158	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	1
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	2
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	4
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	5
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	6
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	7
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	8
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	9
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	10
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	11
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	32,909	12
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	13
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	14
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,036	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	15
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	16
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	17
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	43,312	18
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	19
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	20
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	21
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	22
23	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728	23
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	22,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42 980	45,558	51,179	24
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620	25
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,434	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	26
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	27
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	28
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,302	29
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	30
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	40
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661	50
60	35,535	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607	60

Propriedades da Distribuição χ^2

$$E\left(\chi_\nu^2\right) = \nu$$

$$Var(\chi_\nu^2) = 2 \cdot \nu$$

$$\mathrm{Mo}(\chi_\nu^2) = \nu - 2 \qquad \text{(Moda)}$$

$\chi_\nu^2 \rightarrow$ Normal quando $\nu \rightarrow \infty$ (Teorema do Limite Central)

$\chi_{\nu_1}^2$, $\chi_{\nu_2}^2$: independentes $\Rightarrow \chi_{\nu_1}^2 + \chi_{\nu_2}^2 = \chi_{\nu_1+\nu_2}^2$

Distr. χ_ν^2 tabelada: $\Pr(\chi_\nu^2 \geq \chi_{\nu,P}^2) = P$

<u>Exemplo</u>: P = 10% $\nu = 3$

Tabela: linha ($\nu = 3$) coluna (P = 10%)

tem-se: $\chi_{\nu,\mathrm{P}}^2 = 6{,}251$

<u>Significa</u>: Probabilidade de um valor aleatório da variável χ_ν^2 ser maior do que 6,251 é 10%

Distribuição da Variância Amostral s^2

Mostra-se que:

$$\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 \text{ tem Distribuição } \chi^2_\nu$$

Logo:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{n-1}{\sigma^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{n-1}{\sigma^2}\cdot s_x^2$$

Portanto:

$$\boxed{s_x^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\chi^2_{n-1}}$$

$$\boxed{E(s_x^2) = \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot E(\chi^2_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot(n-1) = \sigma^2}$$

$$\boxed{Var(s_x^2) = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2\cdot Var(\chi^2_{n-1}) = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2\cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}}$$

Distribuição da Variância Amostral s^2

Exemplo: Retirada uma amostra de 11 elementos, ao acaso, obteve-se $s^2(x) = 7{,}08$. Determinar um intervalo que contenha a variância da população σ^2 com 90% de probabilidade.

$$\boxed{\Pr(a \le \sigma^2 \le b) = 0{,}90}$$

$$\boxed{s_x^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \cdot \chi^2_{n-1}} \Longrightarrow \sigma^2 = \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}} \cdot (n-1) = \frac{7{,}08 \cdot (11-1)}{\chi^2_{n-1}} = \frac{70{,}8}{\chi^2_{n-1}}$$

$$\therefore \quad \Pr\left(a \le \frac{70{,}8}{\chi^2_{n-1}} \le b\right) = 0{,}90 \Longrightarrow \Pr\left(\frac{70{,}8}{b} \le \chi^2_{n-1} \le \frac{70{,}8}{a}\right) = 0{,}90$$

Tabela: $\chi^2_{n-1} \Longrightarrow \Pr(3{,}940 \le \chi^2_{n-1} \le 18{,}307) = 0{,}90$

$$\therefore \quad \frac{70{,}8}{b} = 3{,}940 \Longrightarrow b = 17{,}92$$

$$\therefore \quad \frac{70{,}8}{a} = 18{,}307 \Longrightarrow a = 3{,}83$$

$$\boxed{\Pr(3{,}83 \le \sigma^2 \le 17{,}92) = 0{,}90}$$

Distribuição *t* - *Student*

A partir de uma amostra aleatória de n valores retirados de uma população $N(\mu, \sigma^2)$, obtêm-se a estatística:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad z \to N(0, 1), \qquad E(\bar{X}) = \mu \qquad DP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Substituindo-se σ (desconhecido) por s_x :

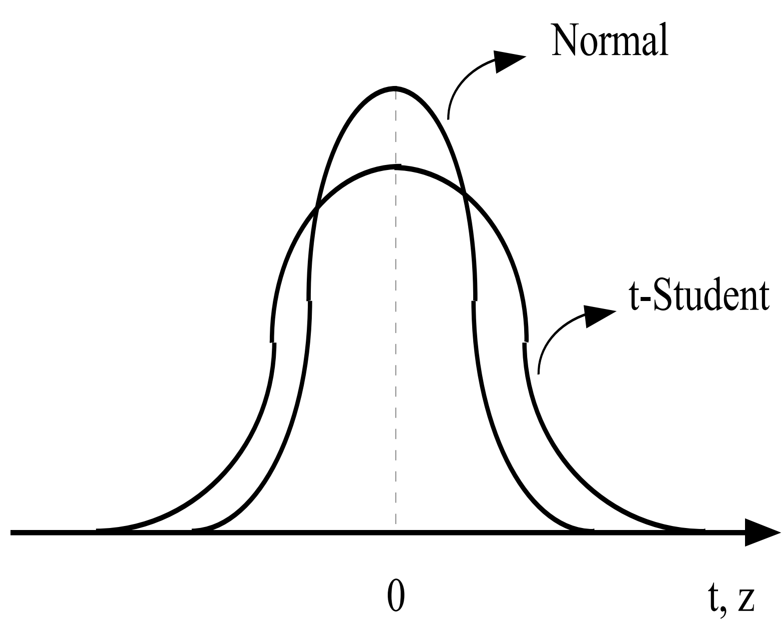
$$\boxed{\frac{\bar{x} - \mu}{s(x) / \sqrt{n}} = t_{n-1}} \qquad (\text{ t - Student com } \nu = n\text{-}1)$$

$$E(t_{n-1}) = 0 \qquad \boxed{n \to \infty, \quad s(x) \to \sigma \quad \therefore \quad t \to N(0,1)}$$

$$\boxed{t_{n-1} = z \cdot \frac{\sigma}{s_x}}$$

$$\boxed{t_{n-1} = z \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1}}}}$$

$$\boxed{t_{n-1} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}$$



Distribuição *t* - *Student*

Tabela da distribuição t -Student

Tabela A6.3 Distribuições t de Student — valores de $t_{\nu,P}$, onde $P = P(t_\nu \geq t_{\nu,P})$

ν	P				
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
120	1,289	1,657	1,980	2,351	2,618
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Distribuição t - *Student*

Exemplo: Retirada uma amostra aleatória de tamanho 4, de uma população Normal, obteve-se: $\bar{x} = 8{,}2$ $\quad s_x = 0{,}4$

Determinar um intervalo que tenha a probabilidade de 99% de conter a média μ da população: $Pr(a \le \mu \le b) = 0{,}99$

$\bar{x} \rightarrow Normal(\mu,\ \sigma^2/n)$

Seja $Pr(\mu - e_0 \le \bar{x} \le \mu + e_0) = 0{,}99$ (*)

$\Rightarrow P(\bar{x} - e_0 \le \mu \le \bar{x} + e_0) = 0{,}99 \Rightarrow$ $\boxed{a = \bar{x} - e_0}$ $\boxed{b = \bar{x} + e_0}$

De (*):

$$Pr\left(\frac{\mu - e_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z \le \frac{\mu + e_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow Pr\left(\frac{-e_0 \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \le Z \le \frac{e_0 \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \frac{e_0 \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = z_{0,5\%}$$

$$\Rightarrow e_0 = z_{0,5\%} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left(z_{0,5\%} \cdot \frac{\sigma}{s_x}\right) \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \left(t_{n-1,\ 0,5\%}\right) \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Tabela: $t_{n-1=3,\ 0,5\%} = 5{,}841 \Rightarrow e_0 = 5{,}841 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{4}} = 1{,}168$

$\boxed{a = \bar{x} - e_0 = 8{,}2 - 1{,}168 = 7{,}032}$

$\boxed{b = \bar{x} + e_0 = 8{,}2 + 1{,}168 = 9{,}368}$

$$\boxed{Pr(\ 7{,}032 \le \mu \le 9{,}368\ ) = 0{,}99}$$

Distribuição da Razão entre Variâncias Amostrais

Sejam 2 amostras independentes, de tamanhos n_1 e n_2, retiradas de populações Normais e considere suas variâncias amostrais : $s_1^2 \quad s_2^2$

Deseja-se conhecer a Distribuição de: $\boxed{s_1^2 / s_2^2}$

Caso as Populações tenham a mesma variância:

$$\boxed{s_1^2 / s_2^2 \rightarrow \text{Distr. F de Snedecor}(n_1 - 1,\ n_2 - 1)}$$

(valores da Distr. F de Snedecor: TABELADOS)

$$\boxed{F_{n_1-1;n_2-1} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\dfrac{\sigma^2}{n_1-1}\cdot\chi^2_{n_1-1}}{\dfrac{\sigma^2}{n_2-1}\cdot\chi^2_{n_2-1}} = \frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}}$$

onde: $\nu_1 = n_1 - 1 \qquad \nu_2 = n_2 - 1$

Tabela da distribuição F de Snedecor – (p=0,01)

Tabela A.4 *(continuação)* $P = 0{,}01$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5 000	5403	5625	5764	5859	5928	5928	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	9339	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,69	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	3,75	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,23	7,06	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,82	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	1,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,72	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,86	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Tabela da distribuição F de Snedecor – (p=0,05)

Tabela A.4 *(continuação)* $P = 0{,}05$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Tabela da distribuição F de Snedecor – (p=0,1)

Tabela A.4 Distribuições F de Snedecor — valores de $F_{\nu_1,\nu_2,P}$, onde $P = P(F_{\nu_1,\nu_2} \geq F_{\nu_1,\nu_2,P})$; $P = 0.10$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Distribuição da Razão entre Variâncias Amostrais

Exemplo: Considere 2 populações Normais com mesma variância, das quais são retiradas amostras de tamanhos n_1=25 e n_2=30. Calcule a prob. da variância da amostra 1 ser maior do que o dobro da variância da amostra 2.

Pergunta: $\boxed{\Pr(\frac{s_1^2}{s_2^2} > 2) = ?}$

$$\Pr(\frac{s_1^2}{s_2^2} > 2) = \Pr(F_{\nu_1;\nu_2} > 2) = \Pr(F_{25-1;\,30-1} > 2)$$

Da Tabela:

$$\begin{cases} \Pr(F_{24;\;29} > 1{,}90) = 0{,}05 \\ \Pr(F_{24;\;29} > 2{,}15) = 0{,}025 \end{cases}$$

Logo:

$$\Pr(\frac{s_1^2}{s_2^2} > 2) = 0{,}05 - \frac{2-1.90}{2{,}15-1{,}90}\cdot(0{,}05-0{,}025)$$

$$\boxed{\Pr(\frac{s_1^2}{s_2^2} > 2) = 0{,}04}$$

Exercício 7.1

Uma usina de concreto, preocupada com a variabilidade da resistência à compressão de seu produto, coletou os seguintes dados obtidos de uma amostra aleatória de 8 corpos de prova:

									TOTAL
x_i	80,5	78,4	91,7	85,9	84,3	76,1	89,4	94,2	680,5
$(x_i-\bar{x})^2$	20,79	44,36	44,09	0,71	0,58	80,28	18,84	83,54	293,18

a) Qual é a probabilidade da Média da resistência à compressão do concreto produzido pela usina ser menor do que 80,0.

b) Qual é a probabilidade do Desvio-padrão da resistência à compressão do concreto produzido pela usina ser maior do que 12.

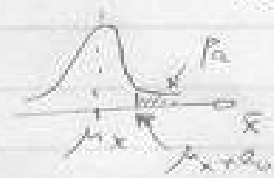
c) A partir dos resultados obtidos nos itens acima, o que se pode concluir acerca da probabilidade do Coeficiente de Variação da resistência à compressão do concreto produzido pela usina ser maior do que 15%.

a) Seja X: resistência à compressão

$P(\mu_x < 80,0) = p_a$ (1) onde p_a é a incógnita

Considerando que X tem Distr. Normal, então $\bar{X} \rightarrow$ Distr. Normal com $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ e $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$ c/ n=8

Seja $\bar{X}$ tal que $P(\bar{X} > \mu_x + e_0) = p_a$



$\therefore P(\mu_x < \bar{x} - e_0) = p_a$ (2)

De (1) e (2), tem-se:

$\bar{x} - e_0 = 80,0 \Rightarrow e_0 = \bar{x} - 80,0$

No caso: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{680,5}{8} = 85,06 \Rightarrow e_0 = 85,06 - 80,0 = 5,06$

Sabe-se que: $e_0 = (t_{n-1;\, p_a}) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

No caso $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{293,18}{7} = 41,88$

$s = \frac{1}{c}\sqrt{s^2} = \frac{1}{0,9594}\sqrt{41,88} = 6,74$

$\therefore 5,06 = (t_{7;\, p_a}) \cdot \frac{6,74}{\sqrt{8}} \Rightarrow (t_{7;\, p_a}) = 2,12$

Da Tab. t-Student: interpolando

$t_{7;\,5\%} = 1,895$
$t_{7;\,2,5\%} = 2,365$
$\Rightarrow p_a = 2,5\% + (2,36 - 2,12)\frac{(5\% - 2,5\%)}{(2,365 - 1,895)} = 3,8\%$

Exercício 7.1 – Continuação

b) $P(\sigma_x > 12) = p_b$ (3), onde p_b é a incógnita

Sabe-se que:

$$\sigma_x^2 = \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}}$$

Substituindo em (3), tem-se

$$P\left(\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}}} > 12\right) = p_b \;\therefore\; P\left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}} > 144\right) = p_b$$

No caso: $s^2 = 41,88 \qquad n = 8$

$$\therefore P\left(\chi^2_7 < \frac{41,88 \times 7}{144}\right) = p_b$$

$$P(\chi^2_7 < 2,04) = p_b$$

Da Tab. χ^2: interpolando

$\chi^2_{7;\,97,5\%} = 1,690$

$\chi^2_{7;\,95\%} = 2,167$

$$\Rightarrow p_b = 95\% + (2,167 - 2,04)\frac{(97,5\% - 95\%)}{(2,167 - 1,690)} = 96\%$$

c) Coeficiente de Variação (CV)

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

Como: $\begin{cases} P(\sigma_x > 12) = 96\% \\ P(\mu_x < 80) = 3,8\% \end{cases}$

Então $P\left(CV < \frac{12}{80} = 0,15\right)$ é alta

Resp.: Prob. do CV ser maior do que 15% é baixa. Assim sendo, pode-se considerar que a variabilidade da resistência à compressão é pequena.