
Estatística

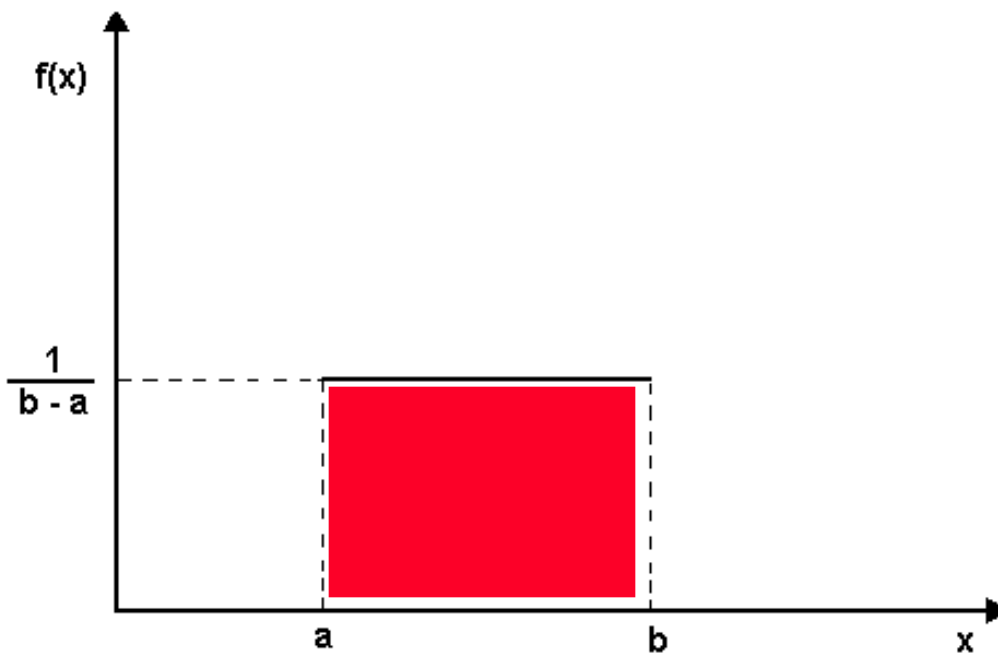
6 - Distribuições de Probabilidade de Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

- Variável aleatória contínua podendo assumir qualquer valores dentro de um intervalo $[a,b]$ tal que:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{para } a \leq x \leq b;$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para qualquer outro valor.}$$



- Probabilidade da variável assumir um valor num subintervalo é a mesma para qualquer outro subintervalo de mesmo comprimento.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição Exponencial

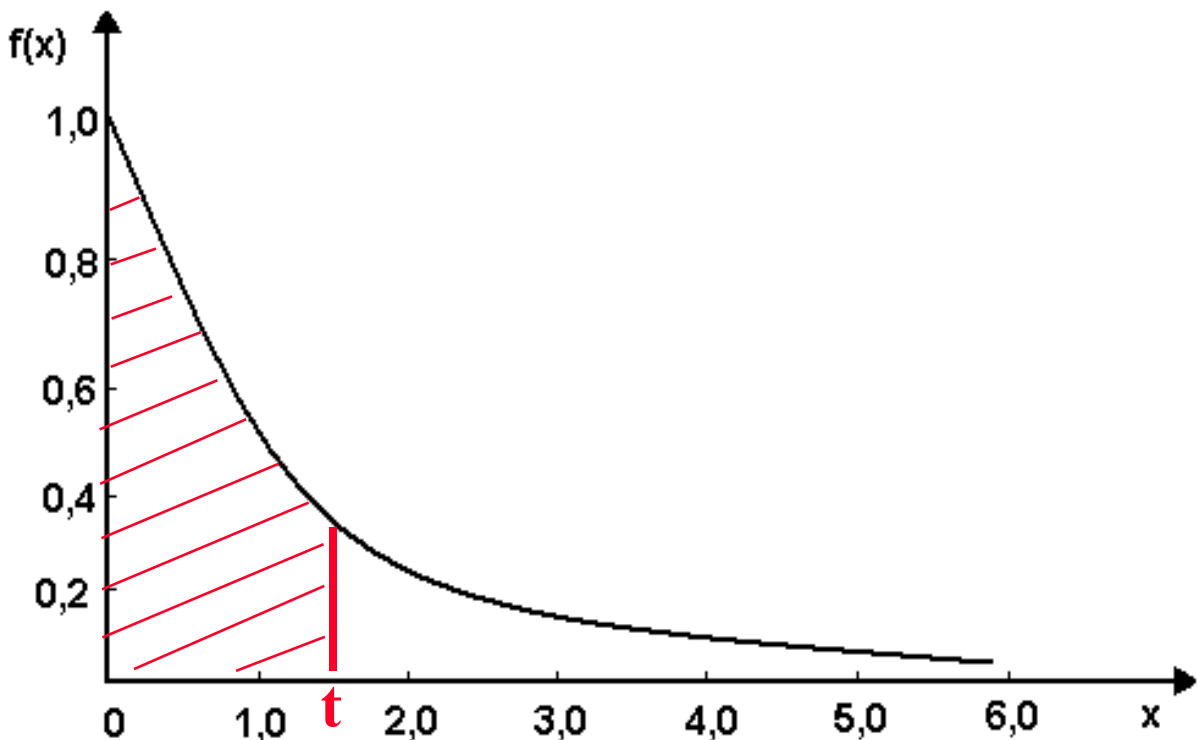
- Seja um fenômeno de Poisson de parâmetro λ (número de sucessos em um determinado intervalo)
- Seja T o intervalo decorrido entre dois sucessos consecutivos.
- Então T é uma variável aleatória com Distribuição Exponencial, com:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{para } t \geq 0; \\ f(t) = 0 & \text{para } t < 0. \end{array} \right.$$

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$



$$\Pr(T > t) = e^{-\lambda t}$$



Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial não tem “memória:

$$\Pr(T > s + t \mid T > s) = \Pr(T > t)$$

Por isso, é “usada em modelos de duração de vida que não desgastam com o tempo”

Mostra-se que:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \dots = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - E(T)]^2 \cdot f(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \dots = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuição Exponencial

Exemplo: Um componente eletrônico, de marca “A”, tem duração de vida que segue uma Distribuição Exponencial com vida média de 100 horas e um custo unitário de R\$10,00.

Qual a probabilidade de um componente, de marca “A”, durar mais de 150 horas?

Seja T_A : duração da vida de um componente “A”

Pergunta : $\Pr(T_A > 150) = ?$

Sabe-se que: $\Pr(T_A > t) = e^{-\lambda t}$

Como a vida média é de 100 horas, então:

$$E(T_A) = \frac{1}{\lambda} = 100 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{100}$$

Logo:

$$\Pr(T_A > 150) = e^{\left(-\frac{150}{100}\right)} = e^{-1,5} = 0,223$$

Distribuição Exponencial

Exemplo: Um componente eletrônico, de marca “A”, tem duração de vida que segue uma Distribuição Exponencial com vida média de 100 horas e um custo unitário de R\$10,00. A marca “B”, desse componente eletrônico, tem uma vida média de 200 horas e um custo de R\$15,00. Considere também a incidência de um custo adicional de R\$8,00 se o componente durar menos de 200 horas, qualquer que seja a marca

Qual a marca mais econômica?

Custo esperado da marca A:

$$\begin{aligned} E(C_A) &= 10 \cdot \Pr(T_A \geq 200) + (10 + 8) \cdot \Pr(T_A < 200) = \\ &= 10 \cdot e^{-(1/100) \cdot 200} + (10 + 8) \cdot (1 - e^{-(1/100) \cdot 200}) = \\ &= 10 \cdot e^{-2} + 18(1 - e^{-2}) = 1,353 + 15,565 = 16,918. \end{aligned}$$

Custo esperado da marca B:

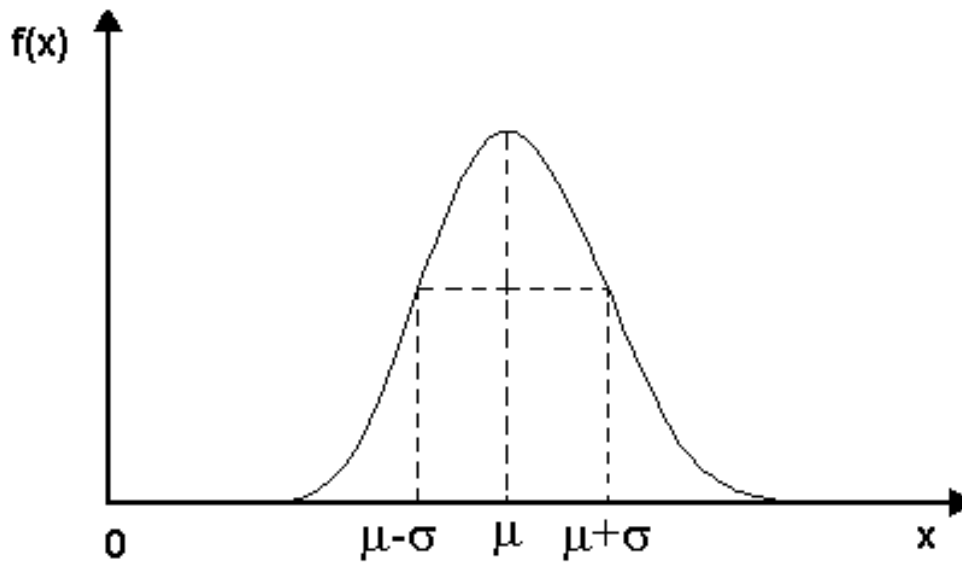
$$\begin{aligned} E(C_B) &= 15 \cdot \Pr(T_B \geq 200) + (15 + 8) \cdot \Pr(T_B < 200) = \\ &= 15 \cdot e^{-(1/200) \cdot 200} + 23 \cdot (1 - e^{-(1/200) \cdot 200}) = \\ &= 15 \cdot e^{-1} + 23 \cdot (1 - e^{-1}) = 5,518 + 14,539 = 20,057. \end{aligned}$$

Portanto: marca “A” é mais econômica!

Distribuição Normal ou de Gauss

Definida pela seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < +\infty$$



Importância prática:

Normal é utilizada na modelagem de inúmeras variáveis encontradas na realidade

Importância teórica:

- **Teorema das Combinações Lineares**
- **Teorema do Limite Central**

Teorema das Combinações Lineares:

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. com Distr. NORMAL
então

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \quad \text{é V.A. NORMAL}$$

onde: a_i são constantes

Teorema do Limite Central:

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são V.A. Independentes,
com Distribuição QUALQUER
então

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \quad \text{é V.A. NORMAL}$$

para n suficientemente grande

Distribuição Normal

Como determinar a probabilidade da variável assumir um valor em dado intervalo $[a, b]$: $P(a < X < b) = ?$

- integrar $f(x)$ nesse intervalo (difícil !)

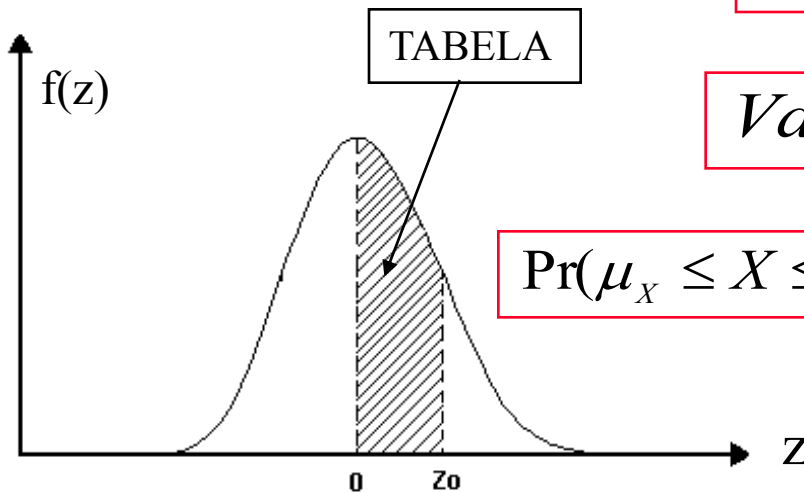
- utilizar tabelas fazendo a seguinte transformação linear:

$$Z = \frac{X - E(X)}{DP(X)} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Z: NORMAL REDUZIDA

$$E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = 1$$



$$\Pr(\mu_X \leq X \leq x_0) = \Pr(0 \leq Z \leq z_0)$$

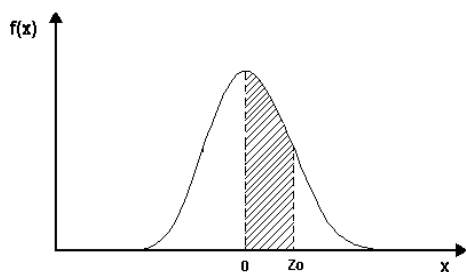
Aproximação utilizando a Distr.Normal:

- Distr. BINOMIAL, para n suficientemente grande: $\left\{ \begin{array}{l} n.p \geq 5 \\ n.q \geq 5 \end{array} \right.$
- Distr. POISSON, para: $ET) = \lambda \cdot t \geq 5$
- Correção de Continuidade devido aprox. Distr. discreta pela Distr.Normal (contínua):

$$\Pr(X = k) \rightarrow \Pr\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Pr(K_1 < X \leq k_2) \rightarrow \Pr\left(k_1 + \frac{1}{2} \leq X \leq k_2 + \frac{1}{2}\right)$$

Z : Distribuição Normal Reduzida



$$\mu_Z = 0$$

$$\sigma_Z^2 = 1$$

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Tabela A6.1 Distribuição normal — valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4778	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4833	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Distribuição Normal

Exemplo: Uma companhia embala em cada caixa 5 pires e 5 xícaras. Os pesos dos pires distribuem-se normalmente com média de 190 g e variância 100 g². Os pesos das xícaras também são normais com média 170 g e variância 150 g². O peso da embalagem é praticamente constante, igual a 100g.

Qual a probabilidade da caixa pesar menos de 2000 g?

X = peso da xícaras

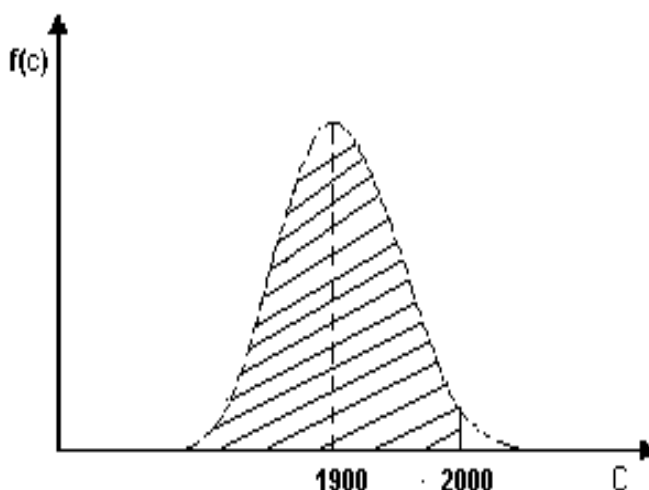
Y = peso do pires

W = peso da embalagem

C = peso da caixa completa

⇒ $P(C < 2000) = ?$

$$C = W + \sum_{i=1}^5 X_i + \sum_{i=1}^5 Y_i$$



$$E(C) = E(W) + \sum_{i=1}^5 E(X_i) + \sum_{i=1}^5 E(Y_i)$$

$$E(C) = E(W) + 5 \cdot E(X) + 5 \cdot E(Y) = 100 + 5 \times 170 + 5 \times 190 = 1900$$

Considerando X e Y variáveis aleatórias INDEPENDENTES, tem-se:

$$Var(C) = Var(W) + \sum_{i=1}^5 Var(X_i) + \sum_{i=1}^5 Var(Y_i) =$$

$$= Var(W) + 5 \cdot Var(X) + 5 \cdot Var(Y) = 0 + 5 \times 150 + 5 \times 100 = 1250$$

$$Z = \frac{X - E(C)}{DP(C)}$$

$$z(2000) = \frac{2000 - 1900}{\sqrt{1250}} \cong 2,83$$

$$\Pr(C < 2000) = \Pr(C < 1900) + \Pr(1900 < C < 2000)$$

$$\Pr(C < 1900) = \Pr(Z < 0) = 0,5 \quad (\text{por simetria})$$

$$\Pr(1900 \leq C \leq 2000) = \Pr(0 \leq Z \leq 2,83) = 0,4977 \quad (\text{tabela})$$

$$\Pr(C < 2000) = 0,5 + 0,4977 = 0,9977$$

Distribuição Normal

Exemplo: Uma companhia embala em cada caixa 5 pires e 5 xícaras. Os pesos dos pires distribuem-se normalmente com média de 190 g e variância 100 g^2 . Os pesos das xícaras também são normais com média 170 g e variância 150 g^2 . O peso da embalagem é praticamente constante, igual a 100g.

Qual a probabilidade de um pires pesar menos que uma xícara numa escolha ao acaso?

X = peso da xícara

Y = peso do pires

Pergunta: $P(Y - X < 0) = ?$

$P(W < 0) = ?$

Seja $W = Y - X$, logo a pergunta é:

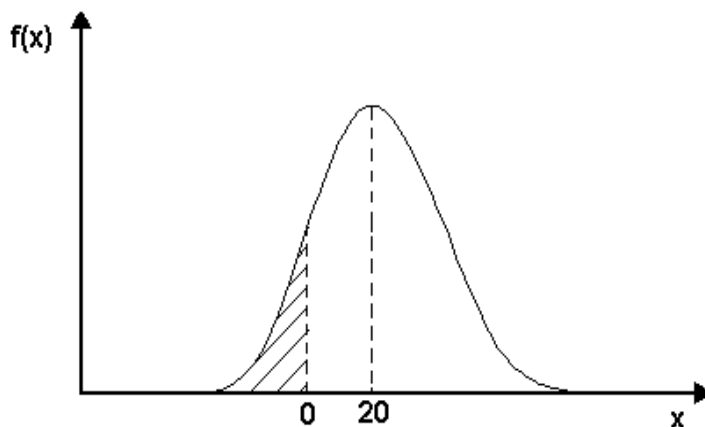
$$E(W) = E(Y) - E(X) = 190 - 170 = 20\text{g}$$

Se X, Y independentes:

$$Var(W) = Var(Y) + Var(X) = 100 + 150 = 250\text{g}^2$$

$$z(0) = \frac{0 - 20}{\sqrt{250}} = -1,265$$

$$z(20) = \frac{20 - 20}{\sqrt{250}} = 0$$



$$P(W < 0) = P(W < 20) - P(0 < W < 20) =$$

$$= \Pr(Z < 0) - P(-1,265 < Z < 0) =$$

$$= 0,5 - P(0 < Z < 1,265) = \text{(por simetria)}$$

$$= 0,5 - 0,3971 = 0,1029$$

Distribuição Gama

Usada para representar fenômenos limitados num extremo. Exemplos:

- distribuição dos intervalos de tempos entre recalibrações de instrumentos
- intervalos de tempos entre compras de um item estocado

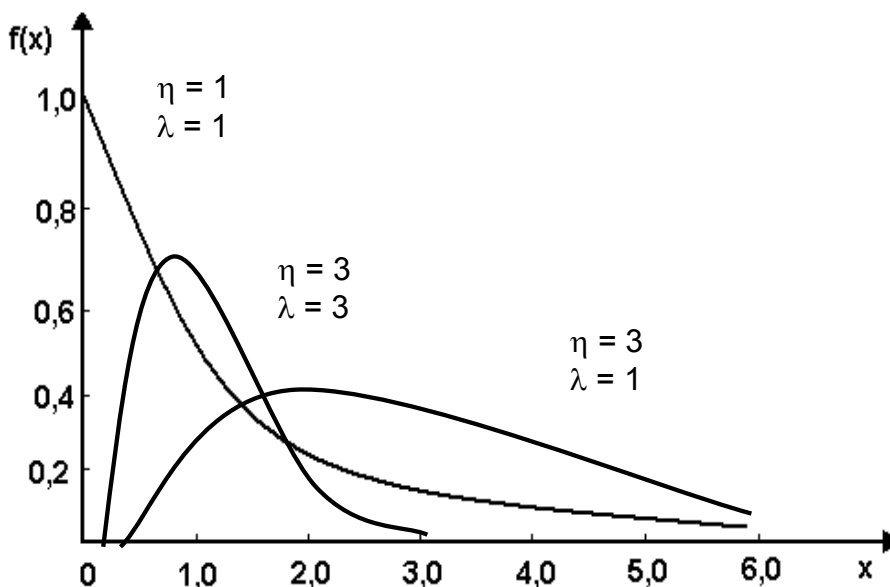
$$f(x) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} \cdot e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geq 0;$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para } x < 0.$$

Onde:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{+\infty} x^{\eta-1} \cdot e^{-x} dx \quad (\text{Função Gama})$$

se η é inteiro: $\Gamma(\eta) = (\eta - 1)!$



$$E(X) = \frac{\eta}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{\eta}{\lambda^2}$$

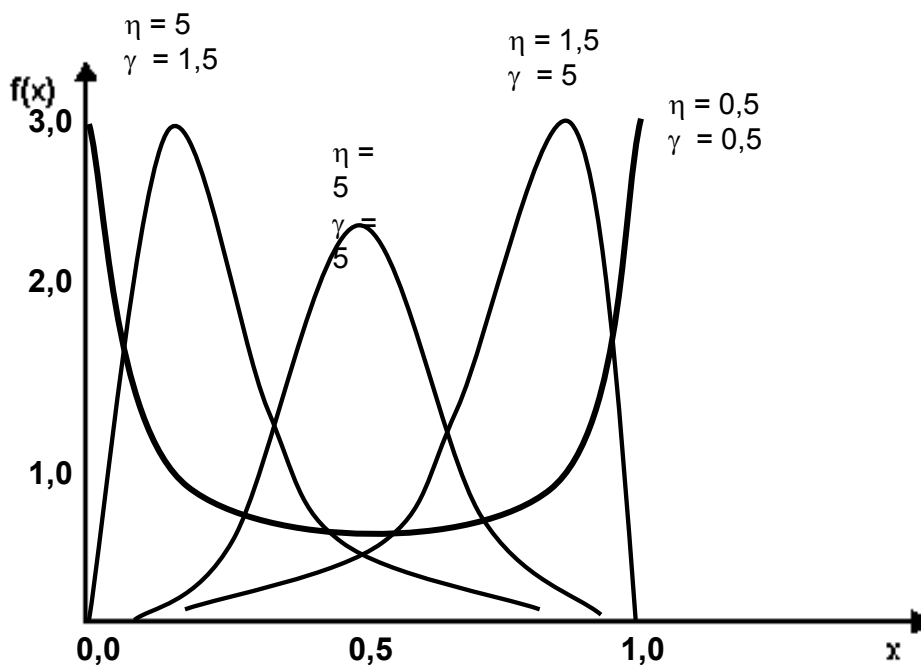
Distribuição Beta

Usada para representar fenômenos limitados nos dois extremos. Exemplos:

- distribuição da proporção da população entre o menor e o maior valor da amostra
- distribuição dos tempos a serem gastos na execução de uma tarefa

$$f(x) = \frac{\Gamma(\gamma + \eta)}{\Gamma(\gamma) + \Gamma(\eta)} x^{\gamma-1} (1-x)^{\eta-1} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para } x < 0 \text{ e } x > 1$$



$$E(X) = \frac{\gamma}{\gamma + \eta}$$

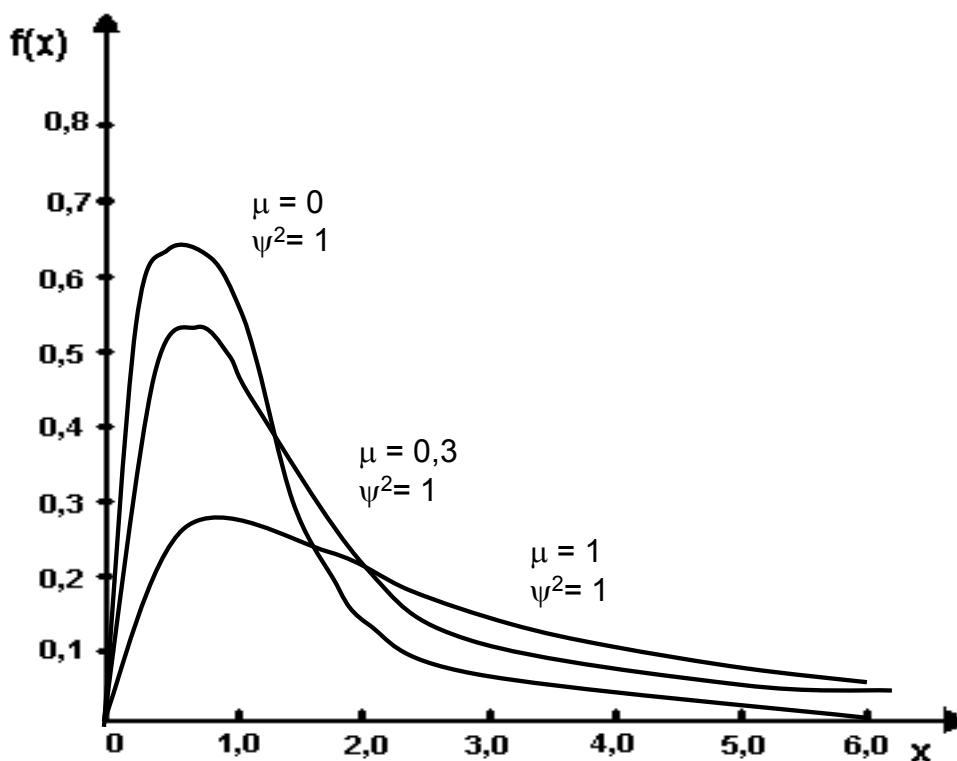
$$Var(X) = \frac{\gamma\eta}{(\gamma + \eta)^2 (\gamma + \eta + 1)}$$

Distribuição Log-Normal

Usada quando o logarítmo da variável segue uma Distribuição Normal.

$$f(x) = \frac{1}{vx\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2v^2}(\log x - \mu)^2} \quad \text{para } x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para } x < 0$$



$$E(X) = e^{\mu + v^2/2}$$

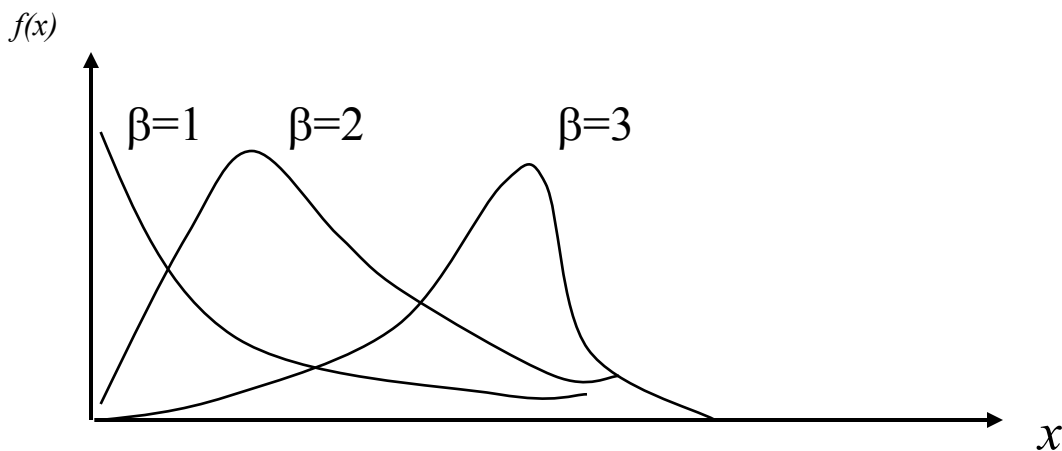
$$Var(X) = e^{2\mu + v^2} (e^{v^2} - 1)$$

Distribuição Weibull

A distribuição de Weibull é muito similar à distribuição gama, tendo o mesmo uso

$$f(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} \quad 0 \leq t < \infty$$

onde α e β (dito taxa de falha) são constantes positivas.



$$E(X) = \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

$$Var(X) = \alpha^{-2/\beta} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$$

Exercício 6.1

As mudas de pinus produzidas num determinado viveiro são acondicionadas em caixas com 20 unidades. Por experiência, sabe-se que a probabilidade de uma muda não medrar é de 5%. Cada caixa é vendida de acordo com a seguinte tabela:

Nº. de mudas boas / caixa	20	De 18 a 19	De 16 a 17	Menos de 16
Preço de venda / caixa	R\$20,00	R\$18,00	R\$15,00	R\$5,00

- Qual é a Média de mudas boas por caixa?
- Qual é o Coeficiente de Variação de mudas boas por caixa?
- No longo prazo, qual é o lucro esperado por caixa, sabendo-se que o custo por caixa é de R\$6,00?

Seja X : nº de mudas boas numa caixa com 20 unidades
 $\therefore X \rightarrow$ Distr. Binomial, com parâmetros p e $n=20$
 p : prob. mud. boa = prob. mud. medra $\Rightarrow p = 1 - 0,05 = 0,95$

$$a) \mu_x = n \cdot p = 20 \times 0,95 = 19 //$$

$$b) CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{0,975}{19} = 0,051 = 5,1\% //$$

$$\text{onde: } \sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{20 \times 0,95 \times 0,05} = \sqrt{0,95} = 0,975$$

Exercício 6.1 – Continuação

As mudas de pinus produzidas num determinado viveiro são acondicionadas em caixas com 20 unidades. Por experiência, sabe-se que a probabilidade de uma muda não medrar é de 5%. Cada caixa é vendida de acordo com a seguinte tabela:

Nº. de mudas boas / caixa	20	De 18 a 19	De 16 a 17	Menos de 16
Preço de venda / caixa	R\$20,00	R\$18,00	R\$15,00	R\$5,00

- Qual é a Média de mudas boas por caixa?
- Qual é o Coeficiente de Variação de mudas boas por caixa?
- No longo prazo, qual é o lucro esperado por caixa, sabendo-se que o custo por caixa é de R\$6,00?

c) Seja PV : preço venda / caixa
 C : custo / caixa. $C = R\$6,00$
 L : lucro / caixa $\Rightarrow L = PV - C = PV - 6,00$
 k : nº. de mudas boas / caixa.
 $P(X=k) = \binom{20}{k} \cdot 0,95^k \cdot 0,05^{20-k}$ (TABELADO).

k	$P(X=k)$		Preço Vend.	Lucro	Lucro $\times P(\cdot)$
20	0,3585	- - - $\Rightarrow$	20,00	14,00	5,019
19	0,3774	0,4661 $\rightarrow$	18,00	12,00	6,793
18	0,1887				
17	0,0596	0,0729 $\rightarrow$	15,00	9,00	0,656
16	0,0133				
15	0,0022	0,0025 $\rightarrow$	5,00	-1,00	-0,003
14	0,0003				
13	0,0000				
TOTAL	1,0000				12,465

∴ Lucro esperado = R\$ 12,465 //