Estatística

3 - Probabilidades

Probabilidades

ESPAÇO AMOSTRAL: S

Conjunto de todos os resultados possíveis de uma variável do fenômeno em observação

EVENTO : A

Sub-conjunto de resultados possíveis

FUNÇÃO PROBABILIDADE: Pr

$$\text{Pr} : S \longrightarrow [\,0, 1\,]$$

PROPRIEDADES:

$$\text{Para } \forall A \subset S \rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

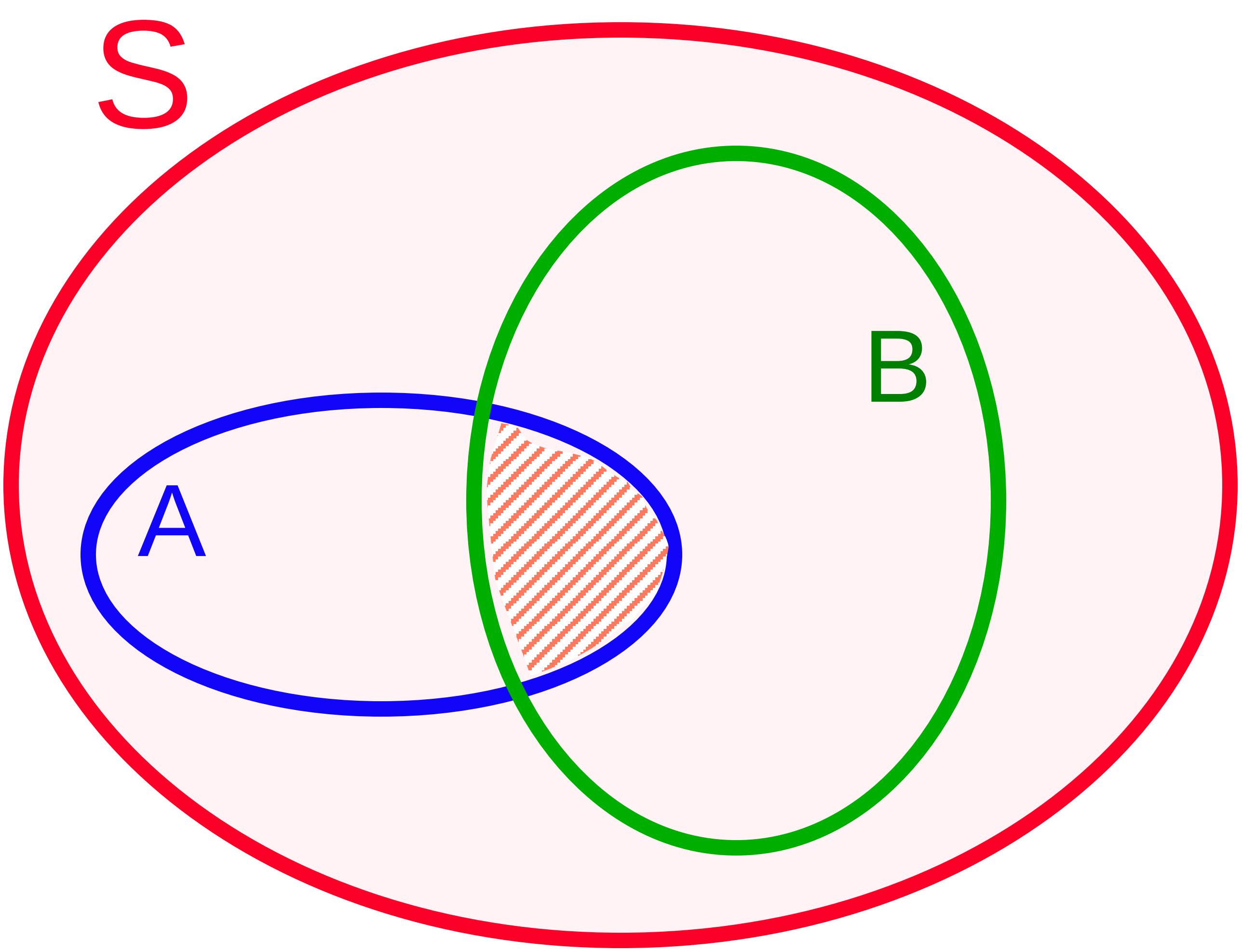
$$\Pr(S) = 1$$

$$\Pr(\phi) = 0$$

Probabilidade da União de Eventos:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

REGRA DA ADIÇÃO



Exemplo 1 – Espaço Amostral

Experimento:

Dois dados equilibrados são lançados e observa-se o número da face superior.

Seja:

X = número da face superior do 1º dado

Y = número da face superior do 2º dado.

$$\text{Espaço Amostral } S : \{(x; y) \mid (x = 1 \ldots 6); (y = 1 \ldots 6)\}$$

(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Exemplo 1 – Espaço Amostral

Dois dados equilibrados são lançados e observa-se o número da face superior: (X , Y).

ESPAÇO AMOSTRAL S

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4, 5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

EVENTOS:

A: Ocorrer 2 nos dois dados **A = {(2,2)}** **Pr(A) = 1/36**

B: Soma números igual a 4 **B = {(1,3), (2,2), (3,1)}** **Pr(B) = 3/36 = 1/12**

C: O 1º dado é metade do 2º **C = {(1,2), (2,4), (3,6)}** **Pr(C) = 3/36 = 1/12**

D: Sair números iguais **D = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}**

E: Sair par no 1º dado **E = {(2,1), (2,2), ..., (2,6), (4,1), ..., (4,6), ... , (6,6)}**

F: Sair impar no 2º dado **F = {(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), ..., (6,1), (6,2), (6,5)}**

G: Ocorrer número de 1 a 6 **G = S (espaço amostral)**

H: Soma igual a 13 **H = ϕ (conjunto vazio, evento impossível)**

I: Soma >4 **I = {(1,4), (1,5), (1,6), (2,3), ..., (2,6), (3,2), ..., (6,1), (6,2), ..., (6,6)}**

J: Soma menor que 5 $\boxed{J = \bar{I} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}}$

K: Ocorrer 2 nos dois dados **e** a soma igual a 4

$$\boxed{K = A \cap B = \{(2,2)\}}$$

L: Sair números iguais **ou** a soma igual a 4

$$\boxed{L = D \cup B = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(4,4),(5,5),(6,6)\}}$$

M: O 1º dado é metade do 2º **e** soma dos números é igual a 4

$$\boxed{M = C \cap B = \Phi}$$

Exemplo 2 – Probabilidade Condicionada

Num lote de 100 peças , temos :

20 Defeituosas

80 Não defeituosas

Escolhemos 2 peças , ao acaso:

– com reposição

– sem reposição

Consideremos os eventos :

A : {primeira peça é defeituosa} Pr(A) = ?

B : {segunda peça é defeituosa} Pr(B) = ?

Caso COM reposição:

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Caso SEM reposição:

$$\Pr(A) = \frac{1}{5} \qquad \text{(imediato)}$$

$$\Pr(B) = \ ???$$

PROBABILIDADE CONDICIONADA

Pr(B/A) = Prob. do evento B, condicionada a ocorrência do evento A = Pr(B dado A)

No exemplo, sem reposição :

$$\boxed{\Pr(B \mid A) = \frac{19}{99}}$$

Exemplo 1 – Probabilidade Condicionada

Dois dados equilibrados são lançados e observa-se o número da face superior:

Seja:: x_1 = número 1º dado e x_2 = número 2º dado.

ESPAÇO AMOSTRAL *S*

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4, 5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

B →   ← **A**

Consideremos os eventos:

A={(x_1,x_2) | x_1 + x_2 = 10}={(4,6),(5,5),(6,4)}

B = {(x_1, x_2) | x_1 > x_2} = {(2,1) , (3,1) , (3,2) , ... , (6,4) , (6,5)}

Pr(A) = 3/36   Pr(B) = 15/36   Pr(A ∩ B) = 1/36

Pr(A/B) = 1/15   Pr(B/A) = 1/3

Observe que o espaço amostral ficou reduzido:

$$\Pr(A|B) = \frac{1}{15} = \frac{1/36}{15/36} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \qquad \Pr(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

INTERESSANTE: - essas relações não surgem apenas neste exemplo, ao contrário, são **gerais!!**

$$\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) * \Pr(\mathrm{B}) \quad \text{ou} \quad \Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) * \Pr(\mathrm{A})}$$

Exemplo 2 – Probabilidade Condicionada

Num lote de 100 peças , temos : 20 defeituosas
80 não defeituosas

Escolhe-se 2 peças , ao acaso: com reposição
sem reposição

Considere os eventos : A={primeira peça é defeituosa}
B={segunda peça é defeituosa}

Pede-se : Pr(A) e Pr(B)

COM REPOSIÇÃO:

$$\boxed{\Pr(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}}$$

$$\boxed{\Pr(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}}$$

SEM REPOSIÇÃO:

$$\boxed{\Pr(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}}$$

$$\Pr(B) = \Pr(B \cap A) + \Pr(B \cap \overline{A})$$

$$\Pr(B) = \Pr(B / A) \cdot \Pr(A) + \Pr(B / \overline{A}) \cdot \Pr(\overline{A})$$

$$\Pr(B) = \frac{19}{99} \cdot \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \cdot \frac{4}{5} = \frac{99}{495} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\Pr(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}}$$

SURPREENDENTE ?!!!

Eventos Independentes

Retome o Exemplo 1: lançamento de 2 dados equilibrados

Consideremos os eventos :

A $=\{(x_1 , x_2) \mid x_1$ é par$\}$

B $=\{(x_1 , x_2) \mid x_2 = 5$ ou $x_2 = 6\}$

Observe : **A , B** são eventos independentes, não relacionadas :

"Saber que **A** ocorreu não fornece qualquer informação sobre a ocorrência de **B** "

No exemplo :

Pr(A)=18/36=1/2 Pr(B)=12/36=1/3 Pr(A $\cap$B)=6/36=1/6

$$\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} = \Pr(A)$$

$$\Pr(B/A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = \Pr(B)$$

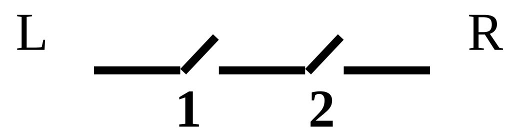
$$\therefore\ \Pr(A \cap B) = \Pr(A/B) \cdot \Pr(B) = \Pr(A).\Pr(B/A) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Define-se :

A , B são eventos independentes $\Leftrightarrow$ $\Pr(A \cap B) = \Pr(A).\Pr(B)$

Eventos Independentes

<u>Exemplo 3</u>: Dado o circuito



Eventos : A_i : {chave **i** fechada}

E : {corrente passa de L para R}

Se Pr(A_i) = p e as chaves são independentes então

$$\Pr(E) = \Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) = p^2$$

<u>Exemplo 4</u>: Lote de 10000 peças com 10% defeituosas. Duas peças são extraídas, ao acaso , sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem perfeitas?

Eventos : A:{primeira é perfeita} B:{segunda é perfeita}

Pede-se : $\Pr(A \cap B)$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B/A) \cdot \Pr(A) = \left(8999/9999\right) \cdot \left(9000/10000\right) = 0{,}80999$$

Considerando A , B eventos independentes (em função do tamanho do lote):

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) = (0{,}9) \cdot (0{,}9) = 0{,}81$$

Generalizando:

"A_1, A_2, ... , A_n são eventos mutuamente independentes $\Leftrightarrow$

$$\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1) \bullet \Pr(A_2) \quad \ldots \quad \Pr(A_{n-1} \cap A_n) = \Pr(A_{n-1}) \bullet \Pr(A_n)$$

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(A_1) \bullet \Pr(A_2) \bullet \Pr(A_3) \quad \cdots$$

$$\cdots$$

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = \Pr(A_1) \bullet \Pr(A_2) \bullet \bullet \bullet \Pr(A_n)$$

Eventos Independentes

Retome o Exemplo 1 (lançamento de 2 dados)

Eventos :

A : $\{(x_1 , x_2) \mid x_1$ é par$\}$

B : $\{(x_1 , x_2) \mid x_2$ é ímpar$\}$

C : $\{(x_1 , x_2) \mid (x_1$ e x_2 são pares) ou (x_1 e x_2 são ímpares)$\}$

A , B , C são <u>eventos mutuamente independentes</u> ?

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(C) = \Pr(A \cap \overline{B}) + \Pr(\overline{A} \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

$$\Pr(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \Pr(A) \cdot \Pr(C)$$

$$\Pr(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \Pr(B) \cdot \Pr(C)$$

$$\Pr(A \cap B \cap C) = 0 \neq \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C) = \frac{1}{8}$$

Logo , A , B , C não são mutuamente independentes

Teorema de Bayes

"Probabilidade de uma particular causa (B_i) , dado que o evento A tenha ocorrido"

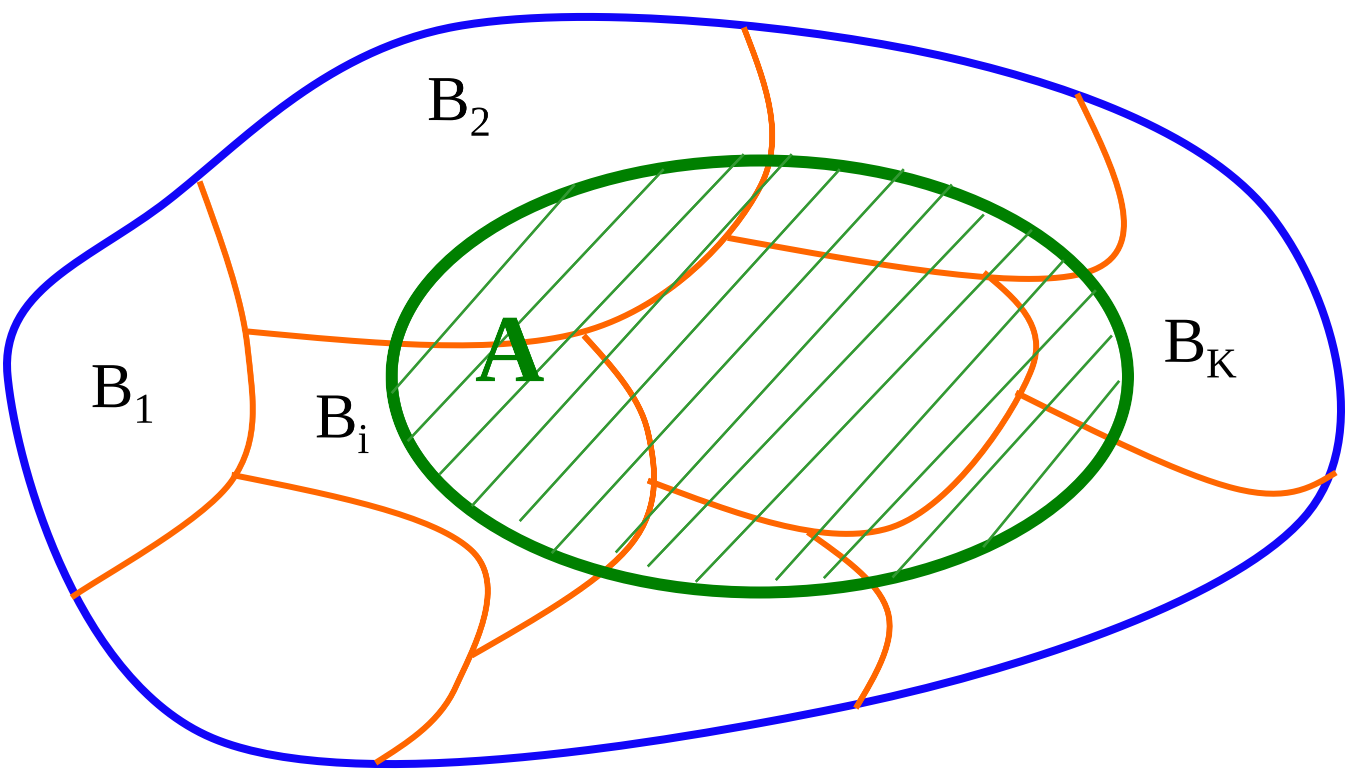
Considere a partição B_1, B_2 , ... , B_k :

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$$

$$\Pr(B_i/A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} =$$

$$= \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A \cap B_1) + \ldots + \Pr(A \cap B_k)}$$

$$= \frac{\Pr(A/B_i)\cdot \Pr(B_i)}{\Pr(A/B_1)\cdot \Pr(B_1) + \ldots + \Pr(A/B_k)\cdot \Pr(B_k)}$$



Teorema de Bayes

Exemplo 5: Peças são produzidas por 3 fábricas (1,2,3) e armazenadas num único depósito

Fábrica 1 produz o dobro da Fábrica 2

Fábrica 2 produz igual a Fábrica 3

Fábricas 1 e 2 produzem 2%de peças defeituosas

Fábrica 3 produz 4% de peças defeituosas

Uma peça é retirada do depósito , ao acaso. Sabendo-se que a peça é defeituosa , qual a probabilidade que seja da Fábrica 1?

Considere os eventos :

A : {peça defeituosa}

B_{i} : {peça Fábrica **i** , **i** =1, 2, 3 }

Pede-se: $\Pr(B_1/A)$

$$\Pr(B_1/A) = \frac{\Pr(A/B_1)\cdot\Pr(B_1)}{\Pr(A/B_1)\cdot\Pr(B_1)+\Pr(A/B_2)\cdot\Pr(B_2)+\Pr(A/B_3)\cdot\Pr(B_3)}$$

$$\Pr(B_1) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(B_2) = \frac{1}{4} \qquad \Pr(B_3) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(A/B_1) = 0{,}02 \qquad \Pr(A/B_2) = 0{,}02 \qquad \Pr(A/B_3) = 0{,}04$$

$$\Pr(B_1/A) = \frac{(0{,}02)\cdot(1/2)}{(0{,}02)\cdot(1/2)+(0{,}02)\cdot(1/4)+(0{,}04)\cdot(1/4)} = 0{,}4$$

Probabilidades

Eventos: A, B são EXCLUDENTES ?

• NÃO: $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

• SIM: $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

$$\Pr(A \cap B) = 0$$

Eventos: A, B são INDEPENDENTES ?

• NÃO: $$\Pr(A \cap B) = \Pr(B / A) \cdot \Pr(A) = \Pr(A / B) \cdot \Pr(B)$$

• SIM: $$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \cdot \Pr(A)$$

$$\Pr(B / A) = \Pr(B)$$

$$\Pr(A / B) = \Pr(A)$$

Método de Solução de Exercícios

1. Entender

Ler atentamente o enunciado!
Sacar o que está rolando ...
Qual é a pergunta?

2. Simplificar

Definir as variáveis !!!
X: .... A: .... B: ....

Explicitar a pergunta: Ex.: Pr(X>3)=?

3. Modelar

Utilizar a Teoria, as Fórmulas !!! Ex.:

$$\boxed{\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)}$$

$$\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B) \cdot \Pr(B)}$$

$$\boxed{E(X) = \sum X_i \cdot \Pr(X_i)}$$

4. Resolver

Aplicar as Fórmulas !!!
Encontrar a resposta: Ex.: Pr(X>3)= ....

5. Analisar

O valor encontrado é vazoável?
Não é absurdo? Ex.: Pr(X)<0 ou Pr(X)>1 $\Rightarrow$ nota ZERO!!!
Não é muito grande? Ou muito pequeno?
Comentar o resultado obtido

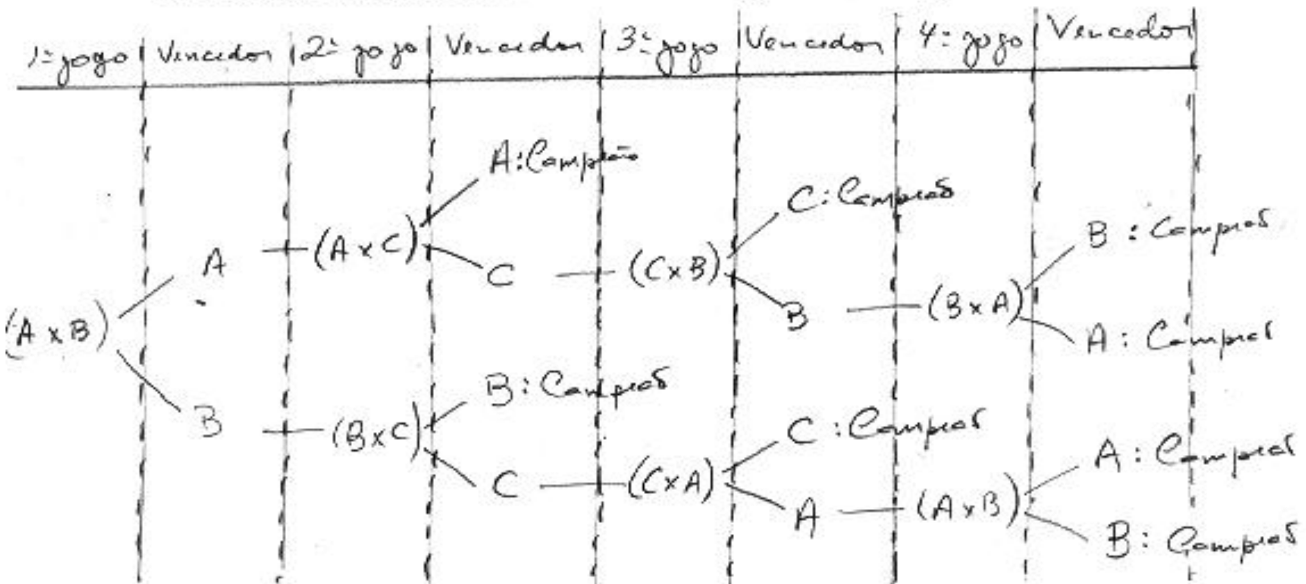
Exercício 3.1

Três jogadores A, B, C disputam um torneio de tênis. Considere que os três jogadores tem a mesma categoria, isto é, a probabilidade de um jogador ganhar uma partida é igual a do outro. Inicialmentente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.

a) Dê o espaço amostral para o experimento, ou seja, mostre as possíveis seqüências de resultados desse torneio.

b) Determine a probabilidade do jogador C ganhar o torneio.

c) Determine a probabilidade do vencedor ser o jogador C ou o jogador B.



Seja: X_i : jogador X ganha a i-ésima partida $X = \{A, B, C\}$

SEQUENCIAS

S_1 : $A_1\ A_2 \longrightarrow P(S_1) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1) = P(A_2).P(A_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

S_2 : $A_1\ C_2\ C_3 \longrightarrow P(S_2) = P(A_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(A_1).P(C_2).P(C_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

S_3 : $A_1\ C_2\ B_3\ B_4 \longrightarrow P(S_3) = \frac{1}{16}$

S_4 : $A_1\ C_2\ B_3\ A_4 \longrightarrow P(S_4) = \frac{1}{16}$

S_5 : $B_1\ B_2 \longrightarrow P(S_5) = 1/4$

S_6 : $B_1\ C_2\ C_3 \longrightarrow P(S_6) = 1/8$

S_7 : $B_1\ C_2\ A_3\ A_4 \longrightarrow P(S_7) = 1/16$

S_8 : $B_1\ C_2\ A_3\ B_4 \longrightarrow P(S_8) = 1/16$

a) Espaço Amostral

$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$

Seja X: jogador X ganha o torneio $\Rightarrow$

$$\begin{cases} P(A) = P(S_1 \cup S_4 \cup S_7) \\ \quad = P(S_1) + P(S_4) + P(S_7) \\ \quad = 1/4 + 1/16 + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\ P(B) = P(S_3) + P(S_5) + P(S_8) \\ \quad = 1/16 + 1/4 + 1/16 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\ b)\ P(C) = P(S_2) + P(S_6) \\ \quad = 1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4 \end{cases}$$

c) $P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B)$

$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Exercício 3.2

Um dado é viciado, de tal forma que a probabilidade de sair um certo ponto é proporcional ao seu valor. Por exemplo, o ponto 6 é três vezes mais provável de sair do que o ponto 2.

a) Dê o espaço amostral para o experimento de lançar tal dado. (0,1)

b) Determine a probabilidade de cada elemento do espaço amostral. (0,3)

c) Determine a probabilidade de sair 1 , sabendo-se que o ponto que saiu é impar. (0,8)

d) Determine a probabilidade de sair um número par, sabendo-se que saiu um número maior do que 4. (0,8)

a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Seja $P(i)$ = prob. de sair o ponto i

$\therefore P(1) = p$, $P(2) = 2p$, $P(3) = 3p$, $P(4) = 4p$, $P(5) = 5p$, $P(6) = 6p$

$$\sum_{i=1}^{6} P(i) = 1$$

$\therefore p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$

$p(1+2+3+4+5+6) = 1$

$p \cdot 7 \times 3 = 1 \Rightarrow p = 1/21$

$\Rightarrow P(1) = 1/21$, $P(2) = 2/21$, $P(3) = 3/21$, $P(4) = 4/21$, $P(5) = 5/21$, $P(6) = 6/21$

c) $$P(1 \mid \text{impar}) = P(1 / 1 \cup 3 \cup 5) = \frac{P[(1) \cap (1 \cup 3 \cup 5)]}{P(1 \cup 3 \cup 5)} = \frac{P(1)}{\underbrace{P(1 \cup 3 \cup 5)}_{\text{EXCLUDENTES}}} =$$

$$= \frac{P(1)}{P(1) + P(3) + P(5)} = \frac{1/21}{1/21 + 3/21 + 5/21} = \frac{1}{9}$$

11,1%

d) $$P(\text{par} \mid > 4) = P[(2 \cup 4 \cup 6) \mid (5 \cup 6)] = \frac{P[(2 \cup 4 \cup 6) \cap (5 \cup 6)]}{P(5 \cup 6)} =$$

$$= \frac{P(6)}{P(5 \cup 6)} = \frac{P(6)}{P(5) + P(6)} = \frac{6/21}{5/21 + 6/21} = \frac{6}{11}$$

54,5%

Exercício 3.3

1. Sabe-se que um lote de caminhões produzidos por determinada montadora apresentou os seguintes percentuais de defeitos durante o período de garantia: 2% apresentaram defeitos mecânicos, 1,5% defeitos elétricos e 0,5% apresentaram os dois tipos de defeitos.

a) Calcule a probabilidade de um caminhão não ter defeito.

b) Calcule a probabilidade de um caminhão apresentar pelo menos um tipo de defeito.

c) Calcule a probabilidade de um caminhão ter defeito mecânico, sabendo-se que não apresenta defeito elétrico.

d) Mostre que o fato de um caminhão apresentar defeito mecânico independe, ou não, dele ter defeito elétrico.

Seja M: caminhões apresentam defeito Mecânico

E: " " " Elétrico

Assim:

$P(M) = 0{,}02 \qquad P(E) = 0{,}015 \qquad P(M \cap E) = 0{,}005$

a) $P(\bar{M} \cap \bar{E}) = 1 - P(M \cup E) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97 = 97\%$

onde

$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E)$

$= 0{,}02 + 0{,}015 - 0{,}005 = 0{,}03$

b) $P(M \cup E) = 0{,}03$ (vide item a)

c) $P(M / \bar{E}) = \dfrac{P(M \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \dfrac{0{,}015}{0{,}985} = 0{,}0152 = 1{,}52\%$

onde

$P(M \cap \bar{E}) = P(M) - P(M \cap E) = 0{,}02 - 0{,}005 = 0{,}015$

$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$

d) M e E são independentes $\Leftrightarrow P(M \cap E) = P(M) \cdot P(E)$

No caso:

$P(M \cap E) = 0{,}005$

$P(M) \cdot P(E) = 0{,}02 \times 0{,}015 = 0{,}0003$

Logo:

$P(M \cap E) \neq P(M) \cdot P(E)$

Portanto, M e E não são independentes

Exercício 3.4

2. Sabe-se que 1 em cada 10.000 habitantes de determinada cidade tem dengue. Sabe-se, também, que existe um teste desenvolvido para diagnosticar tal doença com as seguintes características: (i) teste apresenta resultado positivo em 99,9% dos indivíduos que de fato tem dengue e (ii) apresenta resultado positivo em 1% dos indivíduos que não tem dengue.
a) Calcule a probabilidade de um habitante selecionado aleatoriamente ter dengue, dado que o resultado do teste foi positivo.
b) Na sua opinião, o resultado do teste pode ser considerado um bom indicador para diagnosticar tal doença?

Seja X: indivíduo tem dengue
Y: resultado do teste é positivo

Logo:

$P(X) = \frac{1}{10.000} = 0,0001$

$P(Y|X) = 0,999$

$P(Y|\bar{X}) = 0,01$

a) $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0,0000999}{0,0100989} = 0,0098 = 0,98\%$

onde:

$P(X \cap Y) = P(Y|X) \cdot P(X)$
$= 0,999 \times 0,0001 = 0,0000999$

$P(Y) = P(Y|X) \cdot P(X) + P(Y|\bar{X}) \cdot P(\bar{X})$
$= 0,999 \times 0,0001 + 0,01 \times 0,9999$
$= 0,0000999 + 0,009999 = 0,0100989$

b) Não obstante, o teste dar resultado positivo em 99,9% dos casos nos quais sabe-se que o indivíduo é portador do vírus da dengue, ele não pode ser considerado um bom teste para diagnosticar essa doença, visto que a chance do teste acertar o diagnóstico quando apresenta resultado positivo é muito pequena, ou seja, a probabilidade de um indivíduo ter dengue dado que o teste apresentou resultado positivo é menor do que 1%.
Isto ocorre devido à baixa incidência da doença, isto é, apenas 1 pessoa tem dengue em cada 10.000 habitantes.

Exercício 3.5

3. O farol (semáforo) A fica aberto 20s/minuto; o farol B, 30 s/min e o farol C, 40s/min. Estando os faróis bem afastados, qual a probabilidade de um motorista encontrar:

a) Todos os faróis abertos?

b) Pelo menos um farol aberto?

c) Apenas um farol aberto?

Sejam os eventos: A: farol A aberto $P(A) = 20/60 = 1/3$

B: " B " $P(B) = 30/60 = 1/2$

C: " C " $P(C) = 40/60 = 2/3$

a) Todos os farois abertos

$\therefore P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$: eventos independentes, considerando os farois bem afastados

$\therefore P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} = 0,111 = 11,1\%$

b) Pelo menos um farol aberto:

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

eventos independentes

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3}\left(1 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{12 - 3 - 4 + 2}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7 + 9}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$

$= 88,9\%$

c) Apenas um farol aberto

$\therefore P[(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)]$ eventos excludentes e indep.

$\therefore P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{1 + 2 + 4}{18} = \frac{7}{18} = 0,389 = 38,9\%$

Exercício 3.6

4. Um satélite tem lançamento previsto do cabo Canaveral e um outro da Base de Vandenberg. Sejam C o evento do lançamento do cabo Canaveral ser realizado na data prevista e V o evento análogo da Base de Vanderberg. Sabe-se que os lançamentos são independentes, $P(C) > P(V)$, $P(C \cup V)=0{,}626$ e $P(C \cap V)=0{,}144$. Determine os valores de P(C) e P(V).

Sejam os eventos: C - lançamento Canaveral na data prevista
V - " Vandenberg " " "

$P(C \cup V) = P(C) + P(V) - \underbrace{P(C \cap V)}_{=0{,}144} = 0{,}626$

$\therefore P(C) + P(V) = 0{,}626 + 0{,}144 = 0{,}77$

$\therefore P(C) = 0{,}77 - P(V)$

Eventos são independentes

$\therefore P(C \cap V) = P(C) \cdot P(V) = 0{,}144$

Logo: $[0{,}77 - P(V)] \cdot P(V) = 0{,}144$

$0{,}77 \cdot P(V) - P(V)^2 = 0{,}144$

$\therefore P(V)^2 - 0{,}77 \cdot P(V) + 0{,}144 = 0$

Logo: $P(V) = \dfrac{-(-0{,}77) \pm \sqrt{(-0{,}77)^2 - 4 \cdot 0{,}144}}{2}$

$\therefore P(V) = \dfrac{0{,}77 \pm \sqrt{0{,}0169}}{2} = \dfrac{0{,}77 \pm 0{,}13}{2}$ $= 0{,}45$; $= 0{,}32$

Como $P(C) > P(V)$, tem-se

$P(C) = 0{,}45$

$P(V) = 0{,}32$